ТЕОРЕМА ГАУССА-БОННЕ
И ФОРМУЛА ПРИСОЕДИНЕНИЯ
ДЛЯ РЕДУКТИВНЫХ ГРУПП

Валентина Кириченко

ДИССЕРТАЦИЯ ПРЕДСТАВЛЕНА В СООТВЕТСТВИИ С ТРЕБОВАНИЯМИ
ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ СТЕПЕНИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ
АСПИРАНТУРА ФАКУЛЬТЕТА МАТЕМАТИКИ
УНИВЕРСИТЕТ ТОРОНТО

Перевод с английского языка выполнен автором в 2009 году.

Теорема Гаусса-Бонне
и формула присоединения для редуктивных групп
Диссертация на соискание степени PhD
Валентина Кириченко
Факультет математики
Университет Торонто
2004

Аннотация

Моя диссертация посвящена геометрии редуктивных групп. Цель — перенести некоторые хорошо известные геометрические результаты, которые справедливы для комплексного тора $(\mathbb{C}^*)^n$, на случай произвольной редуктивной группы. Диссертация состоит из двух частей.

Первая часть содержит аналог теоремы Гаусса-Бонне для конструктивных пучков эквивариантных относительно присоединённого действия. Эта теорема связывает эйлерову характеристику пучка с гауссовыми степенями компонент его характеристического цикла. Как следствие я получаю, что эйлерова характеристика извращённого пучка, эквивариантного относительно присоединённого действия неотрицательна.

Во второй части, я модифицирую одно из классических определений классов Черна, чтобы построить некомпактные аналоги классов Черна для эквивариантных векторных расслоений на редуктивных группах. Эти

классы Черна имеют те же свойства, что и обычные классы Черна. С помощью классов Черна касательного расслоения, мною получена формула присоединения для эйлеровой характеристики гиперповерхностей в произвольных редуктивных группах.

Общей чертой результатов и конструкций, полученных в моей диссертации, является использование действия группы для переноса на некомпактную ситуацию таких классических результатов как теорема Гаусса-Бонне и формула присоединения.

Благодарности

Я очень благодарна моим научным руководителям Аскольду Хованскому и Михаилу Капранову за многочисленные полезные обсуждения. Я также признательна моему оппоненту Александру Браверману за чтение моей диссертации и написание отзыва. Для меня были ценны обсуждения с Кьюмарсом Каве по темам моей диссертации.

Я хочу поблагодарить секретаря аспирантуры Айду Булат за её постоянную помощь и университет Торонто за финансовую поддержку во время моего обучения в аспирантуре.

Содержание

Глава 1

Введение и главные результаты

Теорема Гаусса-Бонне для редуктивных групп. Классическая теорема Гаусса–Бонне утверждает, что эйлерова характеристика компактной ориентируемой гиперповерхности в $\mathbb{R}^n$ совпадает с точностью до знака со степенью её отображения Гаусса. Для произвольной алгебраической группы и возможно некомпактного подмногообразия в ней можно также определить отображение Гаусса, используя параллельный перенос, заданный групповым умножением. Естественно спросить, совпадает ли степень такого отображения Гаусса с эйлеровой характеристикой. Й. Францкий и М. Капранов доказали, что это справедливо для комплексных подмногообразий комплексного тора $(\mathbb{C}^*)^n$ и, более общо, для конструктивных пучков на торе. Однако их результат перестаёт быть верным для произвольных конструктивных пучков на некоммутативной алгебраической группе. Капранов высказал гипотезу, что это всё же верно для конструктивных пучков на редуктивных группах при условии, что мы рассматриваем только пучки эквивариантные относительно присоединённого действия. Я доказала эту гипотезу.

Точная формулировка такая. Пусть G комплексная редуктивная группа, и пусть $\mathcal{F}$ конструктивный комплекс пучков на G. Для подмногообразия $X \subset G$, обозначим за $\mathrm{gdeg}(X)$ *гауссову степень* подмногообразия X. Она равна числу нулей общей лево-инвариантной дифференциальной 1-формы на G, ограниченной на X. Легко показать, что гауссова степень корректно определена [7, 8]. К примеру, гауссова степень гиперповерхности равна степени её отображения Гаусса.

Теорема 1.1. [27] *Если $\mathcal{F}$ эквивариантен относительно присоединённого действия группы G, то его эйлерова характеристика может быть посчитана с помощью характеристического цикла $\sum c_\alpha \overline{\mathrm{T}^*_{X_\alpha} G}$ по такой формуле*

$$\chi(G, \mathcal{F}) = \sum c_\alpha \mathrm{gdeg}(X_\alpha),$$

где коэффициенты c_α — это кратности характеристического цикла.

Другими словами, эйлерова характеристика пучка равна индексу пересечения характеристического цикла с графиком общей лево-инвариантной 1-формы на группе Отображение Гаусса даёт определение такого индекса пересечения в некомпактной ситуации. В этой форме Теорема 1.1 очень похожа на хорошо известную теорему Каширвары об индексе, которая выполняется для компактных многообразий.

Теорема 1.1 связывает две геометрических инварианта пучка: эйлерову характеристику и характеристический цикл. В некоторых случаях эта связь может быть использована для оценки одного из этих инвариантов, если второй известен (см. Следствие 1.3). Это особенно хорошо работает, если пучок $\mathcal{F}$ — извращённый (см. Следствие 1.2). В этом случае кратности c_α характеристического цикла неотрицательны.

Теорема 1.1 предоставляет инструмент для классификации извращённых пучков, эквивариантных относительно присоединённого действия, с заданной эйлеровой характеристикой. Например, если эйлерова характеристика мала, то характеристический цикл не может иметь компонент с большой гауссовой степенью. Это даёт некоторые существенные ограничения на характеристический цикл. Один из моих планов на будущее — изучить геометрию подмногообразий с данной гауссовой степенью и дать геометрическое описание извращённых пучков с данной эйлеровой характеристикой. Меня особенно интересуют извращённые пучки с эйлеровой характеристикой 1. Когда G — комплексный тор, такие пучки (если они неприводимы) можно отождествить с комплексами решений обобщённых гипергеометрических систем [11]. Неприводимые гиперповерхности в $(\mathbb{C}^*)^n$ гауссовой степени 1 можно отождествить с дискриминантными гиперповерхностями обобщённых гипергеометрических функций [19].

Теорема 1.1 также может быть использована для получения оценки снизу на эйлерову характеристику извращённого пучка. В частности, поскольку гауссова степень всегда неотрицательна по своему определению, Теорема 1.1 сразу даёт такое следствие.

Следствие 1.2. [27] *Если $\mathcal{F}$ извращённый пучок эквивариантный относительно присоединённого действия, то его эйлерова характеристика неотрицательна.*

В случае, когда G — комплексный тор, это утверждение доказали Ф. Лоезер и С. Сабба с использованием теории $\mathcal{D}$-модулей [33]. Другое доказательство дали О. Габбер и Ф. Лоезер для l-адических извращённых пучков [11]. В случае произвольной редуктивной группы из результата А. Бравермана это утверждение следует для специального класса пучков эквивариантных относительно присоединённого действия [1].

Главный пример извращенного пучка даётся сдвинутым комплексом цепей Горески-МакФёрсона на замкнутом подмногообразии $X \subset G$. Предположим, что X инвариантно относительно присоединённого действия. Тогда Следствие 1.2 говорит, что эйлерова характеристика многообразия X, посчитанная с помощью когомологий Горески-МакФёрсона имеет знак $(-1)^{\dim X}$ (из-за сдвига).

Эквивариантные относительно присоединённого действия пучки, естественным образом возникающие в теории представлений иногда имеют очень специальные характеристические циклы. Например, это имеет место для характерных пучков, введённых Люстигом [36]. Для характерных пучков, Теорема 1.1 немедленно даёт, что их эйлерова характеристика равна нулю. Я также доказала следующее обобщение этого классического результата.

Следствие 1.3. *Если носитель характеристического цикла пучка $\mathcal{F}$ принадлежит множеству неполупростых элементов группы G, то эйлерова характеристика пучка $\mathcal{F}$ равна нулю.*

Теорема 1.1, сформулированная для стратифицированного подмногообразия $X \subset G$, связывает эйлерову характеристику многообразия X с эйлеровой характеристикой комплексных линков к стратам. Пусть $X = \bigsqcup X_\alpha$ — стратификация Уитни подмногообразия X. Обозначим за e_α эйлерову характеристику комплексного линка к страту X_α. Это число измеряет особость подмногообразия X вдоль страта X_α. Например, если X_α содержит только неособые точки подмногообразия X, то e_α равно 1. Если X_α открыто и плотно в X, положим $\mathrm{e}_\alpha = 0$

Следствие 1.4. *Если $X \subset G$ — замкнутое подмногообразие инвариантное относительно присоединённого действия, то топологическая эйлерова характеристика подмногообразия X может быть посчитана таким образом*

$$\chi(X) = \sum (-1)^{\dim X_\alpha} (1 - \mathrm{e}_\alpha) \mathrm{gdeg}(X_\alpha).$$

В частности, если X гладко, то $\chi(X) = (-1)^{\dim X} \mathrm{gdeg}(X)$, что является некомпактным аналогом теоремы Гаусса-Бонне. Это также напоминает классическую теорему Хопфа, которая утверждает, что эйлерова характеристика компактного ориентируемого C^∞-многообразия M равна $(-1)^{\dim M}$ умножить на число нулей общей 1-формы на M, посчитанных со знаками.

Классы Черна и эйлерова характеристика гиперплоского сечения. Во второй части моей диссертации я строю некомпактные аналоги классов Черна для редуктивных групп и использую их в следующей задаче. Рассмотрим конечномерное представление $\pi : G \to \mathrm{End}(V)$ редуктивной группы G на векторном пространстве V. Задача — найти эйлерову характеристику $\chi(\pi)$ общего гиперплоского счения образа $\pi(G)$ в пространстве $\mathrm{End}(V)$. Эта задача тесно связана с обобщёнными гипергеометрическими функциями. Давайте обсудим эту связь.

Обобщённые гипергеометрические функции могут быть описаны как решения некоторых голономных систем линейных уравнений в частных производных, связанных с представлениями редуктивных групп. Для комплексного тора, такие системы изучали И. Гельфанд, М. Капранов, А. Зелевинский. Позже Капранов определили их для произвольных редуктивных групп. [20]. Конечномерное представление $\pi : G \to \mathrm{End}(V)$ редуктивной группы G на векторном пространстве V позволяет построить семейство таких систем. Пусть $\mathcal{D}$ — общая система из этого семейства. В случае тора, число линейно независимых решений системы $\mathcal{D}$ равно степени $\deg(\pi)$ образа группы G в $\mathrm{End}(V)$ [13]. Для других редуктивных групп вопрос открыт.

Одна из главных черт обобщённых гипергеометрических функций — представимость интегралами Эйлера. Например, для классических гипергеометрических функций это позволяет нам построить глобальные решения и найти группу монодромии. В случае тора, число линейно независимых решений системы $\mathcal{D}$, представимых интегралами Эйлера, равно с точностью до знака эйлеровой характеристике $\chi(\pi)$ общего гиперплоского сечения образа $\pi(G)$ в пространстве $\mathrm{End}(V)$. В случае тора, тождество $|\chi(\pi)| = \deg(\pi)$ даёт, что эйлеровы интегралы порождают пространство всех решений [14, 12]. Кажется, что для других редуктивных групп можно построить в точности $|\chi(\pi)|$ линейно независимых интегралов Эйлера, удовлетворяющих системе $\mathcal{D}$. Таким образом, очень интересно было бы найти это число и связать его с числом всех линейно независимых решений.

Другая мотивировка приходит из красивой явной формулы для $\chi(\pi)$, в случае когда G — комплексный тор. В этом случае эйлерова характеристика $\chi(\pi)$ равна $(-1)^{\dim G-1} \cdot \deg(\pi)$ [24]. Степень $\deg(\pi)$ допускает изящное комбинаторное описание через объём весового многогранника представления. Этот результат принадлежит к серии теорем, доказанных Д.Бернштейном, А. Кушниренко и А. Хованским. Они выразили некоторые инварианты гиперповерхностей в $(\mathbb{C}^*)^n$ в терминах соответствующих многогранников Ньютона. Для произвольных редуктивных групп единственный результат в этом направлении — похожее комбинаторное описание индекса пересечения нескольких гиперплоских сечений, полученное

Б. Казарновским [23] и М. Брионом [2]. В частности, это позволяет вычислить степень $\deg(\pi)$ (которую можно рассматривать как индекс самопересечения гиперплоского сечения). Интересная интерпретация этого результата через объём многогранника Гельфанда–Цетлина была получена А. Окуньковым [38, 39].

Для других редуктивных групп эйлерова характеристика уже не равна степени. Даже для $SL_2(\mathbb{C})$ отвт уже сложнее [22]. Я доказала формулу, которая выражает эйлерову характеристику $\chi(\pi)$ через степени некоторых интересных подмногообразий группы G (см. Теорему 1.5).

Пытаясь вычислить эйлерову характеристику я обнаружила аналоги классов Черна редуктивной группы. Чтобы их построить я рассмотрела сферическое действие группы $G\times G$ на группе G левыми и правыми умножениями. Это действие даёт естественный класс линейных векторных полей на G, с помощью которого я определяю подмногообразия S_i двойственные "классам Черна". Обозначим за n и k размерность и ранк группы G, соответственно. Моя конструкция повторяет обычную конструкцию классов Черна через циклы вырождения векторных полей. Например, гиперповерхность S_1 состоит из всех точек, где n векторных полей линейно зависимы, S_2 состоит из всех точек, где первые $(n-1)$ векторное поле линейно зависимы и т.д. Я доказала, что подмногообразие S_i непусто только если $i \leq n-k$. К примеру, если G — тор, то все подмногообразия S_i пусты. В редуктивном случае, подмногообразия S_i отвечают за расхождение между эйлеровой характеристикой и степенью. А именно, выполняется следующий аналог формулы присоединения. Положим $S_0 = G$.

Теорема 1.5. *Эйлерова характеристика $\chi(\pi)$ общего гиперплоского сечения равна знакопеременной сумме степеней подмногообразий $\pi(S_i)$:*

$$\chi(\pi) = \sum_{i=0}^{n-k}(-1)^{n-i-1}\deg\,\pi(S_i).$$

Ясно, что если G — тор, то остаётся только первое слагаемое в сумме, и формула даёт правильный ответ.

Формула из Теоремы 1.5 очень похожа на формулу присоединения, которая выражает класс Эйлера дивизора на компактном многообразии через классы Черна многообразия. В действительности, есть связь между подмногообразиями S_i и классами Черна эквивариантных компактификаций группы G[1].

Я также определяю классы Черна для всех векторных расслоений на G, эквивариантных относительно действия группы $G\times G$ (касательное расслоение — пример такого расслоения). Их конструкция полностью аналогична конструкции упомянутой выше. Она даёт корректно определённые элементы в кольце условий группы G, введённом Де Кончини и Прочези [5, 3]. Это кольцо — аналог кольца когомологий, и было первоначально создано для решения задач исчислительной геометрии.

Интересная задача — найти явный комбинаторный ответ для степеней классов Черна в духе теоремы Бриона–Казарновского[2]. Пока мне удалось

[1] *Примечание автора, добавленное при переводе*: Уже после защиты диссертации, в работе [28] я обобщила формулу присоединения из Теоремы 1.5 с гиперповерхностей на полные пересечения произвольной размерности, используя эту связь.

