Обобщенное гипергеометрическое уравнение

1 Введение

Важной характеристикой линейного дифференциального уравнения на расширенной комплексной плоскости является его группа монодромии. Если уравнение имеет особые точки $a_0, \ldots, a_k$, то решениями этого уравнения будут, вообще говоря, многозначные функции с точками ветвления $a_0, \ldots, a_k$. Группа монодромии действует линейными операторами на пространстве решений в односвязной окрестности фиксированной неособой точки. Действие операторов монодромии соответствует изменению решений при обходе особых точек вдоль всевозможных петель. Зная группу монодромии, мы знаем, как именно преобразуются решения при обходе вокруг особых точек. Например, если группа монодромии конечна, то решение, имеющее степенной рост при подходе к особым точкам, будет алгебраической функцией.

Группа монодромии порождается операторами $R_0, \ldots, R_k$, соответствующими однократному обходу вокруг точек $a_0, \ldots, a_k$ против часовой стрелки. При этом произведение всех образующих равно тождественному оператору. В случае, когда все решения уравнения имеют степенной рост при подходе к особым точкам, т. е. когда уравнение фуксово, собственные числа операторов $R_0, \ldots, R_k$ определяются по коэффициентам уравнения. Конечно, в большинстве случаев этих сведений не хватает для нахождения группы монодромии. Но существуют интересные классы фуксовых уравнений, для которых этого оказывается достаточно. К одному из таких классов и относится обобщенное гипергеометрическое уравнение.

Обобщенное гипергеометрическое уравнение или уравнение Похгаммера — это фуксово уравнение порядка n с тремя особыми точками $0, 1, \infty$. При этом в окрестности точки 1 оно имеет $n-1$ линейно независимое голоморфное решение. Если эти условия выполнены, то группа монодромии уравнения почти всегда находится по его коэффициентам. Для этого достаточно найти операторы R_0, R_1, зная собственные числа операторов $R_0, R_2 = (R_0R_1)^{-1}$. При этом нужно учитывать, что оператор R_1 имеет $n-1$ собственный вектор с собственным значением 1. Эта задача из линейной алгебры почти всегда имеет единственное решение, и матрицы операторов R_0, R_1 явно выписываются в подходящем базисе.

Уравнение Похгаммера является обобщением гипергеометрического уравнения Гаусса и сохраняет многие его важные свойства. Во-первых, как говорилось выше, группу монодромии уравнения Похгаммера почти всегда можно найти по его коэффициентам. Таким образом можно узнать, будет ли группа монодромии приводимой. Можно также узнать, когда операторы R_0, R_1, R_2 диагонализуемы, и тем самым выяснить, когда решения уравнения в окрестностях точек $0, 1, \infty$ не содержат логарифмов. Во-вторых, решения в окрестности точек 0 и ∞ можно разложить в ряды, обобщающие гипергеометрический ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_m(\beta)_m}{m!(\gamma)_m} z^m,$$

где $(\alpha)_0 = 1, (\alpha)_m = \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+m-1)$ при $m > 0$. Отношение соседних коэффициентов гипергеометрического ряда является отношением двух многочленов степени 2 от переменной m. Поэтому естественным обобщением является ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a_1)_m \ldots (a_n)_m}{m!(b_1+1)_m \ldots (b_{n-1}+1)_m} z^{m+\rho}. \tag{1}$$

Отношение его соседних коэффициентов равно

$$\frac{(a_1+m)\ldots(a_n+m)}{(m+1)(b_1+m+1)\ldots(b_{n-1}+m+1)} = \frac{Q(\rho+m)}{P(\rho+m+1)},$$

где P и Q — многочлены степени n. Следовательно, если ρ — один из корней многочлена P, то ряд (1) определяет в окрестности точки 0 решение дифференциального уравнения

$$P(\delta)w - zQ(\delta)w = 0, \tag{2}$$

где $\delta = z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dz}}$. Уравнение (2) и будет обобщенным гипергеометрическим уравнением.

2 Представления, определяемые собственными числами

Пусть A, B, C — три оператора в n-мерном пространстве V, композиция которых равна тождественному оператору. Пусть при этом оператор B имеет $n-1$ собственный вектор с собственным значением 1, и ни один из этих векторов не является собственным вектором оператора A. В этом пункте доказывается, что тогда матрицы операторов A, B, C в подходящем базисе явно выписываются по собственным числам операторов A и C.

