

Геометрия сферических многообразий.

1. ВВЕДЕНИЕ.

Первые примеры сферических многообразий пришли из исчислительной геометрии — области математики, популярной в девятнадцатом веке. Исчислительная геометрия считает число геометрических объектов с заданными свойствами. Большую роль в таких вычислениях играет понятие общего положения. Для иллюстрации приведём пару примеров.

Задача 1.1 (Аполлоний). *Сколько существует окружностей, касающихся заданных четырёх окружностей на плоскости?*

Оказывается, что для окружностей в общем положении ответ восемь, а вообще количество может и любым меньшим, кроме семи. Эта задача была решена ещё в Древней Греции.

Следующая задача была решена Шубертом в девятнадцатом веке.

Задача 1.2. *Сколько существует прямых в трёхмерном пространстве, пересекающих четыре заданных прямых?*

В общем положении их две.

2. ИСЧИСЛЕНИЕ УСЛОВИЙ (ИСЧИСЛЕНИЕ ШУБЕРТА)

Пусть в трёхмерном пространстве заданы прямые l_1, l_2, l_3, l_4 , и σ_i суть условие пересечения l с l_i . Под суммой условий будем понимать дизъюнкцию, а под произведением — конъюнкцию. Тогда, скажем, условие $\sigma_1 + \sigma_2$ есть условие пересечения с l_1 или l_2 , а выполнение $\sigma_1 \sigma_2$ равносильно пересечению с обеими l_1 и l_2 .

Пересечение прямой со всеми l_1, l_2, \dots, l_4 есть условие $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4$.

Идея Шуберта — вместо четырёх прямых в общем положении рассмотреть следующий специальный случай: прямые l_1 и l_2 пересекаются, и прямые l_3 и l_4 — тоже. Пусть прямые l_1 и l_2 пересекаются в точке a , и их аффинная оболочка — плоскость P . Обозначим $\sigma_a = \{l \ni a\}$, $\sigma_P = \{l \subset P\}$. Тогда очевидно, что $\sigma_1 \sigma_2 = \sigma_a + \sigma_P$. Примерно таким образом Шуберт сводил сложные условия к более простым. То, что специальный случай даст тот же ответ что и общий Шуберт не обосновывал, и поэтому его современники неоднократно пытались уличить его, приводя примеры, в которых вырожденный случай даёт неверный ответ. Однако во всех вычислениях Шуберта ответ получался правильным. В дальнейшем методы Шуберта были обоснованы с помощью теории пересечений (последняя и была создана во многом для того, чтобы формализовать исчисление Шуберта). Например, задача Шуберта про четыре прямых переводится на язык теории пересечений следующим образом.

Плоскости в \mathbb{C}^4 соответствуют прямым в $\mathbb{C}P^3$ и точкам грассманиана $G(2, 4)$.

Условие σ_i задаёт гиперповерхность $H_i = \{l \in G(2, 4) : l \cap l_i \neq \emptyset\}$.

$\left. \begin{array}{l} \sigma_i + \sigma_j \leftrightarrow H_i + H_j \\ \sigma_i \sigma_j \leftrightarrow H_i H_j \end{array} \right\}$ это можно понимать как операции в кольце когомологий.

Двойственность Пуанкаре говорит нам, что для гладкого многообразия X

$$H^i(X) \simeq H_{\dim(X)-i}(X).$$

Если не оговорено обратное, когомологии мы будем рассматривать над \mathbb{Z} , ибо кручений обычно возникать не будет. Умножение на когомологиях определено, из двойственности оно переносится на гомологии.

Гиперповерхности над \mathbb{C} соответствуют классам когомологий $H^2(X)$ (нумеровать будем по вещественной размерности). Вообще, комбинации гиперповерхностей коразмерности r над \mathbb{Z} соответствуют классам когомологий $H^{2r}(X)$. Более подробно см. [13], стр. 532.

Чтобы пользоваться равенством $\sigma_i \sigma_j = \sigma_a + \sigma_P$ в терминах когомологий, нужно доказать равенство $H_i H_j = H_a + H_P$. Это нетривиально, потому что в пересечениях, вообще говоря, могут возникать кратности.

Теперь мы определим важный класс многообразий — многообразия частичных флагов, которые обобщают грассманианы и естественным образом возникают в исчислительной геометрии.

Обозначим $m_\bullet = (m_1, \dots, m_k)$ последовательность, для которой $0 < m_1 < \dots < m_k < n$.

Определение 2.1. Частичным флагом типа m_\bullet в \mathbb{C}^n называется последовательность вложенных подпространств $V^1 \subset \dots \subset V^k \subset \mathbb{C}^n$, где $\dim(V^i) = m_i$.

Определение 2.2. Многообразием частичных флагов типа m_\bullet называется множество, состоящее из всех частичных флагов типа m_\bullet в \mathbb{C}^n . Обозначать его мы будем \mathbb{F}_{m_\bullet} .

На самом деле оно обладает структурой алгебраического многообразия, и ниже это будет доказано.

Пример 2.3.

- $m_\bullet = (d) \Rightarrow \mathbb{F}_{m_\bullet} = G(d, n)$ — грассманиан,
- $m_\bullet = (1, 2, \dots, n-1) \Rightarrow \mathbb{F}_n := \mathbb{F}_{m_\bullet}$ — многообразие полных флагов.

Факт 2.4. Кольцо $H^*(\mathbb{F}_n)$ мультипликативно порождается компонентой $H^2(\mathbb{F}_n)$.

Это свойство не выполнено для многих других многообразий частичных флагов и говорит о том, что многообразие полных флагов устроено проще прочих. Например, для $G(2, 4)$ когомологии в размерностях 0, 2, 6, 8 одномерны, для 4 двумерны. Отсюда очевидно, что кольцо когомологий не порождается компонентой размерности 2.

Упражнение 2.5. Докажите, что естественное действие группы $GL_n(\mathbb{C})$ на любом многообразии частичных флагов в \mathbb{C}^n транзитивно, и найдите стабилизатор при этом действии (он зависит от m_\bullet). Найдите размерность многообразия частичных флагов.

3. ОБОБЩЕНИЯ ТЕОРЕМЫ БЕЗУ

В этой области важные результаты были получены в семидесятых годах прошлого века Кушниренко, Бернштейном и Хованским.

Теорема 3.1 (Безу). Для общей системы двух уравнений от двух переменных число решений равно произведению степеней уравнений.

Как обычно, выполнение условия в общем положении значит выполнение на открытом плотном по Зарисскому подмножестве.

Пример 3.2. Пусть $\begin{cases} f = a + bx + cy + dxy \\ f' = a' + b'x + c'y + d'xy \end{cases}$. В общем положении система $f = f' = 0$ имеет два решения, а не 4. Пусть кривые H_f и $H_{f'}$ заданы соответственно $f = 0$ и $f' = 0$. Проективные замыкания этих кривых всегда содержат точки $(0 : 1 : 0)$ и $(0 : 0 : 1)$, в общем положении точек 4, стало быть в \mathbb{C}^2 в общем положении 2 решения.