[2] *Примечание автора, добавленное при переводе*: В работе [29] мною были получены явные комбинаторные формулы для степеней классов Черна через весовые многогранники. В сочетании с доказанной мною ранее формулой присоединения [28], это позволило мне получить явную формулу для эйлеровой характеристики полных пересечений произвольной размерности в произвольной редуктивной группе, обобщающую аналогичные формулы Бернштейна–Кушниренко–Хованского (полные пересечения в комплексном торе) и формулу Бриона–Казарновского (нуль-мерные полные пересечения в произвольной редуктивной группе). В настоящее время, я занимаюсь дальнейшим обобщением теории многогранников Ньютона на редуктивные группы [30, 31]

найти степени первого и последнего (нетривиального) класса Черна.

Глава 2

Теорема Гаусса-Бонне для конструктивных пучков на редуктивных группах

2.1 Введение

В этой главе, мы докажем аналог формулы Гаусса-Бонне для конструктивных пучков на редуктивных группах. Эта формула справедлива для всех конструктивных пучков, эквивариантных относительно присоединённого действия, и выражает эйлерову характеристику пучка через его характеристический цикл. Как следствие мы получим, что если извращённый пучок на редуктивной группе эквивариантен относительно присоединённого действия, то его эйлерова характеристика неотрицательна.

Теперь мы дадим основные определения, а потом сформулируем главный результат.

В дальнейшем, под конструктивным комплексом мы всегда будем иметь в виду ограниченный комплекс пучков $\mathbb{C}$-векторных пространств, пучки когомологий которого конструктивны относительно некоторой конечной алгебраической стратификации (см. [21]). Для любого конструктивного комплекса $\mathcal{F}$ на гладком комплексном многообразии X можно определить следующие геометрические инварианты: глобальную эйлерову характеристику $\chi(X, \mathcal{F})$ и характеристический цикл $CC(\mathcal{F})$.

Глобальная эйлерова характеристика $\chi(X, \mathcal{F})$ определена как эйлерова характеристика комплекса групп когомологий $H^i(X, \mathcal{F})$. Последние получаются применением производного функтора глобальных сечений к пучку $\mathcal{F}$ (см. [21]).

Существует морфизм из производной категории конструктивных комплексов на гладком комплексном многообразии X в группу лагранжевых циклов в кокасательном расслоении T^*X (см. [21, Section 9.4]). Характеристический цикл $CC(\mathcal{F})$ конструктивного комплекса $\mathcal{F}$ — это образ комплекса $\mathcal{F}$ при таком морфизме.

Конструктивный комплекс $\mathcal{F}$ на X называется извращённым пучком, если он удовлетворяет следующим свойствам. Во-первых, локальные когомологии $H^i(\mathcal{F}_x)$ имеют носитель размерности не больше чем $-i$. Во-вторых, локальные когомологии $H^i_c(\mathcal{F}_x)$ с компактным носителем имеют носитель размерности не больше чем i [21, 18, 35].

Теперь мы сформулируем главные результаты. Пусть G — произвольная комплексная редуктивная группа, и пусть $\mathcal{F}$ — конструктивный комплекс на G. Характеристический цикл пучка $\mathcal{F}$ является линейной комбинацией лагранжевых подмногообразий $CC(\mathcal{F}) = \sum c_\alpha \mathrm{T}^*_{X_\alpha}G$. Здесь и далее, за $\mathrm{T}^*_X G$ обозначим замыкание конормального расслоения на множестве гладких точках подмногообразия $X \subset G$. С подмногообразием X можно связать неотрицательное число $\mathrm{gdeg}(X)$, называемое *гауссовой* *степенью* подмногообразия X. Оно равно числу нулей общей левоинвариантной дифференциальной 1-формы на G, ограниченной на X. Точное определение гауссовой степени и отображения Гаусса даны в разделе 2.2.

Теорема 2.1. *Если $\mathcal{F}$ эквивариантен относительно присоединённого действия группы G, то его эйлерова характеристика может быть вычислена в терминах его характеристического цикла по следующей формуле:*

$$\chi(G, \mathcal{F}) = \sum c_\alpha \mathrm{gdeg}(X_\alpha).$$

Для извращённого пучка, кратности c_α его характеристического цикла неотрицательны [15]. Гауссовы степени подмногообразий X_α также неотрицательны по своему определению, см. ниже. Поэтому Теорема 2.1 немедленно даёт такое важное следствие.

Следствие 2.2. *Если $\mathcal{F}$ — извращённый пучок, эквивариантный относительно присоединённого действия группы G, то его эйлерова характеристика неотрицательна.*

В частности, пусть $\underline{\mathbb{C}}_X$ — постоянный пучок на подмногообразии $X \subset G$, продолженный нулём на G. Применяя вышеизложенные результаты к этому пучку, мы получаем такое следствие.

Следствие 2.3. *Если $X \subset G$ замкнутое гладкое подмногообразие инвариантное относительно присоединённого действия группы G, то $\chi(X) = (-1)^{\dim X} \mathrm{gdeg}(X)$. Таким образом, число $(-1)^{\dim X}\chi(X)$ неотрицательно.*

Действительно, характеристический цикл пучка $\underline{\mathbb{C}}_X$ coincides with $(-1)^{\dim X} \mathrm{T}^*_X G$. Есть аналогичная формула для эйлеровой характеристики любого замкнутого (не обязательно гладкого) подмногообразия, инвариантного относительно присоединённого действия (Следствие 2.18).

Другое следствие доказывает обращение в нуль эйлеровой характеристики пучка $\mathcal{F}$ в случае, когда носитель характеристического цикла пучка $\mathcal{F}$ лежит во множестве неполупростых элементов группы G (Следствие 2.19). Например, характеристические циклы характерных пучков Люстига удовлетворяют этому свойству.

В случае, когда $G = (\mathbb{C}^*)^n$ — тор, Следствие 2.2 впервые доказали Ф. Лоезер и С. Сабба [33], другое доказательство дали О. Габбер и Ф. Лоезер [11]. В случае произвольных редуктивных групп, А. Браверман доказал неотрицательность эйлеровой характеристики для некоторого класса Ad G-эквивариантных l-адических пучков в конечной характеристике [1]. Над комплексным полем его результат даёт Следствие 2.2 в случае, когда извращённый пучок совпадает со своим продолжением Деліня-Горески-МакФёрсона со множества регулярных полупростых элементов группы G.

Теорема 2.1 была доказана в торическом случае Й. Франецким и М. Капрановым [8]. Формула из Теоремы 2.1 верна для всех конструктивных пучков на торе. Однако, она перестаёт быть верной для произвольных пучков на некоммутативной алгебраической группе. Есть простой контрпример [8] (см. также раздел 2.2). Капранов высказал гипотезу, что формула остаётся верной для конструктивных пучков на редуктивных группах, если мы рассмотрим только пучки, эквивариантные относительно присоединённого действия. Я доказала эту гипотезу [27].

Главный шаг в доказательстве Теоремы 2.1 — свести задачу к случаю максимального тора $T \subset G$. Поскольку пучок $\mathcal{F}$ является Ad G-эквивариантным, он конструктивен по отношению к некоторой стратификации Уитни $\mathcal{S}$ с Ad G-инвариантными стратами. В разделе 2.3 мы докажем, что эйлерова характеристика страта $X \in \mathcal{S}$ совпадает с эйлеровой характеристикой пересечения $X \cap T$. Из этого следует, что пучок $\mathcal{F}$, ограниченный на максимальный тор T, имеет ту же эйлерову характеристику что и $\mathcal{F}$. В разделе 2.2 мы напомним некоторые факты об эйлеровой характеристике необходимые для доказательства. В разделе 2.4 мы докажем, что гауссовы степени подмногообразий X и $X \cap T$ совпадают.

Чтобы работать с характеристическим циклом мы используем формулу Дабсона-Каширвары об индексе, которая выражает кратности c_α через локальную эйлерову характеристику пучка $\mathcal{F}$ вдоль каждого страта и некоторую топологическую информацию, зависящую только от стратификации (раздел 2.2). Эта информация даётся эйлеровыми характеристиками с компактным носителем комплексных линков. В нашем случае можно выбрать комплексный линк так, чтобы он был инвариантен относительно действия некоторого комактного тора, и таким образом упростить вычисление его эйлеровой характеристики. Этот подход заимствован из [6]. В разделе 2.5 мы докажем, что для любого страта $X_\beta \in \mathcal{S}$ и любого полупростого страта $X_\alpha \in \mathcal{S}$, такого что $X_\alpha \subset \overline{X_\beta}$, эйлерова характеристика с компактным носителем их комплексного линка совпадает с эйлеровой характеристикой с компактным носителем комплексного линка стратов $X_\alpha \cap T$ и $X_\beta \cap T$. Это позволяет смотреть на формулу из Теоремы 2.1 как на такую же формулу для ограничения пучка $\mathcal{F}$ на T (раздел 2.6). Затем мы применяем результат из [8].

2.2 Предварительные сведения

Гауссова степень. Сейчас мы определим (левое) отображение Гаусса и гауссову степень. Материалы этого подраздела взяты из [8]. Дополнительные подробности можно найти в [8, 7].

Пусть G — комплексная алгебраическая группа с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$, и пусть X — подмногообразие размерности k в группе. Обозначим за $\mathrm{G}(k,\mathfrak{g})$ грассманниан k-мерных подпространств в $\mathfrak{g}$. Для каждой точки $x \in G$, есть естественный изоморфизм между касательными пространствами T_xG и $\mathfrak{g}$, заданный умножением слева на x^{-1}:

$$L_x : y \mapsto x^{-1}y; \quad d_xL_x : \mathrm{T}_xG \to \mathfrak{g}.$$

Левое отображение Гаусса $\Gamma_X : X \to \mathrm{G}(k,\mathfrak{g})$ определяется так:

$$\Gamma_X(x) = d_xL_x(\mathrm{T}_xX).$$

Отображение Гаусса рационально и регулярно на множестве гладких точек X^{sm} подмногообразия X. Если X — гиперповерхность, то Γ_X отображает X в $\mathbb{P}(\mathfrak{g}^*)$, то есть в многообразие той же размерности, что и X. В этом случае мы определим гауссову степень подмногообразия X как степень его отображения Гаусса. Под степенью рационального отображения $X \to Y$ мы имеем в виду число прообразов общей точки в Y (см. [37, Proposition 3.17]). В общем случае, гауссова степень — это степень рационального отображения $\tilde{\Gamma}_X : \tilde{X} \to \mathbb{P}(\mathfrak{g}^*)$, где $\tilde{X}$ и $\tilde{\Gamma}_X$ определяются так. Многообразие $\tilde{X}$ — расслоение над X^{sm}, слой которого в точке x состоит из всех гиперплоскостей в $\mathfrak{g}$, содержащих подпространство $\Gamma_X(x)$, то есть $\tilde{X} = \{(x,y) \in X^{sm} \times \mathbb{P}(\mathfrak{g}^*) : \Gamma_X(x) \subset y\}$. Тогда $\tilde{\Gamma}_X(x,y) = y$. Заметим, что $\tilde{X}$ и $\mathbb{P}(\mathfrak{g}^*)$ имеют одинаковые размерности. Из определения ясно, что гауссова степень — бирациональный инвариант подмногообразия.

В дальнейшем мы будем использовать другое описание гауссовой степени. Пусть ω — общая лево-инвариантная дифференциальная 1-форма на G (для редуктивных групп мы определим общую 1-форму явно в разделе 2.4). Назовём точку $x \in X$ *нулём* формы ω, если ω, ограниченная на касательное пространство T_xX, тождественно равна нулю. Тогда легко проверить, что гауссова степень подмногообразия X равна числу нулей формы ω на X.

Контрпример. Теперь мы покажем, что утверждение Теоремы 2.1 перестаёт быть верным, если опустить либо предположение эквивариантности относительно присоединённого действия, либо предположение, что группа G редуктивна. Следующий контрпример взят из [8]. Любая некоммутативная комплексная линейная алгебраическая группа G содержит подгруппу X изоморфную аффинному пространству $\mathbb{C}^k$ для некоторого $k > 0$. Например, можно взять максимальную унипотентную подгруппу. Из определения гауссовой степени следует, что гауссова степень любой подгруппы положительной размерности равна нулю. Действительно, общая лево-инвариантная 1-форма на G, ограниченная на подгруппу, совпадает с ненулевой лево-инвариантной 1-формой на этой подгруппе. Поэтому, она нигде не обращается в нуль. Следовательно, $\mathrm{gdeg}(X) = 0$, но при этом эйлерова характеристика подмногообразия X равна 1.

Если G не редуктивна, то подгруппу X с вышеназванным свойством можно выбрать так, чтобы она была инвариантна относительно присоединённого действия. А именно, радикал группы G в этом случае не диагонализуем, поэтому максимальная унипотентная подгруппа радикала не тривиальна. Она инвариантна относительно присоединённого действия.

Эйлерова характеристика. Пусть T — тор (это может быть как комплексный тор $(\mathbb{C}^*)^n$, так и компактный тор $(S^1)^n$). Рассмотрим его линейное алгебраическое действие на $\mathbb{C}^N$, и рассмотрим локально замкнутое полуалгебраическое подмножество $X \subset \mathbb{C}^N$, инвариантное относительно этого действия. Пусть $X^T \subset X$ — множество неподвижных точек. В дальнейшем, χ обозначает обычную топологическую эйлерову характеристику, а χ^c — эйлерову характеристику, посчитанную с использованием когомологий с компактным носителем. Следующий простой и хорошо известный факт будет в последующем играть ключевую роль.

Предложение 2.4. *Пространства X и X^T имеют одну и туже эйлерову характеристику с компактным носителем*

$$\chi^c(X) = \chi^c(X^T). \qquad \square$$

Следующее утверждение также хорошо известно, но автор не смог найти подходящей ссылки, поэтому приводит доказательство.

Предложение 2.5. *Пусть X — комплексное алгебраическое многообразие, тогда $\chi^c(X) = \chi(X)$.*

Доказательство. Применив Предложение 2.6 к постоянному пучку $\underline{\mathbb{C}}_X$ и используя аддитивность эйлеровой характеристики с компактным носителем, можно вывести это тождество из следующего факта. Для любой точки $x \in X$ эйлерова характеристика с компактным носителем достаточно маленькой открытой окрестности точки x равна 1. Чтобы доказать этот факт, мы используем индукцию по размерности многообразия X.

Мы можем считать, что некоторая окрестность точки x вложена в $\mathbb{C}^N$. Возьмём общую голоморфную функцию f on X, такую что $f(x) = 0$, и открытую окрестность $C = f^{-1}(D) \cap B$, где $D \subset \mathbb{C}$ — достаточно маленький открытый диск с центром в 0, а $B \subset \mathbb{C}^N$ — достаточно маленький шар с центром в x. Тогда $f : C \setminus f^{-1}(0) \to D \setminus \{0\}$ — расслоение (см. [16, Раздел 2.4]). Тогда $\chi^c(C \setminus f^{-1}(0)) = 0$, и $\chi^c(C) = \chi^c(f^{-1}(0))$. Рамерность слоя $f^{-1}(0)$ уже меньше чем размерность многообразия X. $\square$

Эйлерова характеристика пучков. Мы теперь напомним формулу для эйлеровой характеристики конструктивных пучков на многообразиях. Пусть $X \subset \mathbb{C}^N$ — гладкое подмногообразие, и пусть $\mathcal{F}$ — конструктивный комплекс на X. С каждой точкой $x \in X$ можно связать локальную эйлерову характеристику $\chi(\mathcal{F}_x)$ пучка $\mathcal{F}$ в этой точке (см. [21, Раздел 9.1]). Таким образом, по $\mathcal{F}$ можно определить конструктивную функцию $\chi(\mathcal{F})$ на X формулой $\chi(\mathcal{F})(x) = \chi(\mathcal{F}_x)$.