Рассмотрим произвольную группу G, порожденную двумя образующими x и y, и некоторое ее представление $S : G \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ в пространстве V. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — собственные значения оператора $S(x)$, а $i_1, \ldots, i_k$ — их кратности. Обозначим за $P(z) = (z-\lambda_1)^{i_1} \ldots (z-\lambda_k)^{i_k}$ и $Q(z)$ характеристические многочлены операторов $S(x)$ и $S(xy)$ соответственно.

Предложение 1. *Пусть представление S таково, что оператор $S(y)$ имеет $(n-1)$-одномерное собственное подпространство U с собственным значением 1.*

1. *Если представление S не имеет инвариантного подпространства, в ограничении на которое оператор $S(y)$ тождественен, то оно однозначно с точностью до сопряжения определяется собственными числами операторов $S(x)$ и $S(xy)$. А именно: в пространстве V можно выбрать базис, в котором матрицы операторов $S(x)$ и $S(y)$ имеют вид*

$$S(x) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & & \ldots & & & & 0 \\ 1 & \lambda_1 & & & & & & \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \lambda_1 & & & & \\ \vdots & & 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ & & & & & \lambda_{k'} & & \\ & & & & & 1 & \ddots & \\ & & & & & 0 & \ddots & \lambda_{k'} & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & & 0 & \ldots & 1 & \lambda_k \end{pmatrix}, \quad S(y) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & z_1 \\ 0 & 1 & & & & & & z_2 \\ & & \ddots & & & & & \vdots \\ & & & 1 & & & & z_{i_2-1} \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ & & & & 1 & & & z_{i_{k'}} \\ & & & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & & & 1 & z_{n-1} \\ 0 & & & \ldots & & & 0 & z_n \end{pmatrix},$$

   где $k' = k$, если $i_k > 1$, и $k' = k-1$, если $i_k = 1$, $z_1, \ldots, z_n$ — коэффициенты в разложении на простейшие дроби рациональной функции $\frac{Q(z)}{\hat{P}(z)}$, а многочлен $\hat{P}(z)$ равен $P(z)\frac{z}{z-\lambda_k}$. В частности, это верно для неприводимого представления S.

2. *Представление S неприводимо тогда и только тогда, когда множества собственных чисел операторов $S(x)$ и $S(xy)$ не пересекаются.*

Доказательство. 1) Из условия утверждения следует, что подпространство U не содержит собственных векторов оператора $S(x)$. Отсюда, в частности, следует, что все собственные подпространства оператора $S(x)$ одномерны, поэтому его жорданова нормальная форма полностью определяется собственными значениями и их кратностями. Возьмем базис $v_1, \ldots, v_n$, в котором оператор $S(x)$ приводится к нижнетреугольной жордановой нормальной форме, причем v_n — собственный вектор с собственным значением λ_k. Базис можно выбрать таким образом, что все базисные векторы, несобственные для оператора $S(x)$ будут лежать в подпространстве U. Построим теперь новый базис $e_1, \ldots, e_n$ следующим образом. Положим $e_i = v_i$, если вектор v_i — несобственный вектор оператора $S(x)$, или если $i = n$. Если же вектор v_i — собственный, то в качестве e_i возьмем вектор из одномерного подпространства $< v_i, v_n > \cap U$, нормированный условием $S(x)e_i - v_n \in U$. Тогда в полученном базисе матрицы операторов $S(x)$, $S(y)$ имеют вид

$$S(x) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ \alpha & \lambda_k \end{pmatrix}, \quad S(y) = \begin{pmatrix} E & z \\ 0 & z_n \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где α — строка $1 \times (n-1)$, в которой на i—том месте стоит 0, если $e_i = v_i$, и 1 в противном случае, E — единичная матрица порядка $(n-1) \times (n-1)$, z — столбец $(n-1) \times 1$. Обозначим числа, стоящие в столбце z за $z_1, \ldots, z_{n-1}$. Перемножив матрицы $S(x)$ и $S(y)$, получим матрицу оператора $S(xy)$ с известными собственными значениями

$$S(xy) = \begin{pmatrix} A & Az \\ \alpha & \lambda_k z_n + \alpha z \end{pmatrix}.$$