Определение 3.3. Многогранником Ньютона многочлена Лорана $\sum_{c_\alpha \in \mathbb{Z}^n} c_\alpha x^\alpha$ от переменных x_1, \dots, x_n , где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$, называется выпуклая оболочка множества $\{\alpha \in \mathbb{R}^n : c_\alpha \neq 0\}$.

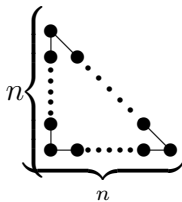
Определение 3.4. Комплексным тором размерности n называется $(\mathbb{C}^*)^n$.

Упражнение 3.5. Комплексный тор содержит в качестве подгруппы компактный тор, и $T_e(\mathbb{C}^*)^n = T_e\mathbb{T}^n \oplus iT_e\mathbb{T}^n$.

Теорема 3.6 (Кушниренко). Пусть f_1, \dots, f_n — многочлены Лорана от n переменных с фиксированным общим многогранником Ньютона $P \subset \mathbb{R}^n$. Тогда при коэффициентах общего положения система $f_1 = \dots = f_n = 0$ имеет ровно $n! \cdot \text{vol}(D)$ решений в $(\mathbb{C}^*)^n$.

Отметим, что мы не имеем права занулять коэффициенты, соответствующие внутренним точкам P .

Выведем теорему Безу для многочленов равной степени из теоремы Кушниренко. Пусть $\deg(f) = \deg(g) = n$. Многогранник Ньютона для таких многочленов в общем положении — равнобедренный прямоугольный треугольник с боковой стороной n , то есть его площадь $\frac{n^2}{2}$, так что решений в общем положении $2 \cdot \frac{n^2}{2} = n^2$.



Во втором рассмотренном нами примере многогранник является единичным квадратом, так что решений в общем положении $2 \cdot 1 = 2$.



Из примера 3.2 видно, что компактификация $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ плохо подходит для обобщения теоремы Безу на более специальные многочлены. Необходимо рассматривать другие компактификации комплексного тора.

Определение 3.7. *Торическое многообразие* — компактификация тора, на которой этот тор действует с открытой плотной орбитой.

Рассматриваемые нами торические многообразия обычно будут проективными. Построим торическое многообразие по многограннику Ньютона.

Конструкция. Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in P \subset \mathbb{R}^n, \varphi_P : (\mathbb{C}^*)^n \hookrightarrow \mathbb{C}^N$
 $x \mapsto (x^{\alpha_1}, \dots, x^{\alpha_N})$, где тор действует диагонально.

Многообразию $X_P = \overline{\mathbb{P}(\varphi_P((\mathbb{C}^*)^n))} \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^{N-1}$ — торическое многообразие, соответствующее многограннику P . Мы будем изучать кольца когомологий таких X_P .

Пример 3.8. Пусть многогранник $P = \triangle$, тогда $\varphi_P : (x_1, x_2) \mapsto (1, x_1, x_2)$, $X_P = \mathbb{C}\mathbb{P}^2$. Это как раз компактификация для классической теоремы Безу.

Пример 3.9. Пусть многогранник $P = \square$ тогда $\varphi_P : (x_1, x_2) \mapsto (1, x_1, x_2, x_1x_2)$, $X_P = \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \hookrightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^3$ (легко увидеть, что это в точности вложение Сегре).

Как мы помним, $H^*(\mathbb{C}\mathbb{P}^2) = \mathbb{Z}[t]/(t^3)$, $H^*(\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1) = \left(\frac{\mathbb{Z}[t]}{(t^2)}\right) \otimes \left(\frac{\mathbb{Z}[s]}{(s^2)}\right)$. Поскольку кольца когомологий разные, то и теоремы Безу получаются разные.

Упражнение 3.10. *Интересный пример для обдумывания на досуге: $P = \triangle$. Можно доказать, что в этом случае X_P есть раздутие $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ в одной точке. Действие тора нетранзитивно, так что имеет смысл найти орбиты и в этом случае, и в предыдущих двух примерах.*

4. ЧУДЕСНАЯ КОМПАКТИФИКАЦИЯ

Задача 4.1. *Сколько невырожденных коник касается данных пяти коник в общем положении? Эта задача была поставлена Штейнером, а решена Шалем (у Штейнера тоже было решение, но неправильное).*

Можно пытаться решать эту задачу так же. Коника имеет уравнение с шестью параметрами, определёнными с точностью до пропорциональности, так что коники параметризуются точками $\mathbb{C}\mathbb{P}^5$. Открытое подмножество невырожденных коник обозначим $Q \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^5$. Группа $PGL(3)$ действует на $\mathbb{C}\mathbb{P}^5$ и имеет Q пятимерной орбитой действия. Также есть четырёхмерная орбита пар пересекающихся прямых и орбита двойных прямых. Положим $H_c = \{c' : c' \text{ и } c \text{ касаются}\}$. Есть проблема, состоящая в том, что $\bigcap_{i=1}^5 \overline{H_{c_i}}$ содержит поверхность двойных прямых. В решении обычная компактификация не помогает.

Рассмотрим большее многообразие $\mathbb{C}\mathbb{P}^5 \times \mathbb{C}\mathbb{P}^5$, причём первый множитель мы отождествим с кониками в $\mathbb{P}(V)$ для некоторого трёхмерного векторного пространства V , а второй член — с кониками в $\mathbb{P}(V^*)$. Вложим невырожденные коники в большее многообразие: $Q \hookrightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^5 \times \mathbb{C}\mathbb{P}^5, c \mapsto (c, c^*)$, где c^* — двойственная коника. Тогда \overline{Q} — чудесная компактификация.

Упражнение 4.2. *Описать орбиты действия PGL_3 на чудесной компактификации. Их четыре.*

5. ТЕОРИЯ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ

Пусть H_1, H_2, \dots, H_n — гиперповерхности на n -мерном многообразии X . Тогда $H_1 \cdot H_2 \cdots H_n$ будет обозначать индекс их пересечения. Вопрос, как его определить и вычислить, в общем случае труден. В нашем случае X будет гладким проективным многообразием (в частности, X — компактно). Мы также немного поговорим про более общий случай, когда X квазипроективно (то есть является открытым по Зарисскому подмножеством проективного многообразия) и тем самым уже не обязательно компактно. Напомним, что проективное многообразие — это замкнутое по Зарисскому подмножество проективного пространства (то есть оно представляется как множество общих нулей системы полиномиальных уравнений).

Приведём несколько важных в курсе примеров проективных многообразий:

- $G(d, n) \hookrightarrow \mathbb{P}^{\binom{n}{d}-1}$: $V^d = \langle v_1, \dots, v_d \rangle \mapsto \langle v_1 \wedge \dots \wedge v_d \rangle \in \mathbb{P}^{\binom{n}{d}-1}$ (вложение Плюккера). Отсюда видно, что грассманиан вкладывается в проективное пространство, но надо ещё проверить, что его образ замкнут по Зарисскому.
- Многообразия частичных флагов. Их проективность легко вывести из проективности грассманиана.
- Многообразия полных флагов. Например, $\mathbb{F}_3 = \{(l, p) : l \subset p \subset \mathbb{C}^3\} \subset \mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(V^*)$. Если в $\mathbb{P}(V)$ и $\mathbb{P}(V^*)$ ввести координаты $(x_0 : x_1 : x_2)$ и $(y_0 : y_1 : y_2)$, то \mathbb{F}_3 там будет задано одним уравнением $x_0 y_0 + x_1 y_1 + x_2 y_2 = 0$.
- Торические многообразия, построенные по многогранникам Ньютона. Вообще, есть примеры и непроективных компактных торических многообразий.