Есть понятие прямого образа конструктивной функции (см. [9] и [21, Раздел 9.7]). Прямой образ определён для любого морфизма алгебраических многообразий $X \to Y$ и конструктивной функции на X. Мы используем более наглядное обозначение $\int_X f(x)d\chi$ для прямого образа функции f при морфизме $X \to pt$, так-как прямой образ можно также определить как интеграл функции f по эйлеровой характеристике [41, 25].

Предложение 2.6. *Глобальная эйлерова характеристика* $\chi(X, \mathcal{F}) = \sum(-1)^i H^i(X, \mathcal{F})$ *равна следующему интегралу по эйлеровой характеристике*

$$\chi(X, \mathcal{F}) = \int_X \chi(\mathcal{F})d\chi.$$

Другими словами, если мы зафиксируем конечную алгебраическую стратификацию $X = \bigsqcup X_\alpha, \alpha \in \mathcal{S}$, *такую что функция* $\chi(\mathcal{F})$ *постоянна вдоль каждого страта, мы получим*

$$\chi(X, \mathcal{F}) = \sum_{\alpha \in \mathcal{S}} \chi_\alpha(\mathcal{F})\chi^c(X_\alpha),$$

где $\chi_\alpha(\mathcal{F})$ *— значение функции* $\chi(\mathcal{F})$ *в какой-нибудь точке страта* X_α.

Доказательство можно найти в [21, Раздел 9.7].

Комплексные линки и характеристические циклы. Мы используем обозначения предыдущего подраздела. Предположим, что $\mathcal{S}$ — стратификация Уитни многообразия X. Пусть $X_\alpha, X_\beta, \alpha, \beta \in \mathcal{S}$ — два страта, такие что $X_\alpha \subset \overline{X_\beta}$. Выберем точку $a \in X_\alpha$ и любой нормальный срез $N \subset X$ к X_α в точке a. Рассмотрим голоморфную функцию l на N, такую что $l(a) = 0$, и её дифференциал $d_a l$ — общий ковектор в кокасательном пространстве $\mathrm{T}^*_a N$ (то есть $d_a l$ принадлежит некоторому открытому плотному подмножеству этого пространства, которое зависит от стратификации $\mathcal{S}$). Пусть $h(\cdot,\cdot)$ — эрмитова метрика в $\mathbb{C}^N$ и $B = \{x \in \mathbb{C}^N : h(x-a, x-a) \leq const\}$ — достаточно маленький шар с центром в a.

Определим комплексный линк L стратов X_α, X_β как $L = B \cap l^{-1}(\varepsilon) \cap X_\beta$. Если радиус шара B достаточно мал, и абсолютная величина ε достаточно мала по сравнению с радиусом, то результат с точностью до гомеоморфизма не зависит ни от одного из сделанных выборов (доказательство см. в [16, Раздел 2.3]). Мы используем обозначение $\mathrm{e}(\alpha, \beta)$ так же как и $\mathrm{e}(X_\alpha, X_\beta)$ для эйлеровой характеристики с компактным носителем линка L. Положим также $\mathrm{e}(\alpha, \alpha) = -1$.

В разделе 2.7, мы также используем понятие полного комплексного линка страта X_α. В предыдущих обозначениях он определеляется как $B \cap l^{-1}(\varepsilon) \cap X$. Другими словами, он является объединением комплексных линков стратов X_α и X_β по всем стратам X_β, чьё замыкание содержит X_α. Обозначим эйлерову характеристику полного комплексного линка страта X_α за e_α.

Числа $\mathrm{e}(\alpha, \beta)$ нужны для вычисления кратностей характеристического цикла $CC(\mathcal{F})$. Кратности можно восстановить из конструктивной функции $\chi(\mathcal{F})$ по следующей теореме Дабсона и Кашивары.

Теорема 2.7. *Характеристический цикл пучка $\mathcal{F}$ — это линейная комбинация лагранжевых подмногообразий $\mathrm{T}^*_{X_\alpha}X, \alpha \in \mathcal{S}$ с коэффициентами*

$$c_\alpha = (-1)^{\dim X_\alpha + 1} \sum_{X_\alpha \subset \overline{X_\beta}} \mathrm{e}(\alpha, \beta)\chi_\beta(\mathcal{F}).$$

Доказательство см. в [15, Theorem 8.2].

2.3 Эйлерова характеристика инвариантных подмногообразий

Пусть G — связная редуктивная группа над $\mathbb{C}$, и пусть T — максимальный тор в G. Рассмотрим подмногообразие $X \subset G$ инвариантное относительно присоединённого действия группы G.

Предложение 2.8. *Многообразия X и $X \cap T$ имеют одинаковую эйлерову характеристику с компактным носителем. Более того, $\chi(X) = \chi(X \cap T)$.*

Доказательство. Подмногообразие X инвариантно относительно присоединённого действия группы G. В частности, оно инвариантно относительно присоединённого действия максимального тора T. Множество $G^T \subset G$ неподвижных точек этого действия совпадает с T, так-как централизатор максимального тора совпадает с самим максимальным тором. Поэтому по Предложению 2.4 многообразия X и $X \cap T$ имеют одинаковую эйлерову характеристику с компактным носителем. Комбинируя это с Предложением 2.5, получаем что $\chi(X) = \chi(X \cap T)$. □

Пример 1. Пусть $X = \mathcal{O}_a$ — орбита элемента $a \in G$ при присоединённом действии группы G. Тогда из Предложения 2.8 следует, что если a полупрост, то $\chi(\mathcal{O}_a)$ равно числу точек в пересечении $\mathcal{O}_a \cap T$. Мы можем выбрать максимальный тор T, такой что $a \in T$. Поскольку орбита a при действии группы Вейля W на T совпадает с $\mathcal{O}_a \cap T$, мы получаем, что $\chi(\mathcal{O}_a) = |W|/|Stab\ a|$, где $Stab\ a \subset W$ — стабилизатор элемента a в W. Если a не полупрост, то $\chi(\mathcal{O}_a) = 0$.

Пусть $\mathcal{F}$ — конструктивный комплекс на G.

Предложение 2.9. *Предположим, что $\mathcal{F}$ эквивариантен относительно присоединённого действия группы G. Пусть $\mathcal{F}_T$ — ограничение пучка $\mathcal{F}$ на $T \subset G$. Тогда $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}_T$ имеют одинаковую эйлерову характеристику:*

$$\chi(G, \mathcal{F}) = \chi(T, \mathcal{F}_T).$$

Доказательство. Пучки $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}_T$ имеют одинаковую локальную эйлерову характеристику в точке $x \in T$, поскольку $\mathcal{F}_T$ — ограничение $\mathcal{F}$ на T. Поэтому эйлерова характеристика $\chi(T, \mathcal{F}_T)$ равна $\int_T \chi(\mathcal{F}) d\chi$ по Предложению 2.6. Функция $\chi(\mathcal{F})$ инвариантна относительно присоединённого действия группы G, и Предложение 2.8 влечёт

$$\int_T \chi(\mathcal{F}) d\chi = \int_G \chi(\mathcal{F}) d\chi.$$

Последний интеграл равен эйлеровой характеристике $\chi(G, \mathcal{F})$ по Предложению 2.6. $\square$

2.4 Гауссова степень инвариантных подмногообразий

Теперь мы сравним гауссовы степени подмногообразия X в G и подмногообразия $X \cap T$ в T. Ясно, что гауссова степень k-мерного подмногообразия равна сумме гауссовых степеней его k-мерных неприводимых компонент.

Поэтому мы можем предположить, что X неприводимо. Есть два случая: множество всех неполупростых элементов в X имеет коразмерность либо 0, либо по крайней мере 1. В дальнейшем мы докажем, что в первом случае $\mathrm{gdeg}(X) = 0$, а во втором случае $\mathrm{gdeg}(X) = \mathrm{gdeg}(X \cap T)$. В частности, гауссова степень любой орбиты $\mathcal{O}_a \subset G$ совпадает с гауссовой степенью её пересечения с максимальным тором T.

Любая редуктивная группа G допускает вложение в $GL_N(\mathbb{C})$ для некоторого N, такое что билинейная форма $\mathrm{tr}(Y_1Y_2)$ невырожденна на алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Фиксируем такое вложение. Тогда $\mathfrak{g}$ можно отождествить с пространством всех лево-инвариантных дифференциальных 1-форм на G: элемент $S \in \mathfrak{g}$ определяет 1-форму ω формулой

$$\omega(Y) = \mathrm{tr}(x^{-1}YS), \tag{1}$$

где $x \in G$ и $Y \in \mathrm{T}_xG$. Мы назовём такую форму *общей*, если S регулярен и полупрост.

Лемма 2.10. *Все общие лево-инвариантные 1-формы образуют открытое плотное подмножество в пространстве всех лево-инвариантных форм.*

Доказательство. Все регулярные полупростые элементы образуют открытое всюду плотное подмножество в $\mathfrak{g}$. Утверждение леммы из этого следует. □

Предложение 2.11. *Гауссова степень орбиты $\mathcal{O}_a$ равна числу точек в пересечении $\mathcal{O}_a \cap T$. В частности, если a — неполупростой элемент, то* $\deg(\mathcal{O}_a) = 0$.

Доказательство. Рассмотрим отображение

$$\varphi : G \to \mathcal{O}_a; \quad \varphi : g \mapsto gag^{-1}.$$

Поскольку φ гладко и сюръективно, касательное пространство $\mathrm{T}_x\mathcal{O}_a$ является образом при производном отображении $d\varphi$. Простое вычисление показывает, что $\mathrm{T}_x\mathcal{O}_a = [\mathfrak{g}, x]$. Пусть ω — общая лево-инвариантная дифференциальная 1-форма на G, заданная формулой (1). Тогда тот факт, что $\omega = 0$ на $\mathrm{T}_x\mathcal{O}_a$, эквивалентен тому, что $\mathrm{tr}(x^{-1}YxS - YS) = 0$ для всех $Y \in \mathfrak{g}$. Поскольку билинейная форма $\mathrm{tr}(Y_1Y_2)$ является $\mathrm{Ad}\, G$-инвариантной, получаем $\mathrm{tr}(x^{-1}YxS - YS) = \mathrm{tr}(Y(xSx^{-1} - S))$. Форма $\mathrm{tr}(Y_1Y_2)$ невырожденна на $\mathfrak{g}$. Поэтому x и S коммутируют, и x принадлежит некоторому максимальному тору T_S, зависящему от S. $\square$

Замечание 2.12. *Предположим, что элемент a лежит в максимальном торе T. Тогда пространство $\mathrm{T}_a\mathcal{O}_a = [\mathfrak{g}, a]$ ортогонально касательному пространству T_aT относительно билинейной формы $(Y_1, Y_2) \mapsto \mathrm{tr}(a^{-1}Y_1 \cdot a^{-1}Y_2)$. Поскольку эта форма невырожденна на T_aT, мы получаем, что в любой точке $x \in \mathcal{O}_a \cap T$ пересечение касательных пространств $\mathrm{T}_x\mathcal{O}_a$ и T_xT равно нулю.*

Следствие 2.13. *Пусть $Z \subset G$ — неприводимое подмногообразие инвариантное относительно присоединённого действия группы G, такое что множество Z_n всех неполупростых элементов в Z — открытое по Зарисскому непустое подмножество в Z. Тогда* $\deg(Z) = 0$.

Доказательство. Гауссова степень подмногообразия $Z \subset G$ является бирациональным инвариантом. Поэтому достаточно вычислить её для Z_n. Пусть ω — общая лево-инвариантная дифференциальная 1-форма на G, заданная формулой (1). Для любой гладкой точки $a \in Z_n$ ограничение этой формы на подпространство $\mathrm{T}_a\mathcal{O}_a \subset \mathrm{T}_aZ_n$ касательного пространства T_aZ_n уже не тождественный нуль по Предложению 2.11. Поэтому форма ω не равна тождественно нулю ни в одной гладкой точке подмногообразия

Z_n, и $\mathrm{gdeg}(Z) = \mathrm{gdeg}(Z_n) = 0$. □

Предложение 2.14. *Пусть X — неприводимое подмногообразие группы G инвариантное относительно присоединённого действия группы G, такое что подмножество всех неполупростых элементов в X имеет коразмерность по крайней мере 1 в X. Тогда гауссовы степени подмногообразия X в G и подмногообразия $X \cap T$ в T совпадают.*

Доказательство. Пусть k — максимальная возможная размерность полупростой орбиты в X. Обозначим за X_s множество всех полупростых элементов в X, орбиты которых имеют размерность k. Тогда X_s — открытое по Зарисскому подмножество в X. Рассмотрим отображение

$$\varphi : G \times (X \cap T) \to X, \quad (g, t) \mapsto gtg^{-1}.$$

Образ отображения φ содержит X_s. Поскольку X_s — открытое по Зарисскому непустое подмножество подмногообразия X, получаем $\deg(X) = \deg(X_s)$. Для любой гладкой точки $x \in X_s$ касательное пространство $\mathrm{T}_x X$ снова является образом производного отображения

$$d\varphi : \mathrm{T}_g G \times \mathrm{T}_t (X \cap T) \to \mathrm{T}_x X,$$

где $gtg^{-1} = x$. Вычислив $d\varphi$, получим, что $\mathrm{T}_x X = [\mathfrak{g}, x] \oplus g\mathrm{T}_t(X \cap T)g^{-1}$. Пусть ω — общая лево-инвариантная дифференциальная 1-форма на G, заданная формулой (1). Тогда $\omega = 0$ на $\mathrm{T}_x X$ эквивалентно тому, что $\omega = 0$ на $[\mathfrak{g}, x]$, и одновременно $\omega = 0$ на $g\mathrm{T}_t(X \cap T)g^{-1}$. Первое тождество выполняется если и только если x принадлежит максимальному тору T_S (см. доказательство Предложения 2.11). Обозначим за ω_T ограничение формы ω на T^*T_S. Если $x \in T_S$, то $g\mathrm{T}_t(X \cap T)g^{-1} = \mathrm{T}_x(X \cap T_S)$. Тогда форма ω обращается в нуль на $\mathrm{T}_x X$ если и только если ω_T обращается в нуль на

$\mathrm{T}_x(X \cap T_S)$. Следовательно, $\deg(X) = \deg(X \cap T_S) = \deg(X \cap T)$, поскольку все максимальные торы сопряжены. $\square$

2.5 Эйлерова характеристика комплексного линка

Теперь мы найдём эйлерову характеристику с компактным носителем комплексного линка для некоторого класса стратификаций группы G. Для любого $a \in G$ определим ранг элемента a как размерность его централизатора в G. Стратификация Уитни $\mathcal{S}$ группы G называется *допустимой* если выполняются следующие условия. Для любого $\alpha \in \mathcal{S}$

- страт X_α инвариантен относительно присоединённого действия группы G,
- элементы страта X_α либо все полупросты и имеют один и тот же ранг, либо все неполупросты.

Обозначим за $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}$ множество всех полупростых стратов. По второму условию и замечанию 2.12, для любого полупростого страта $X_\alpha \in \mathcal{S}$ пересечение $X_\alpha \cap T$ гладко, и в каждой точке $x \in X_\alpha \cap T$ пересечение касательных пространств $\mathrm{T}_x X_\alpha \cap \mathrm{T}_x T$ совпадает с касательным пространством $\mathrm{T}_x(X_\alpha \cap T)$. Поэтому мы можем рассмотреть индуцированную стратификацию Уитни $\mathcal{S}_T$ максимального тора T, а именно, $T = \bigsqcup (X_\alpha \cap T), \alpha \in \mathcal{S}_0$.