Выразим коэффициенты характеристического многочлена этой матрицы через неизвестные $z_1, \ldots, z_n$. Получим, что

$$Q(z) = (z-\lambda_1)^{i_1} \ldots (z-\lambda_k)^{i_k - 1} z\Big(1 + \frac{\lambda_k z_n}{z} + \frac{z_{i_1}}{z-\lambda_1} + \frac{z_{i_1 - 1}}{(z-\lambda_1)^2} + \ldots + \frac{z_1}{(z-\lambda_1)^{i_1}} + \ldots + \frac{z_{n-1}}{z-\lambda_{k'}} + \ldots + \frac{z_{n-i_{k'}+1}}{(z-\lambda_{k'})^{i_{k'}-1}}\Big).$$

Таким образом, неизвестные $z_1, \ldots, z_n$ есть коэффициенты в разложении на простейшие дроби рациональной функции $\frac{Q(z)}{\hat{P}(z)}$. Поэтому числа $z_1, \ldots, z_n$ всегда однозначно восстанавливаются по характеристическим многочленам операторов $S(x)$ и $S(xy)$.

2) Если собственный вектор v оператора $S(x)$ лежит в подпространстве U, то вектор v будет также собственным вектором оператора $S(xy)$ с тем же собственным значением, поскольку $S(xy)v = S(x)S(y)v = S(x)v$. Следовательно, если операторы $S(x)$ и $S(xy)$ не имеют общих собственных значений, то условие **утверждения 1** выполнено, и в базисе $(e_1, \ldots, e_n)$ матрица оператора $S(y)$ имеет вид (1). Пусть представление S при этом имеет инвариантное подространство W. Тогда W содержит вектор w, не принадлежащий подпространству U. Вектор $w' = S(y)w - w \in W$, и первые $n-1$ координата этого вектора пропорциональны $(z_1, \ldots, z_{n-1})$. Ни одно из этих чисел не равно нулю, т.к. многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ не имеют общих множителей. Поэтому наименьшее подпространство, содержащее вектор w' и инвариантное относительно оператора $S(x)$, — это само V. Следовательно, $W = V$, и представление S неприводимо.

Обратно, если одно из собственных значений оператора $S(x)$ совпадает с собственным значением оператора $S(xy)$, то либо собственный вектор оператора $S(x)$ лежит в подпространстве U, либо вновь применимо **утверждение 1**, и при этом одно из чисел $z_1, \ldots, z_n$ равно нулю. Пусть $z_i = 0$. В этом случае имеем инвариантное подпространство W, натянутое на все базисные векторы кроме вектора e_i. □

Замечание 1. *Если условия* **предложения 1** *не выполняются, и часть выбранных в его доказательстве базисных векторов $e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}$, где $j_1, \ldots, j_k \in \{1, \ldots, n-1\}$ является также собственными векторами оператора $S(x)$, мы тем не менее можем, действуя так же как в доказательстве, найти неизвестные z_i для всех $i \neq j_1, \ldots, j_k$.*

3 Решения уравнения Похгаммера в окрестностях нуля и бесконечности

Уравнение Похгаммера (2) имеет решения, которые в окрестности точки 0 или ∞ раскладываются в обобщенные гипергеометрические ряды. В этом пункте изучается вопрос, сколько решений такого вида может иметь уравнение Похгаммера в зависимости от взаимного расположения нулей полиномов P и Q. Пусть k — число различных по модулю $\mathbb{Z}$ корней многочлена P. Если корни многочленов P и Q различны по модулю $\mathbb{Z}$, то есть ровно k линейно независимых решений, которые в окрестности нуля раскладываются в обобщенные гипергеометрические ряды. Если же есть совпадающие по модулю $\mathbb{Z}$ корни, то таких решений может быть больше.