Упражнение 5.1. *Задать торическое многообразие, построенное по многограннику Ньютона, уравнениями. Это можно сделать при помощи биномиальных уравнений («моном» = «моном»).*

Пусть X — гладкое проективное многообразие, $H_i \subset X^n$ — гиперповерхности.

Рассмотрим случай, когда пересечение $H_1 \cap \dots \cap H_n$ трансверсально в каждой точке. Тогда индекс пересечения $H_1 \dots H_n$ определим как количество точек пересечения.

А теперь пусть пересечение не трансверсально. Что делать?

Есть путь: пошевелить до трансверсального пересечения. Это имеет смысл над \mathbb{R} и \mathbb{C} в категории гладких вещественных многообразий. Но из класса алгебраических многообразий мы выходим. Другой путь: рассматривать не только гиперповерхности, но и их формальные целочисленные линейные комбинации, то есть *дивизоры*. Будем шевелить дивизоры с помощью отношения *линейной эквивалентности*.

Определение 5.2. Дивизоры D_1 и D_2 *линейно эквивалентны* ($D_1 \sim D_2$), если на X есть такая рациональная функция f , что $D_1 - D_2 = \text{div}(f)$.

Заменим H_1 на линейно эквивалентный ему дивизор $D = \sum a_i E_i$, чтобы пересечения $E_i \cap H_2 \cap \dots \cap H_n$ были трансверсальны. При этом может оказаться необходимым заменять не одну гиперповерхность, а многие и вычислять по полилинейности. Таким образом, считать индекс пересечения мы будем доведением до трансверсальности. Корректность такого определения доказывается в [14, гл. IV, §1].

Пример 5.3. Для каждого проективного вложения многообразия X мы сейчас определим важный класс линейно эквивалентных гиперповерхностей, которые в общем положении друг другу трансверсальны. Фиксируем вложение $X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$. Определим *гиперплоское сечение* H как пересечение X с общей гиперплоскостью в \mathbb{P}^N . Легко проверить (проверьте!), что все гиперплоские сечения (для фиксированного вложения) линейно эквивалентны.

Упражнение 5.4. *Пусть H_1, \dots, H_n — общие гиперплоские сечения, где $\dim(X) = n$. Тогда в общем положении пересечение $H_1 \cap \dots \cap H_n$ трансверсально, и $\sharp H_1 \cap \dots \cap H_n = \deg(X)$. Напомним, что степень $\deg(X)$ равна числу точек пересечения многообразия $X \subset \mathbb{P}^N$ с общим подпространством в \mathbb{P}^N коразмерности n .*

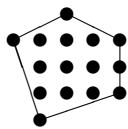
Тем самым, индекс самопересечения $H^n := \underbrace{H \cdot \dots \cdot H}_n$ гиперплоского сечения H равен степени многообразия X при вложении $X \rightarrow \mathbb{P}^N$, задающем H .

Пример 5.5.

- $\nu_d : \mathbb{P}^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^{\frac{(d+1)(d+2)}{2}-1}$ — вложение Веронезе. Например, при $d = 2$ оно задаётся формулой $(x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_0^2 : x_0x_1 : x_0x_2 : x_1^2 : x_1x_2 : x_2^2)$. В общем случае координаты образа — все мономы степени d от x_0, x_1, x_2 .

Дивизоры в \mathbb{P}^2 — это кривые, $\deg(\nu_2(\mathbb{P}^2)) = 4$. Прообразы двух общих гиперплоских сечений при таком вложении — это две общие коники в \mathbb{P}^2 , имеющие по теореме Безу в пересечении четыре точки. Мы сказали то же самое, что и раньше, другим более общим способом.

- $X = X_P \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ — торическое многообразие, построенное по многограннику Ньютона P . Какова степень X_P при таком вложении?



$\alpha = (k_1, \dots, k_n) \rightsquigarrow x^\alpha := x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$
 $x \mapsto (x^{\alpha_1}, \dots, x^{\alpha_N})$, где $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ — целые точки внутри и на границе многогранника P .

Итого имеем степень отображения $n! \cdot \text{vol}(P)$.

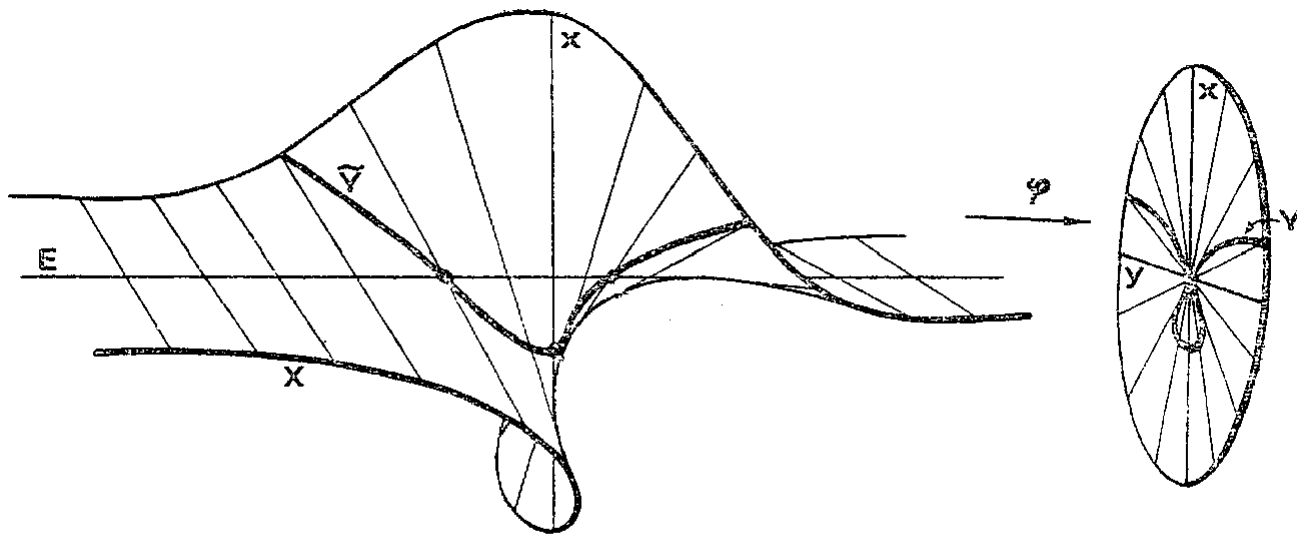
Таким образом, мы переформулировали теорему Кушниренко.