Предложение 2.15. *Рассмотрим два страта X_α и X_β, такие что X_α лежит в замыкании страта X_β. Если X_α полупрост, а X_β — нет, то* $\mathrm{e}(\alpha, \beta) = 0$. *Если X_α, X_β оба полупросты, то* $\mathrm{e}(\alpha, \beta) = \mathrm{e}(X_\alpha \cap T, X_\beta \cap T)$, *где комплексный линк стратов $X_\alpha \cap T$ и $X_\beta \cap T$ строится в торе T.*

Доказательство. Пусть $Z \subset G$ — централизатор элемента $a \in X_\alpha$. Тогда Z — также редуктивная группа. Поскольку касательные пространства $\mathrm{T}_a Z$ и $\mathrm{T}_a \mathcal{O}_a$ ортогональны относительно билинейной формы $(Y_1, Y_2) \mapsto \mathrm{tr}(a^{-1}Y_1 \cdot a^{-1}Y_2)$, и эта форма невырожденна на $\mathrm{T}_a Z$, мы получаем, что Z — нормальный срез к орбите $\mathcal{O}_a \subset X_\alpha$. Поэтому любой нормальный срез к $X_\alpha \cap Z$ в Z будет также нормальным срезом к X_α в G. Давайте построим нормальный срез $N \subset Z$ инвариантный относительно присоединённого действия группы Z.

Пусть k — размерность пересечения $X_\alpha \cap Z$. Некоторая окрестность точки a в $X_\alpha \cap Z$ лежит в центре группы Z, поскольку все элементы X_α имеют одинаковый ранг. Поэтому мы можем найти k характеров $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ группы Z, таких что их дифференциалы $d_a\varphi_1, \ldots, d_a\varphi_k$, ограниченные на касательное пространство $\mathrm{T}_a(X_\alpha \cap Z)$ линейно независимы. Пусть $N \subset Z$ — множество нулей системы уравнений $\varphi_1(za^{-1}) = \ldots = \varphi_k(za^{-1}) = 1$.

Пример 2. a) Пусть G — группа $GL_N(\mathbb{C})$, и пусть $X_\alpha = Z(GL_N) = \mathbb{C}^*$ — центр группы GL_N. Тогда $Z = G$, и все характеры группы Z являются степенями определителя. Имеем $d_e\det = \mathrm{tr}$ для единичного элемента $e \in GL_N$, и tr — ненулевая линейная функция на $\mathbb{C}^*e$. Поэтому в точке $e \in X_\alpha$ можно взять $N = SL_N(\mathbb{C})$.

b) Пусть G — любая редуктивная группа, и пусть X_α — страт, состоящий из регулярных полупростых элементов. Тогда Z — максимальный тор. Поэтому любой нормальный срез к $X_\alpha \cap Z$ в Z инвариантен относительно присоединённого действия группы Z.

Продолжим доказательство Предложения 2.15. Рассмотрим общую линейную функцию l на N, заданную формулой $l(x) = \mathrm{tr}((a^{-1}x - e)S)$, где $S \in \mathrm{Lie}\ Z$ регулярен и полупрост. Существует максимальный тор $T \subset Z$, коммутирующий с S. Поскольку a — полупрост, T также является максимальным торм в G. Для любого ε множество $l^{-1}(\varepsilon)$ инвариантно относительно присоединённого действия тора T. Обозначим за T_c компактную форму комплексного тора T. Выберем эрмитову форму $h(\cdot,\cdot)$ на $\mathfrak{gl}_N$ инвариантную относительно присоединённого действия компактного тора T_c и маленький шар $B = \{x \in \mathfrak{gl}_N : h(x-a, x-a) \leq const\}$.

Таким образом, с общим вектором $S \in \mathrm{Lie}\, Z$ мы связали комплексный линк $L = B \cap l^{-1}(\varepsilon) \cap X_\beta$ стратов X_α и X_β. Комплексный линк L инвариантен относительно присоединённого действия компактного тора T_c по построению. Поэтому по Предложению 2.8 получаем $\chi^c(L) = \chi^c(L^{T_c}) = \chi^c(L \cap Z^{T_c})$. Заметим, что $Z^{T_c} = Z^T = T$. Если X_β неполупрост, то $X_\beta \cap T$ пусто, поэтому и $L \cap T$ пусто. Следовательно, $\mathrm{e}(\alpha,\beta) = 0$ в этом случае. Если X_β полупрост, то $L \cap T$ — комплексный линк стратов $X_\alpha \cap T, X_\beta \cap T$ в торе T. $\square$

Следствие 2.16. *Если X — гладкое неприводимое подмногообразие инвариантное относительно присоединённого действия группы G, то либо X состоит только из неполупростых элементов, либо множество всех полупростых элементов в X плотно. В частности, если к тому же подмногообразие X замкнуто, то оно содержит открытое всюду плотное подмножество полупростых элементов. Гауссовы степени подмногообразий X и $X \cap T$ совпадают.*

Доказательство. Докажем первое утверждение от противного. Пусть $\mathcal{S}$ — допустимая стратификация группы G, подчинённая подмногообрзию X, и пусть $X_n \subset X$ — максимальный открытый страт в X, такой что X_n неполупрост. Тогда $\mathrm{dim} X_n = \mathrm{dim} X$, и $X - X_n$ содержит по крайней мере один полупростой страт X_s. Число $\mathrm{e}(X_s, X_n)$ равно нулю по Предложению 2.15. Это противоречит гладкости подмногообразия X. Комбинируя первое утверждение с результатами раздела 2.4, получаем последнее утверждение. $\square$

2.6 Доказательство Теоремы 2.1 (теоремы Гаусса-Бонне)

Если $\mathcal{F}$ конструктивен и эквивариантен относительно присоединённого действия, то существует конечная алгебраическая стратификация Уитни $\mathcal{S}$, подчинённая пучку $\mathcal{F}$, такая что каждый страт инвариантен относительно присоединённого действия. Подразбивая каждый страт при необходимости, мы можем сделать $\mathcal{S}$ допустимой. Применим Теорему 2.7 и Предложение 2.15 к характеристическому циклу пучков $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}_T$. Заметим, что для полупростого страта $X_\alpha \in \mathcal{S}$ разность $\dim X_\alpha - \dim(X_\alpha \cap \mathcal{S})$ равна $\dim \mathcal{O}_a, a \in X_\alpha$, то есть чётна. Как очевидное следствие получаем:

Следствие 2.17. *Пусть $X_\alpha \in \mathcal{S}$ — полупростой страт. Кратности характеристических циклов пучков $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}_T$ вдоль стратов X_α и $X_\alpha \cap T$, соответственно, совпадают.*

Пример 3. Предположим, что носитель конструктивной функции $\chi(\mathcal{F})$ лежит в замыкании орбиты $\mathcal{O}_a, a \in G$. Такие пучки изучаются в [6] для унипотентных орбит. В этом случае страты допустимой стратификации, дающие вклад в характеристический цикл, являются орбитами в $\overline{\mathcal{O}_a}$. Пусть $a_s, a_n \in G$ полупростой и унипотентный элементы, соответственно, такие что $a = a_s \cdot a_n$. Тогда $X_\alpha = \mathcal{O}_{a_s}$ — единственный полупростой страт в $\overline{\mathcal{O}_a}$. Получаем, что кратность $c_\alpha(\mathcal{F})$ характеристического цикла $CC(\mathcal{F})$

вдоль этого страта равна $c_\alpha(\mathcal{F}) = \chi_\alpha(\mathcal{F}) = c_\alpha(\mathcal{F}_T)$.

Теперь формула Теоремы 2.1 сводится к такой же формуле для пучка $\mathcal{F}_T$ и стратификации $\mathcal{S}_T$. Во-первых, $\chi(\mathcal{F}, G) = \chi(\mathcal{F}_T, T)$ по Предложению 2.9. Во-вторых, для всех неполупростых $X_\alpha, \alpha \in \mathcal{S}$, имеем $\mathrm{gdeg}(X_\alpha) = 0$ по Следствию 2.13. Поэтому правую часть формулы можно считать как сумму только по полупростым стратам, то есть

$$\chi(X, \mathcal{F}) = \sum_{\alpha \in \mathcal{S}_0} c_\alpha(\mathcal{F}) \mathrm{gdeg}(X_\alpha).$$

По Следствию 2.17 это эквивалентно формуле

$$\chi(T, \mathcal{F}_T) = \sum_{\alpha \in \mathcal{S}_T} c_\alpha(\mathcal{F}_T) \mathrm{gdeg}(X_\alpha \cap T),$$

поскольку $\mathrm{gdeg}(X_\alpha) = \mathrm{gdeg}(X_\alpha \cap T)$ по Предложению 2.14. Чтобы доказать последнюю формулу мы применяем Теорему 1.3 из [8].

2.7 Приложения

Давайте выведем из Теоремы 2.1 формулу для замкнутого (возможно особого) подмногообразия $X \subset G$ инвариантного относительно присоединённого действия. Обозначим за $\underline{\mathbb{C}_X}$ постоянный пучок на X, продолженный нулём на G. Давайте посчитаем коэффициенты характеристического цикла пучка $\underline{\mathbb{C}_X}$. Фиксируем некоторую стратификацию Уитни $\mathcal{S}$ многообразия X. Тогда Теорема 2.7 даёт следующую формулу для кратностей характеристического цикла $CC(\underline{\mathbb{C}_X})$ вдоль страта $X_\alpha \in \mathcal{S}$:

$$c_\alpha(\underline{\mathbb{C}_X}) = (-1)^{\dim X_\alpha + 1} \sum_{X_\alpha \subset \overline{X_\beta}} \mathrm{e}(\alpha, \beta) \chi_\beta(\underline{\mathbb{C}_X}).$$

Легко видеть, что локальная эйлерова характеристика пучка $\underline{\mathbb{C}_X}$ в точке x равна эйлеровой характеристике с компактным носителем маленькой открытой окрестности точки x. Как следует из доказательства Предложения 2.5, последняя равна 1 для всех $x \in X$. Таким образом, получаем, что c_α совпадает с $(-1)^{\dim X_\alpha + 1}(-1 + \mathrm{e}_\alpha)$, где e_α — эйлерова характеристика полного комплексного линка страта X_α.

Следствие 2.18. *Если $X \subset G$ — замкнутое подмногообразие инвариантное относительно присоединённого действия, то топологическая эйлерова характеристика многообразия X может быть посчитана по такой формуле*

$$\chi(X) = \sum (-1)^{\dim X_\alpha}(1 - \mathrm{e}_\alpha)\mathrm{gdeg}(X_\alpha).$$

Теперь мы посчитаем эйлерову характеристику пучков со специальными характеристическими циклами. А именно, предположим, что кратность c_α характеристического цикла $CC(\mathcal{F})$ вдоль страта X_α не равна нулю только, если X_α неполупрост. Тогда по Следствию 2.13 гауссова степень страта X_α равна нулю. Поэтому Теорема 2.1 немедленно даёт такое следствие.

Следствие 2.19. *Если носитель характеристического цикла пучка $\mathcal{F}$ содержится во множестве неполупростых элементов группы G, то эйлерова характеристика пучка $\mathcal{F}$ равна нулю.*

Глава 3

Классы Черна редуктивных групп и формула присоединения

3.1 Введение

Пусть G — связная комплексная редуктивная группа. Рассмотрим её конечномерное представление $\pi : G \to \mathrm{End}(V)$ в векторном пространстве V. Пусть $H \subset \mathrm{End}(V)$ — общая гиперплоскость. Главная задача, обсуждаемая в этой главе — как найти эйлерову характеристику гиперплоского сечения $\pi(G) \cap H$? Эта задача мотивирует конструкцию классов Черна эквивариантных векторных расслоений над редуктивными группами. Главный результат, использующий такие классы Черна — формула присоединения для эйлеровой характеристики гиперплоского сечения.

Обозначим за $\chi(\pi)$ эйлерову характеристику общего гиперплоского сечения $\pi(G) \cap H$. Когда $G = (\mathbb{C}^*)^n$ — комплексный тор, $\chi(\pi)$ была явно вычислена Д. Бернштейном, А. Хованским и А. Кушниренко [24]. Этот красивый результат связывает $\chi(\pi)$ с комбинаторными инвариантами представления π. Доказательство использует два факта:

- Есть явное соотношение между эйлеровой характеристикой $\chi(\pi)$ и степенью подмногообразия $\pi(G)$ в $\mathrm{End}(V)$
$$\chi(\pi) = (-1)^{n-1}\mathrm{deg}\ \pi(G). \tag{1}$$
- Для степени $\mathrm{deg}\ \pi(G)$ есть явная формула, доказанная Кушниренко.

Однако, когда G — произвольная редуктивная группа, только второй факт выживает. Б. Казарновский нашёл явную формулу для степени $\mathrm{deg}\ \pi(G)$, обобщающую формулу Кушниренко [23]. Позже М. Брион установил аналогичный результат для всех сферических однородных пространств [2].

Что касается первого факта, то он неверен уже для $SL_2(\mathbb{C})$. К.Каве в своей диссертации вычислил явно $\chi(\pi)$ и $\mathrm{deg}\ \pi(G)$ для всех представлений π группы $SL_2(\mathbb{C})$. Его вычисления показывают, что вообще говоря, есть расхождение между этими двумя числами. Каве также перечислил некоторые специальные представления редуктивных групп, для которых эти числа всё ещё совпадают [22].

В этой главе, я представлю формулу, которая обобщает формулу (1) на случай произвольных редуктивных групп. Для этого я построю подмногообразия $S_i \subset G$, степени которых заполняют промежуток между эйлеровой характеристикой и степенью. Моя конструкция напоминает классическую конструкцию классов Черна векторного расслоения. Подмногообразия S_i можно воспринимать как классы Черна касательного расслоения группы G. Я также построю классы Черна более общих эквивариантных векторных расслоений над G (раздел 3.3). Эти классы Черна во многих отношениях похожи на обычные классы Черна компактных многообразий. Есть аналог кольца когомологий группы G, где живут классы Черна эквивариантных расслоений. Этот аналог — кольцо условий, построенное

Де Кончини и Прочези [5, 3](см. раздел 3.2 для краткого напоминания). Оно полезно при решении задач исчислительной геометрии. Индекс пересечения в этом кольце корректно определён. В частности, имеет смысл говорить о степени подмногообразия $\pi(S_i)$ в $\mathrm{End}(V)$.

Обозначим за n и k размерность и ранг группы G, соответственно. В случае касательного расслоения оказывается, что (см. Лемму 3.11) подмногообразия S_i непусты только для $i \leq n-k$. Например, если G — тор, то все подмногообразия S_i пусты. Для произвольной редуктивной группы G подмногообразия S_i нетривиальны из-за некоммутативной части группы G.

Главный результат этой главы — следующая формула присоединения. Положим $S_0 = G$.

Теорема 3.1. *Пусть π — точное представление редуктивной группы G. Эйлерова характеристика $\chi(\pi)$ общего гиперплоского сечения равна знакопеременной сумме степеней подмногообразий $\pi(S_i)$:*

$$\chi(\pi) = \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^{n-i-1} \deg\, \pi(S_i). \tag{2}$$

Моё доказательство (раздел 3.4) этой формулы очень похоже на доказательство Д. Бернштейна формулы (1) в торическом случае. Классы Черна S_i возникают естественным образом при попытке обобщить его доказательство на случай произвольных редуктивных групп.