Перепишем обобщенное гипергеометрическое уравнение (2) в виде

$$(1-z)z^n w^{(n)} + (A_1 z + B_1) z^{n-1} w^{(n-1)} + \ldots + (A_n z + B_n) w = 0, \tag{3}$$

Коэффициенты $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_n$ легко выражаются через коэффициенты многочленов P и Q из следующих тождеств

$$x(x-1)\ldots(x-n+1) + A_1 x(x-1)\ldots(x-n+2) + \ldots + A_n = P(x)$$

$$x(x-1)\ldots(x-n+1) + B_1 x(x-1)\ldots(x-n+2) + \ldots + B_n = Q(x).$$

Особыми точками уравнения (3) будут 0,1 и ∞, причем эти точки фуксовы. Показатели $\rho_1, \ldots, \rho_n$ в точке 0, как легко проверить для уравнения вида (2), совпадают с корнями многочлена P, а корни многочлена Q совпадают с числами $-\tau_1, \ldots, -\tau_n$, где $\tau_1, \ldots, \tau_n$ — показатели в точке ∞. Показатели в точке 1, как легко проверить для уравнения вида (3), равны $0, 1, \ldots, n-2, \sigma$, где $\sigma = n - 1 - \sum_{i=1}^n \rho_i + \sum_{i=1}^n \tau_i$ в силу соотношения Фукса.

Для удобства введем следующее определение

Определение 1. *Обобщенным гипергеометрическим рядом ${}_pF_q(a_1, \ldots, a_p; b_1, \ldots, b_q; z)$, зависящем от $p + q$ параметров $a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_q$, называется ряд*

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a_1)_m \ldots (a_p)_m}{m!(b_1+1)_m \ldots (b_q+1)_m} z^{\alpha}.$$

Упорядочим показатели $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ таким образом, чтобы для некоторых $i_2 < i_3 < \ldots < i_k \in \{2, \ldots, n\}$ и $i_1 = 1, i_{k+1} = n+1$ множества $\{\rho_1, \ldots, \rho_{i_2-1}\}, \{\rho_{i_2}, \ldots, \rho_{i_3-1}\}, \ldots, \{\rho_{i_k}, \ldots, \rho_n\}$ совпали с классами эквивалентности сравнимых по модулю $\mathbb{Z}$ показателей, и действительные части показателей из одного множества образовали неубывающую последовательность.Теперь из рекуррентного соотношения (3) вытекает следующее предложение

Предложение 2. *Для показателя ρ_i решение вида $z^{\rho_i} F(z)$, где $F(z)$ — голоморфная в нуле функция, и $F(0) \neq 0$, существует тогда и только тогда, когда выполняется одно из двух условий*

1. $i = i_1, \ldots, i_k$ *Тогда для* $i = 1$

$$F(z) =_n F_{n-1}(\rho_1 + \tau_1, \ldots, \rho_1 + \tau_n; \rho_1 - \rho_2, \ldots, \rho_1 - \rho_n; z).$$

2. $i_l < i < i_{l+1}$ и при этом для некоторого $j = 1, \dots, n$ верно что $\rho_i + \tau_j \in \{1 - (\rho_{i-1} - \rho_i), \dots, 0\}$. Тогда

$$F(z) = 1 + \sum_{m=1}^{-\tau_j - \rho_i} \frac{Q(\rho_i)Q(\rho_i + 1)\dots Q(\rho_i + m - 1)}{P(\rho_i + 1)P(\rho_i + 2)\dots P(\rho_i + m)} z^m.$$

Доказательство. Будем искать решение в виде ряда $\sum_{m=0}^{\infty} u_i z^{m+\rho_i}$ с условием $u_0 = 1$. Подставив такой ряд в уравнение (2), получим рекуррентное соотношение на коэффициенты ряда

$$u_m Q(m + \rho_i) = u_{m+1} P(m + \rho_i + 1).$$

Последовательность коэффициентов, удовлетворяющая этому соотношению, существует ровно в двух случаях. В первом случае $P(m + \rho_i) \neq 0$ ни при каких натуральных m. Получаем решение из первого пункта предложения. Во втором случае $P(m + \rho_i) = 0$ при некотором натуральном m, но при этом $Q(m' + \rho_i) = 0$ при натуральном m', таком что $m' < m$. Получаем решение из второго пункта. □

Замечание 2. *Это предложение также справедливо для решений уравнения (2) в окрестности бесконечности, представимых в виде $t^{\tau_i} F(t)$, где $t = \frac{1}{z}$, F — голоморфная в нуле функция, и $F(0) \neq 0$. Нужно лишь всюду заменить z на t, а ρ_i и τ_i поменять местами.*

4 Решения уравнения Похгаммера в окрестности единицы

В этом пункте доказывается, что в окрестности единицы обобщенное гипергеометрическое уравнение всегда имеет $n - 1$ линейно независимое голоморфное решение.