Упражнение 5.6. Если гиперповерхности H_1 и H_2 линейно эквивалентны, то гомологичны. Обратное неверно. Контрпримером могут служить две точки на эллиптической кривой.

Пример 5.7. Пусть X — раздутие $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ в одной точке $O \in \mathbb{P}^2$ (мы будем считать, что O имеет координаты $(0:0:1)$). Приведём пример кривой в X , имеющей индекс самопересечения -1 . Но сначала напомним суть раздутия.

Рассмотрим $X = \{(a, l) : a \in \mathbb{P}^n; a, O \in l\} \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$ (мы отождествляем прямые проходящие через фиксированную точку $O \in \mathbb{P}^n$ с точками в \mathbb{P}^{n-1}). Это раздутие $\widehat{\mathbb{P}^n}$ многообразия \mathbb{P}^n в точке O . Чтобы раздуть произвольное замкнутое подмногообразие $Y \subset \mathbb{P}^n$, нужно взять прообраз $Y - \{O\}$ при отображении $p : X \xrightarrow{(a,l) \mapsto a} \mathbb{P}^n$ и замкнуть в X .

Приведём простой пример: раздутие $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ в одной точке. Если вложить его в $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$ с координатами $x_0 : x_1 : x_2$ и $y_0 : y_1$, то оно будет задано уравнением $x_0y_0 + x_1y_1 = 0$. Изобразим это наглядно:



Раздутие.

Таким образом, над точками, кроме a , будет висеть по одной точке, а над O — проективное пространство \mathbb{P}^{n-1} . Оно называется *исключительным дивизором* E . Как видно из рисунка, раздутие разводит различные касательные направления в точке a .

Упражнение 5.8. Найдите дивизоры функций $\frac{x_0}{x_1}$ и $\frac{x_0}{x_2}$ на X .

Задача 5.9. Найдите E^2 .

Решение.

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{p} & \mathbb{P}^2 \\
 & \searrow f & \downarrow \begin{smallmatrix} x_0 \\ x_2 \end{smallmatrix} \\
 & & \mathbb{P}^1
 \end{array}
 \quad \text{div}(f) = E + \begin{array}{c} \{x_0 = 0\} \\ \parallel \\ l_0 \end{array} - \begin{array}{c} \{x_2 = 0\} \\ \parallel \\ l_\infty \end{array}$$

$E^2 = E(l_\infty - l_0) = El_\infty - El_0 = -1$, так как E с l_∞ не пересекается, а с l_0 имеет одну общую точку, и пересечение трансверсально. \square

Отсюда можно сделать вывод, что E нельзя пошевелить в классе гладких комплексных кривых, так чтобы пересечение было трансверсально. В классе гладких вещественных кривых — можно, просто возникающая при этом точка пересечения войдёт со знаком минус. Тем самым есть два подхода к вычислению индекса пересечения: в топологической ситуации заменяют комплексные гиперповерхности вещественными, а в алгебраической ситуации — рассматривают произвольные целочисленные линейные комбинации комплексных гиперповерхностей. Последний подход более удобен для явных вычислений (поскольку множество возможных шевелений дискретно), а кроме того работает над любым алгебраически замкнутым полем. Мы собираемся искать явные формулы для индексов пересечения (в духе теоремы Кушниренко), поэтому будем использовать алгебраический подход.

Определение 5.10. Группа Пикара $\text{Pic}(X)$ порождена дивизорами Картье¹ по модулю линейной эквивалентности.

У нас многообразия гладкие, и дивизоры Картье являются дивизорами Вейля.

Упражнение 5.11. Найдите $\text{Pic}(\mathbb{P}^n)$, $\text{Pic}(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m)$, $\text{Pic}(\widehat{\mathbb{P}^2})$.

Факт 5.12. Пусть $\mathbb{A}^n \subset X^n \Rightarrow X^n \setminus \mathbb{A}^n = \bigcup H_i$, где H_i — неприводимые гиперповерхности. Тогда $\text{Pic}(X^n)$ порождается H_i . При доказательстве этого утверждения нужно использовать, что $\text{Pic}(\mathbb{A}^n) = 0$ (проверьте!).

Определение 5.13. Очень обильный дивизор — это гиперплоское сечение для некоторого вложения в проективное пространство.

Это не стандартное определение, но следствие из него. В действительности, по каждому дивизору можно построить отображение из X в проективное пространство (см. [3, Глава 1, §4]), и дивизор очень обильн если это отображение является вложением. Тогда дивизор будет линейно эквивалентен гиперплоскому сечению именно для этого вложения.

Определение 5.14. Эффективный дивизор — это дивизор вида $\sum a_i H_i$, $a_i > 0$.

Пример 5.15. Пусть $X = \mathbb{P}^1$. Легко проверить, что группа Пикара $\text{Pic}(\mathbb{P}^1)$ порождается дивизором $D = \{x_0 = 0\}$ (т.е. D это одна точка). Эффективные дивизоры совпадают с очень обильными и имеют вид dD , где d — положительное целое число. Действительно, рассмотрим вложение Веронезе $\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^d; (x_0 : x_1) \rightarrow (x_0^d : x_0^{d-1}x_1 : \dots : x_1^d)$. Общее гиперплоское сечение при таком вложении состоит из d точек.

Очень обильные и эффективные дивизоры образуют полугруппы. Вся группа Пикара порождается очень обильными дивизорами (см. последнее следствие из теоремы Кодаиры о вложении в [3, Глава 1, §4]), поэтому можно было бы определять индекс пересечения по полилинейности, используя только понятие степени. В самом деле, зная индекс самопересечения любого очень обильного дивизора, можно по полилинейности найти индекс пересечения любого набора из n дивизоров (это

¹Группа дивизоров Вейля $\text{WDiv}(X)$ свободно порождена над \mathbb{Z} неприводимыми гиперповерхностями. Группа дивизоров Картье $\text{Cdiv}(X)$ порождена такими простыми дивизорами Вейля, носители которых локально задаются уравнениями.

следует из такого утверждения линейной алгебры: симметрическая n -форма на векторном пространстве однозначно определяется своим ограничением на диагональ). Однако, на практике бывает проще искать индексы пересечения дивизоров, которые не очень обильны, но зато представляются особенно простыми гиперповерхностями (такими как, например, исключительный дивизор на раздутии). Поэтому вторая часть определения индекса пересечения (случай нетрансверсальности) нам в будущем пригодится.

Попробуем определить эквивалентность дивизоров в \mathbb{C}^2 . Здесь мы столкнёмся с некоторыми трудностями.

- (1) $H_1 \sim H_2$, если они линейно эквивалентны. Но тогда любой дивизор эквивалентен нулю, так что все индексы пересечения нулевые, даже у пары пересекающихся прямых. Такой способ напрочь лишён всякого смысла.
- (2) $H_1 \sim H_2$, если H_1 и H_2 отличаются параллельным переносом. Так можно добиваться трансверсальности. Тогда две прямые эквивалентны, только если они параллельны, поэтому $l_1 \cdot l_2 = \begin{cases} 0, & l_1 \parallel l_2 \\ 1, & l_1 \not\parallel l_2 \end{cases}$.
- (3) $H_1 \sim H_2$, если их проективные замыкания эквивалентны. Это довольно естественный способ. Скажем, индекс пересечения любых двух прямых тогда равен единице.