Чтобы объяснить эту мотивировку, я кратко напомню доказательство Бернштейна формулы (1) в торическом случае. Эйлерова характеристика равна с точностью до знака числу критических точек общей линейной функции $f \in \mathrm{End}^*(V)$, ограниченной на $\pi(G)$ (это следует из некомпактной теории Морса и справедливо также для произвольных редуктивных групп). Чтобы найти эти критические точки испльзуем левое действие группы $\pi(G)$ на $\mathrm{End}(V)$. Это действие производит n лево-инвариантных векторных полей $v_1, \ldots, v_n$, которые порождают касательное пространство к G в каждой точке. Тогда критические точки функции f — это в точности точки пересечения подмногообразия $\pi(G)$ с подпространством дополнительной размерности, заданным уравнениями $f(v_1(x)) = \ldots = f(v_n(x)) = 0$. Разница между торическим и редуктивным случаем состоит в том, что с первом случае это подпространство — общее, тогда как во втором случае оно имеет громадное пересечение с $\pi(G)$ на бесконечности. Последнее происходит оттого, что левое действие группы G на бесконечности имеет бесконечное число орбит, и на каждой такой орбите функция f имеет в некотором смысле критические точки.

Чтобы избежать этой сложности, имеет смысл рассмотреть действие удвоенной группы $G \times G$ на $\mathrm{End}(V)$ умножениями слева и справа (в торическом случае это то же самое, что просто левое действие из-за коммутативности). Преимущество такого действия в том, что оно имеет конечное число орбит на бесконечности. Однако, n общих векторных полей, приходящих из такого действия, не обязательно порождают касательное пространство к G в каждой точке. Таким образом, мы приходим к классическому определению классов Черна как циклов вырождения общих глобальных сечений касательного расслоения.

Остаётся задача вычислить степени $\deg \pi(S_i)$ классов Черна. В разделе 3.5, я вычислю степени первого и последнего классов Черна. Некоторые примеры будут приведены в разделе 3.6.

Мы работаем в алгебраической категории, то есть все многообразия, однородные пространства, отображения и действия групп будут алгебраическими по умолчанию.

Следующие замечания касаются обозначений. В этой главе, термин *эквивариантный* (например, эквивариантные компактификация, расслоение, и т.д.) всегда будет означать эквивариантный относительно действия удвоенной группы $G \times G$, если не оговорено иное. За $\mathfrak{g}$ обозначим алгебру Ли группы G. Я также фиксирую вложение $G \subset GL(W)$ для некоторого векторного пространства W. Тогда для $g \in G$ и $A \in \mathfrak{g}$ обозначения Ag и gA означают произведение линейных операторов в $\mathrm{End}(W)$.

3.2 Эквивариантые компактификации и кольцо условий

Этот раздел содержит некоторые классические понятия и теоремы, которые будут использоваться в дальнейшем. Сначала, я определю понятие сферического действия и опишу эквивариантные компактификации редуктивных групп, следуя [5, 20]. Более подробное изложение можно найти также в [42]. Потом я определю и классифицирую эквивариантные векторные расслоения над редуктивными группами. Наконец, я сформулирую теорему Клеймана о трансверсальности [32] и напомню определение кольца условий [5, 3].

Сферическое действие. Редуктивные группы — частный случай более общих *сферических* однородных пространств. Они определяются таким образом. Пусть G — связная редуктивная группа и пусть M — её однородное пространство. Действие группы G на M называется *сферическим*, если борелевская подгруппа группы G имеет открытую всюду плотную орбиту в M. В этом случае однородное пространство M также называется сферическим. Важное и очень полезное свойство, которое характеризует сферическое однородное пространство, это то, что любая его компактификация, эквивариантная относительно действия группы G, содержит лишь конечное число орбит [40, 34].

Есть естественное действие группы $G \times G$ на G левыми и правыми умножениями. А именно элемент $(g_1, g_2) \in G \times G$ отображает элемент $g \in G$ в $g_1 g g_2^{-1}$. Это действие — сферическое, как следует из разложения Брюа группы G, связанного с какой-нибудь борелевской подгруппой. Таким образом, группу G можно рассматривать как сферическое однородное пространство относительно этого действия удвоенной группы $G \times G$. Для любого представления $\pi : G \to \mathrm{End}(V)$ это действие можно очевидным образом продолжить до действия $\pi(G) \times \pi(G)$ на всём $\mathrm{End}(V)$ левыми и правыми умножениями. Я буду называть такие действия стандартными.

Эквивариантные компактификации. С каждым представлением π можно связать следующую эквивариантную компактификацию группы $\pi(G)$. Возьмём конус над $\pi(G)$ (состоящий из всех точек $x \in \mathrm{End}(V)$, таких что $\lambda \cdot x$ принадлежит $\pi(G)$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{C}^*$), возьмём его проективизацию и затем возьмём замыкание проективизации в $\mathbb{P}(\mathrm{End}(V))$. Мы получим проективное многообразие $X_\pi \subset \mathbb{P}(\mathrm{End}(V))$ с естественным действием группы $G \times G$, приходящим из стандартного действия группы $\pi(G) \times \pi(G)$ на $\mathrm{End}(V)$. Ниже я перечислю некоторые важные свойства этого многообразия.

Без потери общности можно предположить, что $\pi(G)$ изоморфно G. Фиксируем максимальный тор $T \subset G$. Рассмотрим все веса представления π, то есть все характеры максимального тора T, встречающиеся в π. Возьмём их выпуклую оболочку P_π в решётке всех характеров тора

T (мы предполагаем, что решётка характеров вложена в аффинное пространство $\mathbb{R}^k$). Тогда легко видеть, что P_π — многогранник, инвариантный относительно действия группы Вейля группы G. Он называется *весовым многогранником* представления π. Многогранник P_π содержит много информации о компактификации X_π.

Теорема 3.2. *1) [20, 42] Многообразие X_π состоит из конечного числа $G \times G$-орбит. Эти орбиты находятся во взаимно-однозначном с орбитами группы Вейля, действующей на гранях многогранника P_π.*

2)[5] Пусть ρ — другое представление группы G. Нормализации многообразий X_π и X_ρ изоморфны, если и только если нормальные вееры многогранников X_π и X_ρ совпадают. Если первый веер подразбивает второй, то существует эквивариантное отображение из нормализации многообразия X_π в X_ρ.

В частности, предположим, что G — группа присоединённого типа, то есть имеет тривиальный центр. Тогда для любого строго доминантного веса λ можно определить компактификацию $X_{can} := X_{\pi(\lambda)}$ группы G, связанную с неприводимым представлением $\pi(\lambda)$ со старшим весом λ. Компактификация X_{can} группы G называется чудесной компактификацией. Она была введена Де Кончини и Прочези [5]. Чудесная компактификация является гладкой и поэтому по второй части Предложения 3.2 не зависит от выбора строго доминантного веса λ. Действительно, нормальный веер к весовому многограннику не зависит от λ и совпадает с веером камер Вейля и их граней.

Опишем немного подробней, как устроена чудесная компактификация. Дивизор на бесконечности $X_{can} \backslash G$ — дивизор с нормальными пересечениями. Есть k орбит $\mathcal{O}_1, \ldots, \mathcal{O}_k$ коразмерности 1 в X_{can}, их замыкания гладки и пересекаются друг с другом трансверсально. Замыкания остальных орбит получаются как пересечение замыканий $\overline{\mathcal{O}}_1, \ldots, \overline{\mathcal{O}}_k$. Более точно, любому подмножеству $\{i_1, i_2, \ldots, i_m\} \subset \{1, \ldots, n\}$ соответствует $G \times G$-орбита коразмерности m с замыканием $\overline{\mathcal{O}}_{i_1} \cap \overline{\mathcal{O}}_{i_2} \cap \ldots \cap \overline{\mathcal{O}}_{i_m}$. Таким образом, число орбит равно 2^k. Есть единственная замкнутая орбита $\mathcal{O}_1 \cap \ldots \cap \mathcal{O}_k$, изоморфная произведению двух многообразий флагов $G/B \times G/B$. Здесь B — борелевская подгруппа группы G.

Эквивариантные векторные расслоения. Пусть L — векторное расслоение над G ранга d. Обозначим за $V_g \subset L$ слой расслоения L, лежащий над элементом $g \in G$. Предположим, что стандартное действие группы $G \times G$ на G можно линейно продолжить на L. Более точно, существует гомоморфизм $A : G \times G \to \mathrm{Aut}(L)$ такой что автоморфизм $A(g_1, g_2)$, ограниченный на V_g, является линейным оператором из V_g в $V_{g_1 g g_2^{-1}}$. Если эти условия выполнены, то векторное расслоение L называется *эквивариантным* относительно действия группы $G \times G$.

Два эквивариантных расслоения L_1, L_2 эквивалентны, если существует изоморфизм между L_1 и L_2, согласованный со структурой расслоения и с действием группы $G \times G$. Следующее простое предложение описывает эквивариантные векторные расслоения на G с точностью до этого отношения эквивалентности.

Предложение 3.3. *Классы эквивалентности эквивариантных векторных расслоений ранга d находятся во взаимно-однозначном соответствии с линейными представлениями группы G размерности d.*

Доказательство. Сопоставим каждому векторному расслоению L представление $\pi : G \to \mathrm{End}(V_e)$ таким образом: $\pi(g)$ — ограничение $A(g, g)$

на V_e. И наоборот, с каждым представлением $\pi : G \to V$ можно связать расслоение L, изоморфное $G \times V$ со следующим действием группы $G \times G$:

$$A(g_1, g_2) : (g, v) \to (g_1 g g_2^{-1}, \pi(g_1)v).$$

Например, постоянное сечение $v(g) = v$ для $v \in V$ — правоинвариантно. Легко проверить, что такое соответствие действительно взаимно-однозначно. □

Например, касательное расслоение $\mathrm{T}G$ на G очевидно эквивариантно и соответствует присоединённому представлению группы G на алгебре Ли $\mathfrak{g} = \mathrm{T}G_e$. Напомним, как определяется присоединённое представление:

$$\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{End}(\mathfrak{g}); \quad \mathrm{Ad}(g)X = gXg^{-1}, X \in \mathfrak{g}.$$

Этот пример будет важен в разделе 3.4.

Кольцо условий. Следующая теорема даёт способ определить теорию пересечений на некомпактной группе, или более общо, на однородном пространстве.

Теорема 3.4 (Теорема Клеймана о трансверсальности)**.** *[32] Пусть H связная алгебраическая группа, и пусть M — её однородное пространство. Возьмём два неприводимых алгебраических подмногообразия $X, Y \subset M$. Обозначим за gX левый сдвиг подмногообразия X элементом $g \in G$. Существует открытое всюду плотное подмножество группы H такое что для всех элементов g этого подмножества каждая неприводимая компонента пересечения $gX \cap Y$ имеет размерность $\dim X + \dim Y - \dim H$. Если X и Y — гладкие, то $gX \cap Y$ трансверсально.*

В частности, если X и Y имеют дополнительные размерности (но не обязательно гладкие), то $gX \cap Y$ состоит из конечного числа точек, и это число постоянно.

Если X и Y имеют дополнительные размерности, определим *индекс пересечения* (X, Y) как число точек пересечения $\#(gX \cap Y)$ для общего $g \in H$. Если мы хотим решать задачи исчислительной геометрии, то естественно рассматривать алгебраические подмногообразия на M с точностью до такого отношения эквивалентности. Два неприводимых подмногообразия X_1, X_2 одинаковой размерности эквивалентны, если для любого неприводимого подмногообразия Y дополнительной размерности индексы пересечения (X_1, Y) и (X_2, Y) совпадают. Это отношение эквивалентности похоже на численную эквивалентность в алгебраической геометрии (см. [10, Chapter 19]). Рассмотрим все формальные линейные комбинации алгебраических подмногообразий в M по модулю этого отношения эквивалентности. Получившаяся группа $C^*(M)$ называется *группой условий* однородного пространства M.

Можно определить *произведение* двух подмногообразий $X, Y \subset M$, положив $X \cdot Y = gX \cap Y$, где $g \in G$ — общий. Однако такое произведение не всегда корректно определено на группе условий. Имеется следующий простой контрпример [5]. Предположим, что $G = \mathbb{C}^n$ — аффинное пространство, на котором действует группа параллельных переносов. Тогда два аффинных подпространства одинаковой размерности представляют один и тот же класс в $\mathbb{C}^n$, только если они параллельны. Действительно, если они не параллельны, то существует подпространство дополнительной размерности $V \subset \mathbb{C}^n$ параллельное одному подпространству и пересекающее другое. Тогда общий параллельный сдвиг подпространства V не пересечёт первое подпространство, но пересечёт второе в одной точке. Теперь в аффинном пространстве $\mathbb{C}^3$ с координатами (x, y, z) рассмотрим квадрику Y, заданную уравнением $x = yz$. Возьмём две различных плоскости параллельные координатной плоскости $X = \{y = 0\} \subset \mathbb{C}^3$. Их пересечения с

Y дают две прямых, которые не параллельны друг другу. Таким образом, они не принадлежат одному и тому же классу эквивалентности в группе условий, и класс $X \cdot Y$ не определён.

Замечательный факт состоит в том, что для сферических однородных пространств такое произведение корректно определено, то есть если взять разных представителей в одних и тех же классах, то класс их произведения будет одним и тем же [5, 3]. Соответствующее кольцо $C^*(M)$ называется *кольцом условий*.

В частности группа условий $C^*(G)$ редуктивной группы является кольцом. Де Кончини и Прочези связали кольцо условий с кольцами когомологий эквивариантных компактификаций таким образом. Рассмотрим множество $\mathcal{S}$ всех эквивариантных компактификаций X_π группы G, связанных с её представлениями π. На этом множестве есть естественное отношение частичного порядка. А именно, компактификация X_ρ больше чем X_π, если существует отображение $X_\rho \to X_\pi$, перестановочное с действием $G \times G$. Ясно, что такое отображение единственно с точностью до действия $G \times G$, и индуцирует отображение колец когомологий $H^*(X_\pi) \to H^*(X_\rho)$.

Теорема 3.5. *[5, 3] Кольцо условий $C^*(G)$ изоморфно прямому пределу по множеству $\mathcal{S}$ колец когомологий $H^*(X_\pi)$.*

Де Кончини и Прочези доказали эту теорему в [5] для симметрических пространств. В [3] Де Кончини заметил, что их рассуждения дословно переносятся на произвольные сферические однородные пространства, в частности, на произвольные редуктивные группы.

3.3 Классы Черна со значениями в кольце условий

В этом разделе я рассматриваю векторные расслоения на группе G эквивариантные относительно присоединённого действия удвоенной группы $G\times G$. Для таких расслоений я определю их классы Черна со значениями в кольце условий $C^*(G)$. В отличие от обычных классов Черна в компактном случае эти классы Черна меряют сложность действия группы $G\times G$, а не топологическую сложность (топологически любое $G\times G$-эквивариантное векторное расслоение над G тривиально). Однако, они сохраняют многие свойства обычных классов Черна. Есть также связь между этими классами и обычными классами Черна некоторых расслоений над эквивариантными компактификациями группы G.

В последующих разделах я буду, в основном, использовать классы Черна касательного расслоения. Их главное приложение — это формула для эйлеровой характеристики гиперплоского сечения. Одно из возможных приложений классов Черна других эквивариантных расслоений — получить явное описание кольца условий $C^*(G)$ через эти классы Черна.