Сделаем в уравнении (3) замену $t = z - 1$. Тогда оно примет вид

$$w^{(n)} + \frac{A'_{n-1} t + B'_{n-1}}{(1+t)t} w^{(n-1)} + \dots \frac{A'_0 t + B'_0}{(1+t)^n t} w = 0, \tag{4}$$

где $B'_{n-1} = n - 1 - \sigma$.

Предложение 3. *Если показатель $\sigma \notin \{n-1, n, \dots\}$, то каждому из показателей $0, \dots, n-1$ соответствует голоморфное в нуле решение уравнения (4), имеющее в нуле нуль кратности, равной показателю.*

Доказательство. Будем искать такие решения в виде ряда $\sum_{m=0}^{\infty} u_m t^m$. Подставив ряд в уравнение (4), получим рекуррентные соотношения на коэффициенты ряда

$$(i + n) \dots (i + 2)(i + 1 + B'_{n-1}) u_{n+i} = f_i(u_0, \dots, u_{n+i-1}),$$

где $u_i(a_0, \dots, u_{n+i-1})$ есть линейная комбинация коэффициентов $u_0, \dots, u_{n+i-1}$, а $i \in \{-1, 0, \dots\}$. В силу условия предложения коэффициент при u_{n+i} не обращается в ноль ни при каких $i \in \{-1, 0, \dots\}$, эти соотношения позволяют найти коэффициенты $u_{n-1}, u_n, \dots$ по произвольным наперед заданным коэффициентам $u_0, \dots, u_{n-2}$. Таким образом, в этом случае имеем $n - 1$ линейно независимое голоморфное решение. □

Замечание 3. *При $\sigma = n - 1, n, \dots$ всегда будет существовать решение голоморфное в единице и имеющее там ноль порядка σ. Решения же из* **предложения 3** *можно будет построить лишь для набора $u_0, \dots, u_{n-2}$, удовлетворяющего линейному соотношению*

$$f_{\sigma-n}(u_0, \dots, u_{\sigma-1}) = 0, \tag{5}$$

в котором вместо коэффициентов $u_{n-1}, \ldots, u_{\sigma-1}$ нужно поставить их выражение через начальные коэффициенты $u_0, \ldots, u_{n-2}$. Поэтому так заведомо можно построить $n-2$ линейно независимых решения. Таким образом, при произвольном σ всегда существует $n-1$ линейно независимое решение, голоморфное в единице.

5 Монодромия уравнения Похгаммера

Найдем группу монодромии обобщенного гипергеометрического уравнения в случае, когда ни одно из собственных решений оператора R_0 не голоморфно в единице.

Теорема 1. *Если для показателей обобщенного гипергеометрического уравнения выполняются следующие условия*

$$\rho_i + \tau_j \neq 0, -1, -2, \ldots \text{ при всех } i, j = 1, \ldots, n,$$

то его группа монодромии явно выписывается по собственным числам $e^{2\pi i\rho_1}, \ldots, e^{2\pi i\rho_n}$ и $e^{2\pi i\tau_1}, \ldots, e^{2\pi i\tau_n}$, и в подходящем базисе матрицы операторов R_0 и R_1 имеют вид

$$R_0 = \begin{pmatrix} e^{2\pi i\rho_1} & & \ldots & & & & 0 \\ 1 & & & & & & \\ 0 & \ddots & & & & & \\ & 1 & e^{2\pi i\rho_1} & & & & \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ & \vdots & & e^{2\pi i\rho_{i_{k'}}} & & & \\ & & \vdots & & \ddots & & \\ & & & \vdots & 1 & e^{2\pi i\rho_{i_{k'}}} & 0 \\ 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 1 & e^{2\pi i\rho_{i_k}} \end{pmatrix}, R_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & & & z_1 \\ 0 & 1 & & & & z_2 \\ & & & & & \vdots \\ & & 1 & & & z_{i_2-1} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ & & & 1 & & z_{i_{k'}} \\ & & & & & \vdots \\ & & & & 1 & z_{n-1} \\ 0 & & \ldots & & 0 & z_n \end{pmatrix},$$

где $z_1, \ldots, z_n$ — коэффициенты в разложении рациональной функции $\frac{z\prod_{i=1}^{n-1}(z-e^{2\pi i\rho_i})}{\prod_{i=1}^{n}(z-e^{2\pi i\tau_i})}$ на простейшие дроби, а $k' = k$ при $i_k < n$ и $k' = k-1$ при $i_k = n$.