Таким образом, нет универсального способа определить индекс пересечения дивизоров на некомпактном многообразии. Определение будет существенно зависеть от выбранного отношения эквивалентности на дивизорах, причём линейная эквивалентность часто оказывается не самым лучшим кандидатом, особенно если наша конечная цель — решить какую-нибудь задачу исчислительной геометрии.

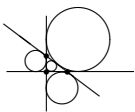
6. СВЯЗЬ ТЕОРИИ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ И ИСЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Теперь мы используем понятие индекса пересечения дивизоров для решения задач исчислительной геометрии.

Решим задачу Шуберта (1.2). Рассмотрим вложение Плюккера $G(2, 4) \hookrightarrow \mathbb{P}^5$. Легко проверить, что гиперповерхность $H = \{l : l \cap l_0 \neq \emptyset\} \subset G(2, 4)$ — гиперплоское сечение для вложения Плюккера, так что $H^4 = \deg(G(2, 4)) = 2$. Образ грассманиана (квадрика Плюккера) задаётся квадратичным уравнением $x_0x_1 - x_2x_3 + x_4x_5 = 0$, поэтому его степень равна двум (см. упражнение ниже).

Упражнение 6.1. Положим $X \subset \mathbb{P}^n$, $X = \{f = 0\}$. Тогда $\deg(X) = \deg(f)$.

Задача 6.2 (про коники). В \mathbb{P}^2 заданы две точки и три прямые в общем положении. Сколько существует коник, проходящих через заданные точки и касающихся заданных прямых?



Сначала попробуем найти ответ эмпирически. Поместив две точки в $(1 : i : 0)$ и $(i : 1 : 0)$, получим, что коники — это окружности. Для трёх прямых в общем положении их касается четыре окружности: вписанная и три внеписанных в треугольник.

Таким образом, ответ 4.

Замечание 6.3. Мы искали окружности в \mathbb{C}^2 по их пересечениям с \mathbb{R}^2 , поэтому, вообще говоря, могли не заметить те окружности, которые \mathbb{R}^2 не пересекают. Но можно проверить, что в данном случае мы ничего не упустили. Хотя если бы мы так же решали двойственную задачу про число коник, касающихся двух прямых и проходящих через три точки (ответ в ней естественно такой же из-за полярного соответствия), то на вещественной плоскости мы бы заметили только две окружности, а не четыре (проверьте!). В наше время довольно популярна *вещественная исчислительная геометрия*, которая в частности занимается поиском конфигураций, дающих в вещественном случае то же число решений, что и в комплексном (то есть максимально возможное). Например, конфигурация две точки, три прямых реализует максимально возможное число коник в вещественном случае, а конфигурация три точки, две прямых — нет.

Теперь приведём два «решения» при помощи теории пересечений. Как станет ясно из несовпадающих ответов, они не могут одновременно быть верными.

Как и раньше, $Q \subset \mathbb{P}^5$ — невырожденные коники. Для точки $a \in \mathbb{P}^2$ и прямой $l \subset \mathbb{P}^2$ определим гиперповерхности $H_a = \{C \in Q : C \ni a\}$ и $H_l = \{C \in Q : C \text{ касается } l\}$. Тогда $\overline{H_a} \subset \mathbb{P}^5$ — гиперплоскость, $\overline{H_l}$ — квадрака. По теореме Безу имеем $H_{a_1}H_{a_2}H_{l_1}H_{l_2}H_{l_3} = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

Перейдём к двойственной задаче при помощи полярного соответствия: три точки и две прямых. Тогда совершенно аналогично имеем ответ $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 = 4$.

Точно так же через пять точек с одной стороны проходит одна коника, как мы знаем, с другой стороны из двойственности, казалось бы, по теореме Безу их должно быть 32.

Упражнение 6.4. *Где ошибка в рассуждениях?*

На самом деле мы не учли особую конику — двойную прямую, проходящую через данные две точки. Очевидно, она подходит, так как проходит через данные точки и пересекается с данными прямыми с кратностями 2 в каждой точке.

7. МНОГООБРАЗИЯ ПОЛНЫХ ФЛАГОВ

Теперь мы изучим геометрию многообразий полных флагов \mathbb{F}_n . Как уже говорилось, их кольцо когомологий описать проще, чем скажем, кольцо когомологий грассманианов, поэтому мы с них и начинаем. Напомним, что $\mathbb{F}_n = \{V_1 \subset \dots \subset V_n \subset \mathbb{C}^n\}$, $\dim(V_i) = i$. Нашими главным примером станет \mathbb{F}_3 , поскольку это самый простой пример, не совпадающий с проективным пространством. Заметим, что в случае грассманианов таким же примером будет $G(2, 4)$, и его размерность больше (ещё один довод в пользу многообразий полных флагов).

Пример 7.1.

- $\mathbb{F}_2 = \mathbb{P}^1$
- $\mathbb{F}_3 = \{(a, l) : a \in l, a \in \mathbb{P}^2, l \subset \mathbb{P}^2 \text{ — прямая}\}$

На \mathbb{F}_n транзитивно действует группа $\text{GL}_n(\mathbb{C})$, и стабилизатор — борелевская подгруппа, то есть подгруппа всех верхнетреугольных матриц.

Упражнение 7.2. *Покажите, что $\mathbb{F}_n \simeq \text{GL}_n/B \simeq \text{U}_n/(\text{U}^1)^n$. Второй изоморфизм доказывается с помощью ортогонализации Грама-Шмидта.*

Предложение 7.3.

- \mathbb{F}_n — гладкое алгебраическое многообразие размерности $d = \frac{n(n-1)}{2}$.
- На \mathbb{F}_n есть алгебраическое клеточное разбиение, то есть фильтрация $\mathbb{F}_n \supset X^{d-1} \supset \dots \supset X^0$, где X_i — алгебраические подмногообразия, и $X^i \setminus X^{i-1} = \bigsqcup \mathbb{C}^i$.
- \mathbb{F}_n проективно.

Доказательство. Из наличия транзитивного действия GL_n можно построить одну аффинную карту, покрывающую окрестность одной точки и далее разнести её действием группы.

Фиксируем точку, то есть флаг $F_0 \in \mathbb{F}_n$ и построим по нему аффинную карту C_0 :

$$\mathbb{F}_n \ni F_0 \rightsquigarrow C_0 = \{F \in \mathbb{F}_n : V_i(F) \cap V_i(F_0) \text{ трансверсально}\}.$$

Это открытая клетка. Покажем, что $C_0 \simeq \mathbb{C}^d$. Фиксируем базис $\{e_1, \dots, e_n\}$, для которого $V_i(F_0) = \langle e_1, \dots, e_i \rangle$.