В этом разделе L обозначает эквивариантное векторное расслоение над G ранга d, соответствующее представлению $\pi : G \to \mathrm{End}(V)$.

Определение классов Черна. Среди всех глобальных сечений расслоения L есть два выделенных подпространства, а именно, пространства право- и лево-инвариантных сечений. Они состоят из сечений инвариантных относительно действия подгрупп $G\times e\subset G\times G$ и $e\times G\subset G\times G$, соответственно. Оба этих подпространства можно канонически отождествить с

$V = V_e$. Обозначим за $\Gamma(L)$ пространство всех глобальных сечений расслоения L, представимых в виде суммы лево- и право-инвариантных сечений. Если представление π не содержит никаких тривиальных подпредставлений, то $\Gamma(L)$ канонически изоморфно прямой сумме двух копий пространства V. Иначе, $\Gamma(L)$ — факторпространство $(V \oplus V)/E$, где $E \subset V \oplus V$ — диагональное вложение максимального тривиального подпредставления в π.

Если $L = \mathrm{T}G$ — касательное расслоение, то $\Gamma(L)$ — очень естественный класс глобальных сечений. А именно, он состоит из всех векторных полей, приходящих из действия группы $G \times G$ на G. Под этим я имею в виду, что с каждым элементом $(X, Y) \in \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$ можно связать векторное поле $v \in \Gamma(L)$ таким образом:

$$v(x) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} [e^{tX} x e^{-tY}] = Xx - xY.$$

Этот пример показывает, что естественнее представлять элементы пространства $\Gamma(L)$ не как суммы, а как разности лево- и право-инвариантных сечений.

Пространство $\Gamma(L)$ используется для определения классов Черна расслоения L по одному из классических методов. Возьмём d общих сечений $v_1, \ldots, v_d \in \Gamma(L)$. Тогда $i-$тый класс Черна — это $i-$тый цикл вырождения таких сечений. Более точно, первый класс Черна $S_1(L) \subset G$ состоит из всех точек $g \in G$, где d сечений $v_1(g), \ldots, v_d(g)$ линейно зависимы, $S_2(L)$ — из всех точек, где первые $d-1$ сечений $v_1(g), \ldots, v_{d-1}(g)$ зависимы, а $S_i(L)$ — из всех точек, где первые $d-i+1$ сечений $v_1(g), \ldots, v_{d-i+1}(g)$ зависимы. Это определение практически повторяет одно из классических определений классов Черна в компактном случае (см. [17]). Единственная разница в том, что глобальные сечения, используемые в определении, не являются общими в пространстве всех сечений. Они являются общими сечениями внутри специального подпространства $\Gamma(L)$. Если опустить это ограничение и применить классическое определение, то результат будет тривиальным, поскольку расслоение L топологически тривиально. В некотором смысле, классы Черна будут в этом случае сидеть на бесконечности (точный смысл будет ясен из второй части этого раздела). Цель моего определения — вытянуть их обратно в конечную часть.

Таким образом, для каждого $i = 1, \ldots, n$ мы получим семейство $\mathcal{S}_i(L)$ подмногообразий $S_i(L)$, параметризованное наборами из i элементов пространства $\Gamma(L)$. В компактном случае, все общие представители аналогичного семейства представляли бы один и тот же класс в кольце когомологий (то есть были бы двойственны по двойственности Пуанкаре одному и тому же классу когомологий). То же самое верно и здесь, если использовать кольцо условий как аналог колец когомологий в некомпактном случае. Это и является содержанием следующей леммы. Заметим, что сечения $v_1, \ldots, v_d \in \Gamma(L)$ однозначно определяются d векторами $A_1, \ldots, A_d \in V \oplus V$.

Лемма 3.6. *Для всех наборов $A_1, \ldots, A_d$ из некоторого открытого плотного подмножества в $(V \oplus V)^d$ класс соответствующего подмногообразия $S_i(L)$ в кольце условий $C^*(G)$ один и тот же.*

Доказательство. Идея доказательства — рассмотреть замыкания подмногообразий $\pi(S_i(L))$ в подходящей эквивариантной компактификации X_L (см. определение компактификации X_L в следующем подразделе). Они представляют один и тот же класс в кольце когомологий многообразия X_L по непрерывности. Достаточно доказать, что они имеют не слишком большие пересечения с $G \times G$-орбитами в X_L, то есть коразмерность пересечения с каждой орбитой в этой орбите меньше либо равна коразмерности

$S_i(L)$ в G. Тогда из теоремы Клеймана о трансверсальности будет следовать, что $S_i(L)$ представляют один и тот же класс также и в $C^*(G)$. Чтобы доказать, что пересечения не слишком велики, я сведу всё к случаю эквивариантного расслоения над $GL(V)$, соответствующего тавтологическому представлению.

Сначала опишем все лево- и право-инвариантные глобальные сечения расслоения L. Рассмотрим представление $\pi : G \to \mathrm{End}(V)$, соответствующее векторному расслоению L. Любой вектор $X \in V$ определяет право-инвариантное сечение $v_r(g) = X$ как в доказательстве Предложения 3.3. Тогда легко видеть, что любое лево-инвариантное сечение v_l задаётся формулой $v_l(g) = \pi(g)Y$ для $Y \in V$. Поэтому любое сечение $v = v_l - v_r$, принадлежащее пространству $\Gamma(L)$ может быть записано как $v(g) = \pi(g)X - Y$ для некоторых $X, Y \in V$. Запишем сечения $v_1, \ldots, v_d$ в такой форме: $v_1(g) = \pi(g)X_1 - Y_1, \ldots, v_d(g) = \pi(g)X_d - Y_d$.

Теперь опишем $S_i(L)$. Прежде всего ясно, что подмногообразия $S_i(L)$ зависят только от выбора флага $F = \{\Lambda^1 \subset \ldots \subset \Lambda^d \subset V \oplus V\}$, где подпространство Λ^j порождается элементами $A_1, \ldots, A_j$. Например, S_1 зависит только от подпространства $\Lambda^n \subset V \oplus V$. Рассмотрим график Λ_g оператора $\pi(g)$ в $V \oplus V$. Это подпространство размерности d, состоящее из векторов $(X, \pi(g)X)$, где $X \in V$. Тогда g принадлежит множеству $S_i(L)$ (то есть векторы $v_1(g) = \pi(g)X_1 - Y_1, \ldots, v_d(g) = \pi(g)X_{n-i+1} - Y_{n-i+1}$ линейно зависимы) если и только если подпространства Λ_g и Λ^{d-i+1} имеют ненулевое пересечение. Из этого также следует такое соотношение. Рассмотрим векторное расслоение U_d над $GL(V)$, связанное с тавтологическим представлением группы $GL(V)$ на пространстве V. Тогда $S_i(L)$ — прообраз многообразия $S_i(U_d)$ при отображении $\pi : G \to GL(V)$:

$$S_i(L) = \pi^{-1}(S_i(U_d)).$$

Заметим, что такое же соотношение выполнено для обычных классов Черна в компактном случае, поскольку векторное расслоение L является обратным образом расслоения U_d.

Докажем Лемму 3.6 для группы $GL(V)$ и векторного расслоения $L = U_d$. В этом случае, $S_i(U_d)$ состоит из всех элементов $g \in GL(V)$, таких что график оператора g в $V \oplus V$ имеет ненулевое пересечение с Λ^{d-i+1}. Возьмём другой флаг $F' = \{\Lambda'^1 \subset \ldots \subset \Lambda'^d\}$ и рассмотрим соответствующие ему подмногообразия $S'_i(U_d)$. Ясно, что если подпространства Λ^i и Λ'^i — общие, например, каждое из них пересекает V_1 и V_2 только по нулю, то существует оператор $h = (h_1, h_2) \in GL(V_1) \times GL(V_2)$, такой что $h(\Lambda^i) = \Lambda'^i$ для всех $i = 1, \ldots, d$. Поэтому подмногообразие S'_i, построенное с помощью флага F совпадает со сдвигом $h_1 S_i(U_d) h_2$ подмногообразия $S_i(U_d)$, построенного с помощью флага F'. В частности, они представляют один и тот же класс в кольце условий группы $GL(V)$.

Замечание 3.7. Есть другое описание многообразий $S_i(U_d)$ и $S_i(L)$. Определим оператор $A \in GL(V)$, положив $A(X_i) = Y_i$. Обозначим за V^i подпространство в V, порождённое элементами $X_1, \ldots, X_i$ (то есть V^i — проекция подпространства Λ^i на первое слагаемое в $V \oplus V$). Для каждого $g \in G$ рассмотрим линейный оператор $(\pi(g) - A)$. Ясно, что $S_i(L)$ состоит из всех таких элементов $g \in G$, что оператор $(\pi(g) - A)$, ограниченный на подпространство V^i, имеет нетривиальное ядро. В частности, подмногообразие $S_1(L)$ задаётся уравнением $det(\pi(g) - A) = 0$. Аналогично, $S_i(U_d)$ состоит из всех элементов $x \in GL(V)$, таких что оператор $(x - A)$, ограниченный на подпространство V^i имеет нетривиальное ядро.

Теперь мы завершим доказательство Леммы 3.6. Из теоремы Клеймана о трансверсальности, применённой к грассманниану $\mathrm{G}(d, 2d)$ (см. Пример

2(a)), следует, что если h_1 и h_2 — общие, то подмногообразие $h_1 S_i(U_d) h_2$ пересекает $GL(V)\times GL(V)$-орбиты в $\mathrm{G}(d, 2d)$ трансверсально. Этот факт в комбинации с соотношением $S_i(L) = \pi^{-1}(S_i(U_d))$ даёт утверждение Леммы 3.6 для G и L. $\square$

Таким образом, мы доказали, что семейство $\mathcal{S}_i(L)$ подмногообразий $S_i(L) \subset G$, параметризованное элементами пространства $(V \oplus V)^d$ даёт корректно определённый класс $[S_i(L)]$ в кольце условий $C(G)$.

Замечание 3.8. Есть также следующий критерий выбора общего $S_i(L)$. Класс данного подмногообразия $S_i(L)$ в кольце условий совпадает с $[S_i(L)]$, если и только если замыкание подмногообразия $S_i(L)$ в X_L пересекает все $G \times G$-орбиты по подмногообразиям коразмерности i в орбите.

В частности, если L — касательное расслоение, то для общего $S_i(TG)$ замыкание подмногообразия $\mathrm{Ad}(S_i(\mathrm{T}G))$ в чудесной компактификации пересекает все орбиты трансверсально (см. Пример 1).

Определение 1. *Класс $[S_i(L)] \in C^*(G)$, заданный семейством $\mathcal{S}_i(L)$, называется i-тым классом Черна расслоения L со значениями в кольце условий.*

С этого момента под $S_i(L)$ я всегда буду иметь в виду подмногообразие из семейства $\mathcal{S}_i(L)$, класс которого в кольце условий совпадает с классом Черна $[S_i(L)]$.

Вложения в грассманнианы. Для эквивариантного векторного расслоения я построю эквивариантное отображение группы G в некоторый грассманниан. Эта конструкция показывает, что классы Черна расслоения L связаны с обычными классами Черна некоторого векторного расслоения над эквивариантной компактификацией группы G.

Предположим для простоты, что $\pi : G \to \mathrm{End}(V)$ — вложение. С каждым $g \in G$ можно связать граф $\Lambda_g \subset V \oplus V$ оператора $\pi(g)$. Это подпространство размерности d состоящее из векторов $(X, \pi(g)X)$, где $X \in V$. Следовательно, есть отображение φ_L из группы G в грассманниан $\mathrm{G}(d, 2d)$, состоящий из d-мерных подпространств в $2d$-мерном векторном пространстве

$$\varphi_L : G \to \mathrm{G}(d, 2d); \quad \varphi_L : g \mapsto \Lambda_g.$$

Заметим, что ограничение на $\varphi_L(G) \simeq G$ тавтологического факторрасслоения над $\mathrm{G}(d, 2d)$ изоморфно расслоению L.

Замечание 3.9. Эта конструкция повторяет следующую хорошо известную конструкцию (см. [17]). Пусть M — гладкое многообразие, S — векторное расслоение ранга d над M, и $\Gamma(S)$ — подпространство размерности N в пространстве всех глобальных сечений расслоения S. Предположим, что в каждой точке $x \in M$ сечения из $\Gamma(S)$ порождают слой расслоения S в точке x. Тогда можно отобразить M в грассманниан $\mathrm{G}(N-d, N)$, сопоставив каждой точке $x \in M$ подпространство всех сечений из $\Gamma(L)$, которые обращаются в нуль в x. Ясно, что векторное расслоение S совпадает с обратным образом тавтологического факторрасслоения над грассманнианом $\mathrm{G}(N-d, N)$.

Обозначим за X_L замыкание образа $\varphi_L(G)$ в $\mathrm{G}(d, 2d)$. Это проективное многообразие эквивариантное относительно действия группы $G \times G$, приходящего из представления $\pi \oplus \pi$ на пространстве $V \oplus V$. А именно, элемент $(g_1, g_2) \in G \times G$ переводит подпространство $\Lambda \subset V \oplus V$ в подпространство $(\pi(g_1), \pi(g_2))(\Lambda)$. Открытая плотная $G \times G$-орбита в X_L очевидно изоморфна $\pi(G) \simeq G$.

Пример 1 (**Вложение Демазюра**). Пусть G — группа присоединённого типа, и пусть π — её присоединённое представление на алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Тогда, как уже говорилось, соответствующее векторное расслоение L совпадает с касательным расслоением группы G. Соответствующее вложение $\varphi_L : G \to \mathrm{G}(n, \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g})$ совпадает с вложением, построенным Демазюром [4]. Конструкция Демазюра устроена так. Элемент $x \in G$ переходит в алгебру Ли стабилизатора элемента x при стандартном действии группы $G \times G$. Например, единичный элемент переходит в алгебру Ли $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$, вложенную диагонально. Тогда сопряжение элементом $(g_1, g_2) \in G \times G$ переводит алгебру Ли $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$ в алгебру Ли стабилизатора элемента $g_1 g_2^{-1}$. Теперь легко видеть, что вложение φ_L и вложение Демазюра совпадают. Компактификация X_L в этом случае изоморфна чудесной компактификации группы G [4].

Пример 2. **a)** Пусть G — группа $GL(V)$, и пусть π — её тавтологическое представление в пространстве V размерности d. Тогда φ_L — вложение группы $GL(V)$ в грассманниан $\mathrm{G}(d, 2d)$. Заметим, что размерности этих многообразий совпадают. Следовательно, компактификация X_L совпадает с $\mathrm{G}(d, 2d)$.

b) Возьмём группу $SL(V)$ вместо $GL(V)$ в предыдущем примере. Её компактификация X_L — гиперповерхность в грассманниане $\mathrm{G}(d, 2d)$, которую можно описать следующим образом. Рассмотрим вложение Плюккера $p : \mathrm{G}(d, 2d) \to \mathbb{P}(\Lambda^d(V_1 \oplus V_2))$ (здесь V_1 и V_2 — две копии пространства V). Тогда $p(X_L)$ — специальное гиперплоское сечение образа $p(\mathrm{G}(d, 2d))$. А именно, разложение $V_1 \oplus V_2$ даёт разложение внешней степени $\Lambda^d(V_1 \oplus V_2)$ в прямую сумму. Эта сумма содержит два одномерных слагаемых $p(V_1)$ и $p(V_2)$ (которые рассматриваются как прямые в $\Lambda^d(V_1 \oplus V_2)$). В частности, для любого вектора в $\Lambda^d(V_1 \oplus V_2)$ имеет смысл говорить о его проекциях на $p(V_1)$ и $p(V_2)$. На V_1 и V_2 есть две специальных n-формы, сохраняемых группой $SL(V)$. Эти формы определяют две 1-формы l_1 и l_2 на $p(V_1)$ и на $p(V_2)$, соответственно. Рассмотрим гиперплоскость H в $\Lambda^d(V_1 \oplus V_2)$, состоящую из всех векторов v, таких что линейные функции l_1, l_2 принимают одинаковые значения на проекциях вектора v на $p(V_1)$ и на $p(V_2)$, соответственно. Тогда легко проверить, что $p(X_L) = p(\mathrm{G}(d, 2d)) \cap \mathbb{P}(H)$.