Доказательство. По **предложению 3** оператор R_1 имеет $(n-1)$-одномерное собственное подпространство U с собственным значением 1, которое совпадает с подпространством решений, голоморфных в единице. Собственный вектор оператора R_0, лежащий в подпространстве U, имеет вид $z^{\rho_i}R(z)$, где $R(z)$ — многочлен. В то же время многочлен $R(z)$ совпадает с соответствующим обобщенным гипергеометрическим рядом. Но такой ряд содержит лишь конечное число членов, только если для некоторого $j = 1, \ldots, n$ $\rho_i + \tau_j \in -\mathbb{N} \cup \{0\}$. Поэтому при выполнении условий теоремы, подпространство V не содержит собственных векторов оператора R_0. Следовательно, применимо **утверждение 1 предложения 1**, которое и дает утверждение теоремы. $\square$

Непосредственным следствием **утверждения 2 предложения 1** является

Следствие 1. *Представление монодромии обобщенного гипергеометрического уравнения приводимо тогда и только тогда, когда для некоторых $i, j = 1, \ldots, n$ верно следующее*

$$\rho_i + \tau_j \in \mathbb{Z}.$$

Из **предложений 2 и 3** вытекает

Следствие 2. *1. Оператор монодромии R_0 диагонализуем тогда и только тогда, когда для каждого $l \in \{1, \dots, k\}$ и каждого $i \in \{i_l + 1, \dots, i_{l+1} - 1\}$ существует $j \in \{1, \dots, n\}$, для которого верно следующее*

$$\tau_j + \rho_i \in \{1 - (\rho_{i-1} - \rho_i), \dots, 0\}.$$

2. Оператор монодромии R_1 диагонализуем тогда и только тогда, когда при подходящей нумерации показателей $\tau_1, \dots, \tau_n$ выполняется одно из следующих условий

(a) $\sigma \notin \mathbb{Z}$

(b) $\sigma \in \{n-1, n, \dots\}$ и $\rho_i + \tau_i \in -\mathbb{N} \cup \{0\}$ при всех $i \in \{1, \dots, n\}$

(c) $\sigma \in -\mathbb{N}$ и $\rho_i + \tau_i \in \mathbb{N}$ при всех $i \in \{1, \dots, n\}$

Доказательство. (1) Непосредственное следствие **предложения 2**.

(2) По **предложению 3** оператор R_1 всегда имеет $n-1$ собственный вектор с собственным значением 1. Если $\sigma \notin \mathbb{Z}$, то есть n-ый собственный вектор с собственным значением $e^{2\pi i\sigma}$. Осталось выяснить, что происходит при целом σ. В этом случае оператор R_1 диагонализуем, только если он тождественен. Следовательно, все решения уравнения, собственные относительно оператора R_0, имеют вид $z^{\rho_i}R(z)$, где $R(z)$ — рациональная функция.

При $\sigma > 0$ функция $R(z)$ не имеет полюсов, т.е. является многочленом. Поэтому необходимым является условие $\rho_{i_l} + \tau_{i_l} \leqslant 0$ для всех $l = 1, \dots, k$. Следовательно, и для остальных показателей выполняются те же неравенства, т.к. показатели $\rho_1, \dots, \rho_n$ упорядочены по убыванию, а $\tau_1, \dots, \tau_n$ — по возрастанию. Это условие также является достаточным, если $l = n$, поскольку в этом случае для каждого $i = 1, \dots, n$ есть решение вида $z^{\rho_i}R(z)$. Таким образом, в этом случае существует базис решений, голоморфных в окрестности точки 1. В частности, существует $n-1$ решение, имеющее в точке 1 нули кратности $0, 1, \dots, n-2$. Поэтому коэффициенты при $u_0, \dots, u_{n-2}$ в соотношении (6), рассматриваемые как функции от показателей и ограниченные на плоскость $\rho_1 + \tau_1 = m_1, \dots, \rho_n + \tau_n = m_n$, где $m_1, \dots, m_n \in -\mathbb{N}$ обращаются в нуль почти во всех точках этой плоскости. Будучи аналитическими функциями они обращаются в ноль и в остальных точках плоскости. Следовательно, при $l < n$, т.е. в случае совпадения показателей $\rho_1, \dots, \rho_n$ по модулю $\mathbb{Z}$, условие (б) по-прежнему является достаточным.