Упражнение 7.4. *В $F \in C_0$ существует единственный базис $\{v_1, \dots, v_n\}$ такой, что $F = (\langle v_1 \rangle \subset \langle v_1, v_2 \rangle \subset \dots)$, и в базисе $\{e_1, \dots, e_n\}$ имеем*

$$(v_1, \dots, v_n) = \begin{pmatrix} * & \dots & * & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ * & \ddots & & \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix}$$

Тем самым, мы построили на C_0 структуру аффинного пространства. Это единственная клетка размерности d . Теперь мы построим остальные клетки алгебраического клеточного разбиения. Рассмотрим на \mathbb{F}_n действие подгруппы $B \subset \mathrm{GL}_n$ (для удобства мы выберем B и F_0 согласовано, так что $B = \mathrm{Stab}(F_0)$). Это действие уже не будет транзитивным. Действительно, размерности всех пересечений $V^i(F_0) \cap V^j(F)$ постоянны для всех флагов F в одной и той же B -орбите. В частности, открытая клетка C_0 инвариантна относительно действия B (и как легко показать, на C_0 действие B транзитивно).

Упражнение 7.5. Найдите все орбиты действия B на \mathbb{F}_n .

Ниже сформулирован ответ к упражнению вместе с указаниями к решению. Орбиты — клетки Брюа C_w (также называются клетками Шуберта). Клетки соответствуют элементам симметрической группы: $\mathfrak{S}_n \ni w \rightsquigarrow C_w = BwF_0$, $w : e_1, \dots, e_n \mapsto e_{w(1)}, \dots, e_{w(n)}$. Таким образом, имеем $\mathbb{F}_n = \bigsqcup_{w \in \mathfrak{S}_n} BwF_0$, и $\mathrm{GL}_n = \bigsqcup_{w \in \mathfrak{S}_n} BwB$ — объединение двойных смежных классов. Эти разложения называются разложениями Брюа. Для доказательства достаточно проверить, что в каждом двойном смежном классе по B есть ровно одна матрица, реализующая перестановку векторов базиса $\{e_1, \dots, e_n\}$.

Клетка C_w изоморфна $\mathbb{C}^{l(w)}$, где $l(w)$ — число инверсий в w или, что то же самое, длина минимального разложения на элементарные транспозиции. Аналогично случаю открытой клетки, для каждой перестановки w и каждого флага из C_w , матрица с записанными по столбцам по порядку элементами базиса приводится единственным образом к такому виду: в ней ладейно расставлены единицы (расстановка единиц полностью определяется перестановкой w), под ними и справа от них нули, на остальных местах могут быть произвольные числа. Таким образом, на остальных клетках построена структура аффинного пространства. Например, для 3-цикла $(123) \in \mathfrak{S}_3$ имеем

$$\begin{pmatrix} * & * & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Число неопределённостей равно числу инверсий. В частности, $C_0 = C_{w_0}$, где w_0 — самая длинная перестановка в \mathfrak{S}_n (то есть w_0 переставляет $(1, \dots, n)$ в обратном порядке), а для тождественной перестановки получаем $C_e = \mathrm{pt}$

Определение 7.6. Цикл Шуберта — это замыкание клетки Брюа $X_w = \overline{C_w}$. Заметим, что циклы Шуберта обычно негладкие и не называются циклами Брюа, как в случае клеток. В отличие от клеток Брюа, циклы Шуберта пересекаются.

Цикл Шуберта представляется в виде объединения клеток Брюа. Действительно, замыкание B -орбиты является B -инвариантным подмногообразием, а следовательно, распадается в объединение B -орбит. Тем самым, клетки Брюа действительно дают алгебраическое клеточное разбиение многообразия полных флагов.

Легко видеть, что многообразие \mathbb{F}_n вложено в $G(1, n) \times \dots \times G(n-1, n) \hookrightarrow \mathbb{P}\Lambda^1 V \times \dots \times \mathbb{P}\Lambda^{n-1} V$. Вложено оно как замкнутое многообразие, произведение проективных многообразий проективно. \square

Замечание 7.7. На циклах Шуберта есть естественное отношение порядка: $X_v \leq X_w$ если X_v содержится в X_w . Индуцированный порядок на симметрической группе называется (*сильным*) порядком Брюа. Можно описать этот порядок явно, описав сначала все циклы Шуберта коразмерности один, лежащие в данном цикле Шуберта [11, Proposition 3.6.4]:

$$X_w \setminus C_w = \bigcup_{\substack{v=ws \\ l(v)=l(w)-1 \\ s \text{ — транспозиция}}} X_v.$$

Транзитивное замыкание так определённой непосредственной соотносимости и будет порядком Брюа на группе \mathfrak{S}_n .

Посмотрим, как выглядит разложение Брюа в конкретных примерах.

Пример 7.8.

- $n = 2$, $\mathbb{P}^1 = C_e \sqcup C_{(1,2)} = \mathbb{A}^1 \cup \text{pt}$.

- $n = 3$. Шесть орбит. Опишем циклы Шуберта.

$X_e = \text{pt}$ — точка, $X_{(1,3)} = \mathbb{F}_3$ — единственная открытая клетка размерности 3.

$X_{(123)} : \begin{pmatrix} * & * & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ — прямая в фиксированной плоскости и содержащая её плоскость.

$X_{(123)} = \{(a \in l) : a \in l_0\}$, $X_{(132)} = \{(a \in l) : l \ni a_0\}$.

Упражнение 7.9. $X_{(123)} \simeq X_{(132)} \simeq \widehat{\mathbb{P}^2}$ — раздутие \mathbb{P}^2 в одной точке.

$X_{(12)} = \{(a \in l) : l = l_0\} \simeq \mathbb{P}^1$.

$X_{(23)} = \{(a \in l) : a = a_0\} \simeq \mathbb{P}^1$.

8. ОБОБЩЕНИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФЛАГОВ

Пусть K — связная компактная группа Ли с максимальным тором T . Тогда имеем диффеоморфизм

$$G/B = K/T,$$

наделяющий аналитическое многообразие K/T комплексной структурой.

Определение 8.1. Группа Вейля $W = N(T)/T$.

Упражнение 8.2. В случае GL_n группа Вейля равна \mathfrak{S}_n .

Факт 8.3. Определено действие $W : K/T$. Оно не сохраняет комплексную структуру.

Упражнение 8.4. Для $\mathbb{F}_2 = \mathbb{P}^1$ имеем (12) : $z \mapsto \bar{z}$, то есть единственный нетривиальный элемент группы Вейля действует комплексным сопряжением.

Факт 8.5. Для редуктивной группы G имеем алгебраическое клеточное разложение $G = \bigsqcup_{w \in W} BwB$.

Факт 8.6. Пусть X — гладкое комплексное алгебраическое многообразие с алгебраическим клеточным разбиением. Тогда:

- $H^*(X)$ — свободная абелева группа с базисом из замыканий клеток.
- $H^i(X) = 0$ для нечётных i . Дифференциалы нулевые, кручений нет.
- $H^2(X) = \text{Pic}(X)$.

Следствие 8.7. $H^*(G/B)$ — свободная абелева группа с базисом $\{[X_w]\}_{w \in W}$.