Обозначим за L_X ограничение на X_L тавтологического факторрасслоения U_d над грассманнианом $\mathrm{G}(d, 2d)$. Предположим, что X_L гладко. Пусть $c_1, \ldots, c_d \in H_*(X_L)$ — подмногообразия двойственные к классам Черна расслоения L_X. Их я также буду называть классами Черна.

Предложение 3.10. *Класс гомологий замыкания образа $\varphi_L(S_i(L))$ в X_L совпадает с i-тым классом Черна расслоения L_X:*

$$[\overline{\varphi_L(S_i(L))}] = c_i(X_L).$$

Доказательство. Классы Черна расслоения L_X можно получить как пересечения многообразия X_L с классами Черна расслоения U_d. Последние имеют удобных представителей $C_1, \ldots, C_d$, которые являются замыканиями некоторых циклов Шуберта, построенных по произвольному частичному флагу $F = \{\Lambda^1 \subset \ldots \Lambda^d \subset V \oplus V\}$ (см. [17]). А именно, C_i состоит из всех подпространств $\Lambda \in \mathrm{G}(d, 2d)$, таких что пересечение $\Lambda \cap \Lambda^{n-i+1}$ нетривиально, то есть имеет размерность по крайней мере 1. Для общего флага F пересечение $C_i \cap X_L$ трансверсально по теореме Клеймана о трансверсальности, применённой к однородному пространству $G(d, 2d)$, и поэтому представляет i-тый класс Черна многообразия X_L. С другой стороны, $C_i \cap \varphi_L(G)$ совпадает с $\varphi_L(S_i(L))$. $\square$

Свойства классов Черна редуктивных групп. Следующая лемма считает размерности классов Черна. Она также показывает, что если действие группы $\pi(G)$ на V не транзитивно, то старшие классы Черна автоматически обращаются в нуль. Обозначим за $d(\pi)$ размерность общей орбиты группы $\pi(G)$ в V. В частности, если $\pi(G)$ действует на V транзитивно, то $d(\pi) = d$.

Лемма 3.11. *Если $i > d(\pi)$, то $S_i(L)$ пусто, а если $i \leq d(\pi)$, то размерность многообразия $S_i(L)$ равна $n - i$.*

Доказательство. Рассмотрим объединение $D \subset V \oplus V$ всех графов Λ_g для $g \in G$. Ясно, что D состоит из всех пар $(X, Y) \in V \oplus V$, таких что X и Y лежат в одной орбите при действии $\pi(G)$. То есть, если G действует транзитивно на V, то $D = V \oplus V$. Поэтому коразмерность множества D равна коразмерности $d - d(\pi)$ общей орбиты в V. В моём главном примере, когда π — присоединённое представление, коразмерность множества D равна рангу группы G. Заметим также, что множество D — конус с вершиной в нуле (то есть вместе с каждой точкой оно содержит прямую проходящую через начало координат и эту точку). Поскольку Λ^{d-i+1} — общее векторное подпространство, размерность пересечения $D \cap \Lambda^{d-i+1}$ равна $d(\pi) - i + 1$, если $i \leq d(\pi)$. В частности, если $i = d(\pi)$, то $D \cap \Lambda^{d-i+1}$ состоит из нескольких прямых, число которых равно степени множества D. Если $i > d(\pi)$, то $D \cap \Lambda^{d-i+1}$ содержит только начало координат. Следовательно, если $i > d(\pi)$, то $S_{n-i+1}(L)$ пусто. Рассмотрим случай, когда $i \leq d(\pi)$. Если g принадлежит $S_i(L)$ но не принадлежит $S_{i+1}(L)$, то существует в точности один (с точностью до пропорциональности) элемент $A = (X, Y) \in D \cap \Lambda^{d-i+1}$, такой что $A \in \Lambda_g$. Обозначим за l_A прямую порождённую A. Получим отображение

$$p : S_i(L) \setminus S_{i+1}(L) \to \mathbb{P}(D \cap \Lambda^{d-i+1}); \quad p : g \mapsto l_A.$$

Прообраз $p^{-1}(l_A)$ состоит из всех $g \in G$, таких что $\pi(g)X = Y$. Следовательно, он изоморфен стабилизатору элемента X при действии $\pi(G)$. Получаем, что размерность многообразия $S_i(L)$ равна $\dim \mathbb{P}(D \cap \Lambda^{d-i+1}) + \dim p^{-1}(l_A) = n - i$. □

В действительности, вторая часть Леммы 3.11 сразу следует из Замечания 3.7 в сочетании с теоремой Клеймана о трансверсальности, если показать, что S_i непусто. Однако, из приведённого выше доказательства можно ещё вывести такое следствие. Обозначим за $H \subset G$ стабилизатор общего элемента в V.

Следствие 3.12. *Существует открытое плотное подмножество $U_i \subset S_i(L)$, такое что U_i является* почти *слоением, слои которого совпадают со сдвигами подгруппы H. Здесь* почти *означает, что пересечение разных слоёв всегда лежит в $S_{i+1}(L) \subset S_i(L)$. В частности, последний класс Черна $S_{d(\pi)}(L)$ совпадает с несвязным объединением нескольких сдвигов подгруппы H. Их число равно степени общей орбиты группы G в V.*

Последнее утверждение следует из того, что степень множества D в $V \oplus V$ (см. доказательство Леммы 3.11) равна степени общей орбиты группы G в V.

В частности, пусть L — касательное расслоение. Тогда стабилизатор общего элемента в $\mathfrak{g}$ является максимальным тором в G. Следовательно, последний класс Черна $S_{n-k}(\mathrm{T}G)$ является объединением нескольких сдвигов тора.

Классы Черна эквивариантных расслоений над G сохраняют многие свойства обычных классов Черна. Эти свойства перечислены ниже.

- **Обращение в нуль.** Если $i > d$, то класс Черна $[S_i(L)]$ обращается в нуль. Как следует из Леммы 3.11 верно более точное утверждение. Если $i > d(\pi)$, то класс Черна $[S_i(L)]$ обращается в нуль.

- **Размерности.** Если $i \leq d(\pi)$, то i-тый класс Черна $[S_i(L)]$ имеет коразмерность i (см. Лемму 3.11). В компактном случае Определение 1 было бы скорее определением циклов гомологий двойственных к обычным классам Черна. Класс $[S_i(L)]$ также можно рассматривать как линейный функционал на $C^i(G)$: на каждом цикле $Y \in C^*(G)$ размерности i класс Черна $S_i(L)$ принимает значение $(S_i(L), Y)$.

  Остальные свойства прямо следуют из описания классов Черна, данного в доказательстве Леммы 3.6.

- **Обратный образ.** Пусть $\varphi : G_1 \to G_2$ — гомоморфизм двух редуктивных групп G_1 и G_2, и L — эквивариантное векторное расслоение на G_2, соответствующее представлению π. Обратный образ $\varphi^* L$ — эквивариантное расслоение на G_1, связанное с представлением $\pi \circ \varphi$. Тогда классы Черна расслоений L и $\varphi^* L$ связаны таким образом:

  $$[S_i(\varphi^* L)] = \varphi^{-1}[S_i(L)].$$

  В частности, применим эту формулу к гомоморфизму $\pi : G \to \pi(G)$. Получим, что если представление $\pi : G \to \mathrm{End}(V)$, связанное с векторным расслоением L имеет нетривиальное ядро, то классы Черна $S_i(L)$ инвариантны относительно умножения слева и справа на элементы ядра.

- **Линейные расслоения.** Предположим, что L имеет ранг 1. Тогда L соответствует характеру $\pi : G \to \mathbb{C}^*$. Первый класс Черна расслоения L совпадает с классом гиперповерхности $\{\pi(g) = 1\}$.

3.4 Доказательство Теоремы 3.1 (формула присоединения)

В этом разделе я буду использовать только классы Черна $S_i = S_i(\mathrm{T}G)$ касательного расслоения.

Доказательство является модификацией доказательства Бернштейна формулы (1) в торическом случае. Я буду использовать те же идеи.

Обозначим за f линейную функцию, определяющую гиперплоскость H, то есть $H = \{x \in \mathrm{End}(V) : f(x) = C\}$ для некоторой константы C. Из некомпактной теории Морса [18] следует, что $(-1)^{n-1}\chi(\pi)$ равно числу критических точек функции f, ограниченной на $\pi(G)$ (в [22] можно найти несколько доказательств в точности этого утверждения разными методами). Давайте выразим число критических точек через степени классов Черна $\pi(S_i)$.

Напомним, что векторные поля $v_1, \ldots, v_n$ на G были заданы формулой $v_i(g) = X_i g - gY_i$. Заметим, что для любого представления π группы G прямые образы $\pi_* v_i$ корректно определены (они задаются формулой $d\pi(X_i)\pi(g) - \pi(g)d\pi(Y_i)$, где $d\pi : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ — производное отображение) и могут быть очевидным образом продолжены до линейных векторных полей на всём пространстве $\mathrm{End}(V)$. А именно, для $x \in \mathrm{End}(V)$ положим $\pi_* v_i(x) = d\pi(X_i)x - xd\pi(Y_i)$.

Допуская вольность в обозначениях, я обозначу $\pi_* v_i$ также за v_i и буду писать S_i вместо $\pi(S_i)$ на протяжении всего доказательства.

Поскольку S_1 имеет коразмерность 1 в G, всегда можно выбрать гиперплоскость H так, чтобы все критические точки функции f, ограниченной на G, лежали вне S_1. Ясно, что каждая критическая точка x удовлетворяет n линейным соотношениям вида $f(v_i(x)) = 0$. Обратное также верно для точек вне S_1, поскольку во всех этих точках векторные поля $v_1, \ldots, v_n$ порождают касательное пространство к G. Обозначим за $V_n(f)$ векторное подпространство, заданное уравнениями $f(v_i(x)) = 0$, где $i = 1, \ldots, n$. Оно имеет коразмерность n. Обозначим за $S(f)$ множество всех критических точек функции f, ограниченной на G. Мы выяснили, что $S(f) = G \cap V_n(f) \setminus S_1 \cap V_n(f)$. Оказывается, если f — общая, то все точки пересечения $G \cap V_n(f)$ трансверсальны, и их число равно степени группы G. Более того, верно такое утверждение.

Лемма 3.13. *Для всех $i = 1, \ldots, n$ рассмотрим подпространство $V_i(f) \subset \mathrm{End}(V)$ коразмерности i, заданное i уравнениями $f(v_1(x)) = \ldots = f(v_i(x)) = 0$. Если f — общая линейная функция, то*

1) все точки пересечения в $S_{n-i} \cap V_i(f)$ трансверсальны, и их число равно степени подмногообразия S_{n-i};

2) пересечение $S_{n-i+2} \cap V_i(f)$ пусто (или другими словами, все точки пересечения $S_{n-i+1} \cap V_i(f)$ лежат вне S_{n-i+2}).

Отложим доказательство этой леммы до следующего подраздела. Из леммы следует, что $\#S(f) = \deg G - \#(S_1 \cap V_n(f))$. Осталось вычислить $\#(S_1 \cap V_n(f))$. Здесь мы можем использовать индукцию. Действительно, вторая часть Леммы 3.13 немедленно влечёт за собой, что пересечение $S_{n-i+1} \cap V_i(f)$ совпадает с разностью $S_{n-i+1} \cap V_{i-1}(f) \setminus S_{n-i+2} \cap V_{i-1}$. Таким образом, $\#(S_1 \cap V_n(f)) = \deg(S_1) - \#(S_2 \cap V_{n-1}(f))$, и мы можем продолжить доказательство по индукции.

Таким образом, мы доказали следующую формулу

$$\#S(f) = \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^{n-i+1} \#(S_i \cap V_{n-i}(f)).$$

По Лемме 3.13 число $\#(S_i \cap V_{n-i}(f))$ равно $\deg(S_i)$. Это завершает доказательство Теоремы 3.1.

Доказательство Леммы 3.13. Сначала я рассмотрю более общую ситуацию. Пусть $X \subset W$ — неприводимое замкнутое аффинное многообразие в аффинном пространстве $W = \mathbb{C}^N$, и пусть $l_1(x), \ldots, l_m(x)$ — это m линейных векторных полей на W. Следующее предложение аналогично Лемме 3.13 и выполняется в предположении, что векторные поля $l_1, \ldots, l_m$, ограниченные на X, не слишком вырождаются на бесконечности. Это можно формализовать так. Обозначим за $C_X \subset W$ асимптотический конус многообразия X, то есть коническое многообразие, проективизация которого в $\mathbb{P}(C_X) \subset \mathbb{CP}^{N-1}$ совпадает с границей по Зарисскому многообразия X в $\mathbb{CP}^N$. За $X_i \subset W$ обозначим i-тый цикл вырождения векторных полей $l_1, \ldots, l_m$, то есть $X_i = \{x \in W : l_1(x), \ldots, l_{m-i+1}(x)$ линейно зависимы$\}$.

Предложение 3.14. *Предположим, что выполнены следующие условия:*

1) в каждой точке $x \in X_i \cap X$ пересечение касательных пространств $\mathrm{T}_x X_i$ и $\mathrm{T}_x X$ имеет коразмерность по крайней мере i в $\mathrm{T}_x X$,

2) пересечение $X_i \cap C_X$ имеет коразмерность по крайней мере i в C_X.

Для общей линейной функции f на W рассмотрим векторное пространство $V_f \subset \mathbb{CP}^N$ коразмерности m, заданное уравнениями $f(l_1(x)) = \ldots = f(l_m(x)) = 0$. Тогда

1. *Если* $\dim X = m$, *то все точки пересечения $X \cap V_f$ трансверсальны, и их число равно степени многообразия X, то есть $\#(X \cap V_f) = \mathrm{deg} X$.*

2. *Если* $\dim X < m$, *то $X \cap V_f$ пусто.*

Доказательство. Сначала докажем, что для общей функции f подпространство V_f не пересекает X на бесконечности, то есть V_f пересекает асимптотический конус многообразия X только в нуле. Для этого рассмотрим подмногообразие $D \subset W^*$ всех линейных функций f на W, таких что $\mathbb{P}(V_f)$ пересекает $\mathbb{P}(C_X)$. Достаточно показать, что размерность подмногообразия D меньше чем N. Действительно, в этом случае дополнение к D в W^* — открытое плотное подмножество, и для любой функции f из дополнения, подпространство V_f пересекает C_X только в нуле. Давайте оценим размерность подмногообразия D. Рассмотрим подмногообразие $\tilde{D} \subset \mathbb{P}(C_X) \times W^*$, состоящее из всех пар (z, f), таких что $\mathbb{P}(V_f)$ содержит z. Тогда D — образ многообразия $\tilde{D}$ при его проекции на W^*. Поэтому размерность многообразия D меньше либо равна размерности $\tilde{D}$. Фильтрация $X_m \cap C_X \subset X_{m-1} \cap C_X \subset \ldots \subset X_1 \cap C_X \subset C_X$ индуцирует фильтрацию на $\mathbb{P}(C_X)$. Рассмотрим проекцию многообразия $\tilde{D}$ на $\mathbb{P}(C_X)$. Прообраз точки $z \in \mathbb{P}((X_i \setminus X_{i+1}) \cap C_X)$ имеет размерность $N-m+i$. Действительно, он совпадает с подпространством в W^*, заданным линейной системой ранга $m-i$ (которая состоит из m линейных уравнений $f(l_1(x)) = \ldots = f(l_m(x)) = 0$). Таким образом, размерность прообраза множества $\mathbb{P}((X_i \setminus X_{i+1}) \cap C_X)$ имеет размерность не больше чем $(N - m + i) + (m - i - 1) = N - 1$. Следовательно размерность многообразия $\tilde{D}$ не больше чем $N - 1$.