При $\sigma < 0$ функция $R(z)$ может иметь полюс порядка $s = -\sigma$ в точке 1. В силу соотношения Фукса хотя бы одно из решений имеет такой вид, иначе мы возвращаемся к предыдущему пункту и получаем, что $n + s - 1 = \sum_{i=1}^n \rho_i + \sum_{i=1}^n \tau_i < 0$. Будем считать, что такое решение соответствует показателю ρ_1. Оно раскладывается в ряд $\sum_{m=1}^\infty u_m z^{\rho_1+m} = z^{\rho_1}_n F_{n-1}(\rho_1 + \tau_1, \dots, \rho_1 + \tau_n; \rho_1 - \rho_2, \dots, \rho_1 - \rho_n; z)$, причем коэффициенты u_m не обращаются в ноль ни при каком m. Ряд $\sum_{m=0}^\infty u_m z^m (1-z)^s$ является многочленом, т.е. содержит лишь конечное число членов. Поэтому для достаточно больших m, коэффициент $W(m)$ при z^{m+s}, который равен

$$W(m) = u_m \sum_{i=0}^{s} (-1)^i C_s^i \frac{Q(\rho_1 + m) \dots Q(\rho_1 + m + i)}{P(\rho_1 + m + 1) \dots P(\rho_1 + m + i + 1)}$$

обращается в ноль. Таким образом, функция $\frac{W(m)}{u_m}$ рациональна и обращается в ноль в бесконечном числе точек. Поэтому числитель этой функции, равный

$$Q(\alpha) \dots Q(\alpha+s-1) + \sum_{i=1}^{s-1} \{(-1)^s C_s^i Q(\alpha) \dots Q(\alpha+i-1) P(\alpha+i+1) \dots P(\alpha+s+1)\} + P(\alpha+1) \dots P(\alpha+s+1),$$

где $\alpha = m + \rho_1$, тождественно равен нулю. Подставим в этот многочлен $\alpha = -\tau_1, \dots, -\tau_n$. Получим, что $P(-\tau_i+1)\dots P(-\tau_i+s) = 0$, т.е. для каждого $i = 1, \dots, n$ существует $j = 1, \dots, s$, такое что $j - \tau_i$ — корень многочлена P. $\square$

6 Монодромия в явном базисе

Будем предполагать до конца этого параграфа, что все показатели $\rho_1, \dots, \rho_n$ различны по модулю $\mathbb{Z}$, и $\rho_i + \tau_j \notin -\mathbb{N} \cup \{0\}$ при $i, j = 1, \dots, n$. Это означает, что оператор монодромии R_0 диагонализуем, и все его собственные решения неголоморфны в точке 1. Тогда в пространстве решений уравнения Похгаммера в окрестности нуля можно выбрать базис $(F_1, \dots, F_n)$ из обобщенных гипергеометрических рядов вида (1), где $\rho = \rho_1, \dots, \rho_n$ соответственно. Найдем явный вид монодромии в этом базисе. Базис $(F_1, \dots, F_n)$ является собственным для оператора R_0. Поэтому осталось найти матрицу оператора R_1 в этом базисе. Для этого воспользуемся обобщенным тождеством Гаусса-Куммера

$$\lim_{z\to 1}(1-z)^{-\sigma}{}_nF_{n-1}(\rho_1+\tau_1, \dots, \rho_1+\tau_n; \rho_1-\rho_2, \dots, \rho_1-\rho_n; z) = \frac{\Gamma(\rho_1-\rho_2+1)\dots\Gamma(\rho_1-\rho_n+1)\Gamma(-\sigma)}{\Gamma(\rho_1+\tau_1)\dots\Gamma(\rho_1+\tau_n)}, \quad (6)$$

которое справедливо при $\operatorname{Re}\sigma < 0$. Будем пока предполагать, что $\sigma \notin \mathbb{Z}$. Обозначим за W_0 собственное решение оператора R_1 с собственным значением $e^{2\pi i\sigma}$, нормированное условием $\lim_{z\to 1}(1-z)^{-\sigma}W_0(z) = 1$.