Задача 8.8. Как найти $X_v X_w = \sum c_{vw}^u X_u$? Найти комбинаторное описание коэффициентов c_{vw}^u , из которого бы следовала их неотрицательность (последняя довольно легко следует из геометрических соображений, которые мы вскоре обсудим). Для грассманианов решение известно — это классический результат о коэффициентах Литтлвуда–Ричардсона. Задача недавно была решена и для двушаговых флаговых многообразий, причём достаточно сложно. Для полных флагов решение неизвестно.

Упражнение 8.9. $H^2(G/B)$ как абелева группа порождается дивизорами Шуберта.

Для \mathbb{F}^n имеем $\text{Pic}(\mathbb{F}^n) \simeq H^2(\mathbb{F}^n) \simeq \mathbb{Z}^{n-1}$.

Упражнение 8.10. Решить задачу 8.8 для \mathbb{F}_3 .

Лемма 8.11. Пусть C_v и C_w — две клетки Шуберта. Тогда для общего $g \in G$ пересечение $gC_v \cap C_w$ трансверсально.

Для пояснения найдём $X_{(123)}^2$. Положим $gX_{(123)} = X'_{(123)} = \{(a' \in l') : a' \in l'_0\}$. Тогда для пересечения с $X_{(123)}$ имеем $a = l_0 \cap l'_0$, $l = l' \ni a$. Это цикл $X_{(23)}$. Наиболее трудно вычисляется произведение $X_{(123)} \cdot X_{(213)}$, где в пересечении не получают буквально клетки. Шуберт в этом случае рассмотрел бы положение коразмерности 1, а именно, $a'_0 \in l_0$, тем не менее получив правильный ответ.

Опишем мультипликативную структуру кольца когомологий.

Теорема 8.12 (представление Бореля). $H^*(\mathbb{F}_n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]/S$, где $\deg(x_i) = 2$, и идеал S порождён однородными симметрическими многочленами положительной степени.

Пример 8.13.

- $H^*(\mathbb{P}^1, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[x_1, x_2]/(x_1 + x_2, x_1x_2) \simeq \mathbb{Z}[x]/(x^2)$
- $H^*(\mathbb{F}_3, \mathbb{Z}) = \frac{\mathbb{Z}[x, y, z]}{S} = \frac{\mathbb{Z}[x, y]}{(x^2 + xy + y^2, x^3)}$. Есть базис $\{1, x, y, x^2, xy, y^2\}$, остальное через него выражается.

Задача 8.14. Найти многочлены, представляющие циклы Шуберта.

Теорему Бореля мы докажем ниже, для чего нам понадобятся классы Черна.

Сначала рассмотрим два подхода к доказательству (они оба доводятся до полного доказательства с помощью теории классов Черна).

Первый подход. Многообразие \mathbb{F}_n расслаивается над \mathbb{P}^{n-1} со слоем \mathbb{F}_{n-1} , $\{V_1 \subset \dots \subset V_{n-1}\} \mapsto V_{n-1}$. Если бы расслоение было тривиально, мы бы просто перемножили кольца когомологий, но это не так, поэтому для описания кольца когомологий помогут классы Черна.

Второй подход.

$$P_1 = \{V_{n-1} \subset \mathbb{C}^n\} \simeq \mathbb{P}^{n-1}$$

$$P_2 = \{V_{n-2} \subset V_{n-1} \subset \mathbb{C}^n\}$$

...

$$P_{n-1} = \{V_1 \subset \dots \subset V_{n-2} \subset V_{n-1} \subset \mathbb{C}^n\} \simeq \mathbb{F}_n$$

Легко видеть, что P_i — проективизация (см. определение ниже) тавтологического расслоения на P_{i-1} со слоем V^{n-i} . Поэтому надо научиться находить когомологии проективизации расслоения по когомологиям базы.

Пусть $E \rightarrow X$ — комплексное векторное расслоение ранга r , а $Y = \mathbb{P}(E^*)$ — многообразие гиперплоскостей в E (или эквивалентно, многообразие прямых в двойственном расслоении E^*), называемое *проективизацией расслоения*. Тогда $\pi : Y \rightarrow X$ со слоем \mathbb{P}^{n-1} . Вообще-то естественней называть проективизацией расслоения E пространство прямых в E (то есть $\mathbb{P}(E)$), но мы увидим, что именно пространство гиперплоскостей прямо связано с классами Черна расслоения E (тогда как $\mathbb{P}(E)$ связано с классами Черна двойственного расслоения E^*).

Теорема 8.15 (о проективизации расслоения). $H^*(Y) = \frac{H^*(X)[\xi]}{(\xi^r - c_1\xi^{r-1} + \dots + (-1)^r c_r)}$, где c_i — классы Черна расслоения E .

При аксиоматическом определении когомологий эта теорема является одной из аксиом (и выполнена она не только для обычных когомологий, но и для экстраординарных теорий когомологий, например, для кобордизмов), а Гротендик именно через это определял классы Черна, далее из них получая геометрические свойства.

Рассмотрим тривиальный пример: $X = \text{pt}$, $E = \mathbb{C}^{n+1} \Rightarrow Y = \mathbb{P}^n$, $H^*(\mathbb{P}^n) = \mathbb{Z}[\xi]/(\xi^{n+1})$, так как классы Черна равны нулю.

9. КЛАССЫ ЧЕРНА

Пусть $E \rightarrow X$ — комплексное векторное расслоение над гладким компактным алгебраическим многообразием X , $\text{rk}(E) = r$. Мы хотим померить, насколько расслоение E нетривиально. Естественный способ — попытаться построить набор линейно независимых глобальных сечений, и посмотреть на препятствия. Заметим, что алгебраических сечений может не быть вовсе, поэтому мы рассмотрим бесконечно гладкие сечения s_1, \dots, s_r (этот подход работает над \mathbb{R} и \mathbb{C} , а над произвольным полем оказалось бы необходимым строить классы Черна по Гротендику). Выбрать сечения линейно независимыми для нетривиального расслоения не удаётся. Определим *классы Черна* через множества вырождения

$$c_i(E; s_1, \dots, s_r) = \{x \in X : s_1(x), \dots, s_{r-i+1}(x) \text{ линейно зависимы}\}.$$

В таком определении также нужно учитывать знаки, приходящие из ориентации компонент связности множества вырождения (если удалось найти алгебраические сечения, то все знаки автоматически

положительны). Если сечения выбраны в общем положении (в частности, $\langle s_1, \dots, s_i \rangle$ пересекает $\langle s_{i+1} \rangle$ трансверсально для всех i), то по множеству вырождения можно построить цикл $c_i(E)$ в $H^{2i}(X)$, не зависящий от выбора сечений (подробно об этом написано в [3, Гл. 3.3], а во всех интересующих нас примерах это будет очевидно). Его мы и назовём i -тым классом Черна расслоения E . Заметим, что для вещественных расслоений мы бы аналогично получили классы Понтрягина.

Пример 9.1.