Заметим, что те же самые рассуждения доказывают вторую часть Предложения 3.14.

Осталось доказать, что все точки пересечения $X \cap V_f$ трансверсальны для общей функции f. Первое условие Предложения 3.14 влечёт, что для любой точки $x \in X$ касательное пространство T_xX и X_i пересекают друг друга трансверсально. Поэтому мы можем применить к T_xX первую часть доказательства Предложения 3.14 и получить, что для общей функции f подпространства T_xX и V_f пересекают друг друга в одной точке. $\square$

Чтобы завершить доказательство Леммы 3.13, применим Предложение

3.14 к $W = \mathrm{End}(V)$, $X = S_i$ и векторным полям $l_1 = v_1, \ldots, l_{n-i+1} = v_{n-i+1}$. Нам достаточно проверить, что векторные поля $v_1, \ldots, v_n$ и соответствующее им подмногообразие S_i удовлетворяют условиям невырожденности Предложения 3.14. Первое условие следует из доказательства Леммы 3.6. Второе условие также несложно вывести из того, что мы уже доказали. Однако, я приведу прямое самодостаточное доказательство. Оно объясняет, почему идея Бернштейна работает для сумм лево- и правоинвариантных векторных полей, хотя и не работает, если мы берём только лево- (или только право-)инвариантные поля.

Напомним, что есть естественное семейство деформаций векторных полей $v_1, \ldots, v_n$, параметризованное элементами алгебры $\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}$. Я покажу, что общее шевеление полей $v_1, \ldots, v_n$ внутри этого семейства удовлетворяет второму условию невырожденности.

Пусть $C_\pi(S_i)$ — асимптотический конус подмногообразия $S_i \subset \mathrm{End}(V)$. Асимптотический конус $C_\pi(G)$ самой группы является объединением конечного числа орбит при стандартном действии группы $G \times G$ на $\mathrm{End}(V)$. Заметим, что $v_1, \ldots, v_n$ могут быть любыми полями, приходящими из этого действия. Возьмём любую точку $x \in C_\pi(S_i)$. Рассмотрим её орбиту при стандартном действии Ясно, что любой набор из n векторов в касательном пространстве к орбите в точке x может быть реализован как значения векторных полей $v_1, \ldots, v_n$ в x. В частности, если x принадлежит пересечению $C_\pi(S_i)$ с орбитой коразмерности меньше либо равной i, то можно пошевелить $v_1, \ldots, v_{n-i+1}$ так, чтобы они были по-прежнему линейно зависимы, но $v_1, \ldots, v_{n-i}$ уже были бы линейно независимы. Тогда, точка x принадлежит $C_\pi(S_i)$, но не принадлежит $C_\pi(S_{i+1})$. Поскольку число орбит конечно, мы получаем, что коразмерность $C_\pi(S_{i+1})$ в $C_\pi(S_i)$ не меньше чем 1.

Чтобы получить вторую часть Леммы 3.13 применим Предложение 3.14 к S_i и $n-i+1$ векторным полям $v_2, \ldots, v_{n-i+2}$. Пошевелив последнее векторное поле v_{n-i+2}, мы можем сделать эти поля линейно независимыми в общей точке многообразия S_i, не изменив при этом S_i.

3.5 Степени первого и последнего классов Черна

Вычисляя эйлерову характеристику $\chi(\pi)$ общего гиперплоского сечения, мы выразили её через степени классов Черна S_i. Следующий вопрос — как посчитать эти степени. То есть нужно найти индекс пересечения $\pi(S_i)$ с $n-i$ общими гиперплоскими сечениями, соответствующими представлению π. Если S_i — полное пересечение общих гиперплоских сечений, соответствующих некоторым представлениям группы G, то ответ на этот вопрос даётся формулой Бриона–Казарновского. В этом разделе, я докажу, что это имеет место для S_1. Я также могу вычислить степени последнего класса Черна S_{n-k}, потому что S_{n-k} — объединение нескольких максимальных торов (см. Следствие 3.12). Есть надежда, что явный ответ можно получить и для остальных S_i.

Из доказательства Леммы 3.6 (см. Замечание 3.7) следует, что $S_1 \subset G$ задано уравнением $det(\mathrm{Ad}(g) - A) = 0$ для общего $A \in \mathrm{End}(\mathfrak{g})$. Функция $det(\mathrm{Ad}(g) - A)$ — линейная комбинация матричных элементов всех внешних степеней присоединённого представления. Следовательно, уравнение на S_1 является уравнением гиперплоского сечения, соответствующего сумме всех внешних степеней присоединённого представления. Обозначим это представление через σ. Легко проверить, что весовой многогранник P_σ

совпадает с весовым многогранником неприводимого представления θ со старшим весом 2ρ (здесь ρ обозначает сумму всех фундаментальных весов). Следовательно, степень S_1 может быть найдена по формуле Бриона-Казарновского [2, 23] для представлений θ и π. Остаётся доказать, что S_1 — общее гиперплоское сечение, то есть замыкание S_1 в X_σ пересекает все $G \times G$-орбиты по подмногообразиям коразмерности не меньше чем 1. Из замечания после Леммы 3.6 и Примера 1 следует, что это верно для чудесной компактификации, а X_σ изоморфно чудесной компактификации по Теореме 3.2 (поскольку $P_\sigma = P_\theta$).

Последний класс Черна S_{n-k} — несвязное объединение максимальных торов. Их число равно степени общей присоединённой орбиты в $\mathfrak{g}$. Последняя равна порядку группы Вейля W. Обозначим за $[T]$ класс максимального тора в кольце условий $C^*(G)$. Тогда в $C^*(G)$ выполняется такое тождество:

$$[S_{n-k}] = |W|[T].$$

Степень многообразия $\pi(T)$ может быть посчитана по формуле Д.Бернштейна, Хованского и Кушниренко [24].

3.6 Примеры

$\mathbf{G = SL_2(\mathbb{C})}$. Рассмотрим тавтологическое представление группы G, а именно, $G = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4 : ad - bc = 1\}$. Поскольку размерность группы G равна трём, а ранг равен единице, то по Лемме 3.11 мы получаем, что есть только два нетривиальных класса Черна: S_1 и S_2. Давайте применим результаты предыдущих разделов, чтобы найти их. Первый класс Черна S_1 — общее гиперплоское сечение, связанное со второй симметрической степенью тавтологического представления, то есть с представлением

$SL_2(\mathbb{C}) \to SO_3(\mathbb{C})$. Другими словами, это пересечение группы $SL_2(\mathbb{C})$ с квадрикой в $\mathbb{C}^4$. Второй класс Черна S_2 (он же и последний) является объединением двух сдвигов максимальных торов.

Пусть π — точное представление группы $SL_2(\mathbb{C})$. Это сумма неприводимых представлений группы SL_2. Любое неприводимое представление группы SL_2 изоморфно $i-$той симметрической степени тавтологического представления для некоторого i. Его весовой многогранник — отрезок $[-i, i]$. Поэтому весовой многогранник представления π — отрезок $[-n, n]$, где n — наибольший показатель симметрических степеней в π. Матричные элементы представления π — многочлены от a, b, c, d степени n. В этом случае, легко найти степени подмногообразий G, S_1 и S_2 по теореме Безу. Получаем deg $\pi(G) = 2n^3$, deg $\pi(S_1) = 4n^2$, deg $\pi(S_2) = 4n$. Поэтому эйлерова характеристика $\chi(\pi)$ равна $2n^3 - 4n^2 + 4n$. Этот ответ был впервые получен К. Каве другими методами [22].

Если π не является точным, то есть $\pi(SL_2(\mathbb{C})) = SO_3(\mathbb{C})$, то очевидно что, $\chi(\pi)$ в два раза меньше и равна $n^3 - 2n^2 + 2n$.

$\mathbf{G} = (\mathbb{C}^*)^{\mathbf{n}}$ — комплексный тор. В этом случае все лево-инвариантные поля также право-инвариантны, поскольку группа коммутативна. Следовательно, они линейно независимы во всех точках группы $G = (\mathbb{C}^*)^n$, если их значения в единичном элементе линейно независимы. Поэтому все подмногообразия S_i пусты, и в правой части формулы (2) остаётся единственное слагаемое

$$\chi(\pi) = (-1)^{n-1} \mathrm{deg}\ \pi(G).$$

Это в точности формула, доказанная Д.Бернштейном, А.Хованским и А.Кушниренко [24].

Литература

[1] A. Braverman, *On Euler characteristic of equivariant sheaves,* Adv. Math. **179**, No.1 (2003), 1-6

[2] Michel Brion, *Groupe de Picard et nombres caracteristiques des varietes spheriques*, Duke Math J. **58**, No.2 (1989), 397-424

[3] C. De Concini, *Equivariant embeddings of homogeneous spaces*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Berkeley, California, USA, 1986), 369-377

[4] C. De Concini and C. Procesi, *Complete symmetric varieties I,* Lect. Notes in Math. **996**, Springer, 1983

[5] C. De Concini and C. Procesi, *Complete symmetric varieties II Intersection theory,* Advanced Studies in Pure Mathematics **6** (1985), Algebraic groups and related topics, 481-513

[6] S. Evens, I. Mirkovic, *Characteristic cycles for the loop Grassmannian and nilpotent orbits,* Duke Math. J. **97**, No.1 (1999), 109-126.

[7] J. Franecki, *The Gauss map and Euler characteristic on algebraic groups,* Thesis, Northwestern University, Evanston, Illinois, 1998.

[8] J. Franecki, M. Kapranov, *The Gauss map and a noncompact Riemann-Roch formula for constructible sheaves on semiabelian varieties*, Duke Math. J. **104**, No.1 (2000),171-180.

[9] W. Fulton, R. MacPherson, *Categorical framework for the study of singular spaces,* Mem. Amer. Math. Soc. **31** no. 243 (1981).

[10] W. Fulton, *Intersection theory,* Springer, 1984

[11] O. Gabber, F. Loeser, *Faisceaux pervers l-adiques sur un tore,* Duke Math. J. **83**, No.3 (1996), 501-606.

[12] I.M. Gelfand, M.M. Kapranov, V.A. Vassiliev, *General hypergeometric functions on complex Grassmannians*, Functional Anal. Appl. **21** No.1 (1987), 19-31

[13] I.M. Gelfand, M.M. Kapranov, A.V. Zelevinsky, *Hypergeometric functions and toric varieties*, Functional Anal. Appl. **23** No. 2 (1989), 94-106

[14] I.M. Gelfand, M.M. Kapranov, A.V. Zelevinsky, *Generalized Euler integrals and A-hypergeometric functions*, Adv. Math. **84** (1990), 255-271

[15] V. Ginsburg, *Characteristic varieties and vanishing cycles,* Invent. Math. **84** (1986), 327-402.

[16] M. Goresky, R. MacPherson, *Stratified Morse theory,* Springer, 1986.

[17] P. Griffiths, J. Harris, *Principles of algebraic geometry,* Pure and Applied Mathematics, Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 1978

[18] M. Goresky and R. MacPherson, *Intersection homology II,* Invent. Math. **71** (1983), 77-129

[19] M. Kapranov, *A characterization of A-discriminantal hypersurfaces in terms of the logarithmic Gauss map,* Math. Ann. **290** (1991), 277-285

[20] M. Kapranov, *Hypergeometric functions on reductive groups,* Integrable systems and algebraic geometry (Kobe/Kyoto, 1997), 236–281, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1998.

[21] M. Kashiwara, P. Schapira, *Sheaves on manifolds*, Springer, 1990.

[22] Kiumars Kaveh, *Morse theory and the Euler characteristic of sections of spherical varieties,* Thesis, University of Toronto, Toronto, Ontario, 2002 math.AG/0112064

[23] B.Ya. Kazarnovskii, *Newton polyhedra and the Bezout formula for matrix-valued functions of finite-dimensional representations,* **21** No. 4 (1987), 319–321

[24] A.G. Khovanckii, *Newton polyhedra, and the genus of complete intersections,* Functional Anal. Appl. **12**, no. 1 (1978), 38–46

[25] A. Khovanskii, A. Pukhlikov, *Integral transforms based on Euler charcteristic and their applications,* Integral Transforms and Special functions, **1**, No.1 (1993), 19-26.

[26] Valentina Kiritchenko, *The monodromy group of generalized hypergeometric equations*, Diploma, Independent University of Moscow, Moscow, 2001 [In Russian]

[27] Valentina Kiritchenko, *A Gauss-Bonnet theorem for constructible sheaves on reductive groups*, Mathematical Research Letters **9**, No.6 (2002), 791-800

[28] Valentina Kiritchenko, *Chern classes for reductive groups and an adjunction formula*, Annales de l'Institut Fourier, **56** no. 3 (2006), 1225-1256

[29] Valentina Kiritchenko, *On intersection indices of subvarieties in reductive groups*, Moscow Mathematical Journal, **7** no.3 (2007), 489-505

[30] Valentina Kiritchenko, *Flag varieties and Gelfand–Zetlin polytopes,* Oberwolfach Reports, Report 01/2009, 16–19

[31] Valentina Kiritchenko, *Gelfand–Zetlin polytopes and flag varieties*, International Mathematics Research Notices (2009), Article ID rnp223, 20 pages, doi:10.1093/imrn/rnp223

[32] S.L. Kleiman, *The transversality of a general translate,* Compositio Mathematica **28** Fasc.3 (1974), 287-297

[33] F. Loeser, C. Sabbah, *Caractérisation des $\mathcal{D}$-modules hypergéométriques irréductibles sur le tore,* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **312** No.10 (1991), 735-738; *II*, **315** No.12 (1992), 1263-1264

[34] D. Luna, Th. Vust, *Plongements d'espaces homogènes,* Comment. Math. Helv. **58** (1983), no. 2, 186-245

[35] R. MacPherson, *Global questions in the topology of singular spaces,* Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Warszava, 1983), 213-235

[36] I. Mirkovic, K. Vilonen, *Characteristic varieties of character sheaves,* Invent. Math. **93** (1988), 405-418

[37] D. Mumford, *Algebraic geometry I Complex projective varieties*, Springer, 1976.

[38] A. Okounkov, *Brunn-Minkowski inequality for multiplicities,* Invent. Math. **125** (1996), 405-411

[39] A. Okounkov, *Note on the Hilbert polynomial of a spherical variety,* Functional Anal. Appl. **31** No. 2 (1997), 138-140

[40] F.J. Servedio, *Prehomogeneous vector spaces and varieties*, Trans. Amer. Math. Soc. **176** (1973), 421-444

[41] O. Viro, *Some integral calculus based on Euler characteristic,* Lect. Notes in Math. no. 1346, Springer (1989), 127-138

[42] D. Timashev, *Equivariant compactifications of reductive groups*, Sb. Math. **194** (2003), no. 3-4, 589–616