Предложение 4. *Пусть $\sigma \notin \mathbb{Z}$. Решение W_0 выражается через решения $F_1, \dots, F_n$ следующим образом*

$$W_0 = \frac{1}{1-e^{2\pi i\sigma}}\sum_{i=1}^{n}\frac{c_iF_i}{e^{2\pi i\rho_i}\alpha_i},$$

где $c_1, \dots, c_n$ — коэффициенты в разложении на простейшие дроби рациональной функции $\frac{Q(z)}{P(z)}$, а $\alpha_i = \Gamma(-\sigma)\prod_{j=1}^{n}\frac{\Gamma(\rho_i-\rho_j+1)}{\Gamma(\rho_i+\tau_j)}$.

Доказательство. В качестве базиса $(v_1, \dots, v_n)$ из **предложения 1** возьмем базис $(\frac{F_1}{\alpha_1}, \dots, \frac{F_n}{\alpha_n})$. Выясним, как связаны между собой базисы $(v_1, \dots, v_n)$ и $(e_1, \dots, e_n)$. При $i = n$ решения e_n и v_n совпадают. При $i = 1, \dots, n-1$ решение $e_i = x_iv_i + y_iv_n$ определялось двумя условиями: решения e_i и $R_0e_i - e_n$ должны быть голоморфны в единице. Из последнего условия следует, что $y_i = (e^{2\pi i\rho_n} - e^{2\pi i\rho_i})^{-1}$. Из тождества (6) вытекает, что $F_i = \alpha_iW_0+$(голоморфное в единице решение). Поэтому решение e_i голоморфно в единице, если $x_i = -y_i$. Таким образом, базис $(e_1, \dots, e_n)$ явно выражается через базис $(F_1, \dots, F_n)$

$$e_i = (e^{2\pi i\rho_i} - e^{2\pi i\rho_n})^{-1}(\frac{F_i}{\alpha_i} - \frac{F_n}{\alpha_n}), i = 1, \dots, n-1 \text{ и } e_n = \frac{F_n}{a_n}.$$

Теорема 1 позволяет выразить собственный вектор W_0 оператора R_1 через базисные векторы $(e_1, \dots, e_n)$ с точностью до умножения на константу c.

$$cW_0 = e_n + \frac{1}{1-e^{2\pi i\sigma}}\sum_{i=1}^{n-1}z_ie_i.$$

Поскольку решения $e_1, \dots, e_{n-1}$ голоморфны в точке 1, то $\lim_{z\to 1}(1-z)^{-\sigma}(cW_0 - e_n) = 0$, откуда $c = 1$. Осталось подставить вместо решений $e_1, \dots, e_n$ их выражение через решения $F_1, \dots, F_n$ и заметить, что $c_i = z_ie^{2\pi i\rho_i}(e^{2\pi i\rho_i} - e^{2\pi i\rho_n})^{-1}$ при $i = 1, \dots, n-1$, и $\sum_{i=1}^{n}e^{-2\pi i\rho_i}c_i = \frac{Q(0)}{P(0)} = 1 - e^{2\pi i\sigma}$. $\square$

Из **предложения 4** вытекает следствие, верное уже при любом значении показателя σ.

Следствие 3. *Оператор монодромии R_1 переводит обобщенный гипергеометрический ряд F_i, где $i = 1, \ldots, n$ в следующую линейную комбинацию обобщенных гипергеометрических рядов $F_1, \ldots, F_n$*

$$F_i - \alpha_i \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j F_j}{e^{2\pi i \rho_j} \alpha_j}. \tag{7}$$

Доказательство. Если $\sigma \notin \mathbb{Z}$, то из обобщенного тождества Гаусса-Куммера следует, что $F_i = \alpha_i W_0 + G_i$, где решение G_i голоморфно в единице. Поэтому $R_1 F_i = e^{2\pi i \sigma} \alpha_i W_0 + G_i = (e^{2\pi i \sigma} - 1)\alpha_i W_0 + F_i$. Осталось применить **предложение 4**. Заметим, что коэффициенты линейной комбинации (7) являются голоморфными функциями от параметров $\rho_1, \ldots, \rho_n, \tau_1, \ldots, \tau_n$, если $\rho_i - \rho_j \notin \mathbb{Z}, \rho_i + \tau_j \notin -\mathbb{N} \cup \{0\}$ при $i, j = 1, \ldots, n$. Поэтому следствие верно и при целых значениях σ. $\square$