- Касательное расслоение $E = TX$. Сечения — это векторные поля. По теореме Хопфа для векторного поля в общем положении число нулей с учётом знаков равно эйлеровой характеристике, поэтому старший класс Черна $c_n(TX)$ равен классу точки, умноженному на $\chi(X)$.
- Тривиальное расслоение $E = X \times \mathbb{C}^r$. Все классы Черна тривиальны.
- Тавтологическое факторрасслоение на проективном пространстве $E = \mathcal{O}(1)$. Пусть $X = \mathbb{P}^{r-1} = \mathbb{P}(V^*)$ — гиперплоскости в V . Рассмотрим тавтологическое расслоение $\mathcal{H} \rightarrow X$. Рассмотрим расслоение $\mathcal{O}(1)$, заданное точной последовательностью расслоений:

$$0 \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{O}(1) \rightarrow 0.$$

Таким образом, $\mathcal{O}(1)$ — линейное факторрасслоение (называемое тавтологическим факторрасслоением). Ищем классы Черна. Поскольку расслоение линейно, оно имеет только c_1 . Каждый вектор $v \in V$ даёт алгебраическое сечение таким образом $v \rightsquigarrow s(x) = v \bmod(H_x)$. Поэтому $c_1(\mathcal{O}(1)) = \{x : s(x) = 0\} = \{H_x : H_x \ni v\} = \mathbb{P}^{r-2} \subset \mathbb{P}^{r-1}$ — гиперплоскость.

Определение 9.2. *Полный класс Черна $c(E)$ расслоения E равен $1 + c_1(E) + \dots + c_r(E)$.*

Факт 9.3 (Формула Уитни). *Пусть $E \rightarrow X, F \rightarrow X, M \rightarrow X$ — векторные расслоения. Если имеем точную последовательность*

$$0 \rightarrow E \rightarrow M \rightarrow F \rightarrow 0,$$

то тогда $c(M) = c(E)c(F)$.

Есть также формула $c_i(E^*) = (-1)^i c_i(E)$ для классов Черна двойственного расслоения и формула $c_1(L \otimes M) = c_1(L) + c_1(M)$ для первого класса Черна тензорного произведения двух линейных расслоений. В отличие от этих двух формул (которые верны только для обычных когомологий) формула Уитни верна для любой ориентируемой теории когомологий (например, для комплексных ориентируемых кобордизмов). Поскольку при доказательстве теоремы Бореля (см. ниже) достаточно использовать только формулу Уитни, то и теорема Бореля также верна для любой ориентируемой теории когомологий.

Пример 9.4. Найдём с помощью формулы Уитни полный класс Черна $c(\mathcal{H})$ тавтологического расслоения над \mathbb{P}^{r-1} . Имеем

$$0 \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{O}(1) \rightarrow 0,$$

так что $c(\mathcal{H}) \cdot c(\mathcal{O}(1)) = 1$. Обозначим за x класс гиперплоскости в \mathbb{P}^{r-1} . Как мы уже выяснили выше $c(\mathcal{O}(1)) = 1 + x$. Поделив на $(1 + x)$ (то есть умножив на $(1 - x + x^2 - \dots + (-1)^{r-1}x^{r-1})$), получим $c(\mathcal{H}) = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^{r-1}x^{r-1}$. С другой стороны, по определению $c(\mathcal{H}) = 1 + c_1(\mathcal{H}) + \dots + c_{r-1}(\mathcal{H})$. Сравнивая члены одинаковых степеней, получаем $c_i(\mathcal{H}) = (-1)^i x^i$ при $i \leq (r - 1)$.

Пусть \mathcal{L} — линейное расслоение. Напомним, что линейным расслоением называется векторное расслоение ранга 1, то есть расслоение со слоем прямая (термин “линейное расслоение” не вполне удачный, но общепринятый). Тогда $c_1(\mathcal{L})$ даёт класс когомологий степени два. Таким образом, из группы классов линейных расслоений, рассматриваемых с точностью до изоморфизма (групповая операция — тензорное произведение) получаем гомоморфизм в группу $H^2(X, \mathbb{Z})$ вторых когомологий: $\mathcal{L} \mapsto c_1(\mathcal{L})$. Как уже говорилось, это отображение будет гомоморфизмом только для обычных когомологий. Скажем, для кобордизмов вместо аддитивного группового закона $c_1(\mathcal{L} \otimes \mathcal{M}) = c_1(\mathcal{L}) + c_1(\mathcal{M})$ будет *универсальный формальный групповой закон* $c_1(\mathcal{L} \otimes \mathcal{M}) = F(c_1(\mathcal{L}), c_1(\mathcal{M}))$, где $F(u, v)$ — довольно сложный формальный степенной ряд от двух переменных, в котором только линейная часть имеет вид $u + v$.

Заметим, что группа классов изоморфизма линейных расслоений изоморфна группе Пикара (см. [3, Главу 1.1]), а первый класс Черна даёт способ по расслоению построить дивизор. Например, для *очень обильного* линейного расслоения (то есть полученного как ограничение расслоения $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)$ на X для некоторого проективного вложения $X \rightarrow \mathbb{P}^N$) первый класс Черна — это в точности дивизор гиперплоского сечения. Из расслоения мы научились делать дивизор. Теперь наоборот. Пусть дивизор в карте U_α задаётся $f_\alpha = 0$. Тогда можно определить линейное расслоение с помощью тривиализаций $U_\alpha \times \mathbb{C}$ и функций перехода $g_{\alpha\beta} = \frac{f_\alpha}{f_\beta}$. То есть карты $U_\alpha \times \mathbb{C}$ и $U_\beta \times \mathbb{C}$ склеиваются путём отождествления пар (x, v) и $(x, g_{\alpha\beta}(x)v)$ для всех $x \in U_\alpha \cap U_\beta$.

Теперь мы можем уточнить теорему о проективизации расслоения. Пусть $Y = \mathbb{P}(E^*) \rightarrow X$. Тогда $H^*(Y) = H^*(X)[\xi]/(\xi^r - c_1\xi^{r-1} + \dots + (-1)^r c_r)$, где $c_i := c_i(E)$ — классы Черна, а ξ имеет такой геометрический смысл. На Y есть тавтологическое расслоение \mathcal{H}_E ранга $r - 1$ и тавтологическое факторрасслоение $\mathcal{O}_E(1) = \pi^*E/\mathcal{H}_E$. Тогда $\xi = c_1(\mathcal{O}_E(1))$.

Упражнение 9.5. *Используя формулу Уитни для короткой точной последовательности*

$$0 \rightarrow \mathcal{H}_E \rightarrow \pi^*E \rightarrow \mathcal{O}_E(1) \rightarrow 0$$

докажите соотношение $\xi^r - c_1\xi^{r-1} + \dots + (-1)^r c_r = 0$.

Из упражнения легко вывести полное доказательство теоремы о проективизации расслоения. Действительно, тот факт, что $H^*(Y)$ — свободный $H^*(X)$ -модуль с r образующими $1, \xi, \dots, \xi^{r-1}$ можно проверить, построив клеточное разбиение для Y . А мультипликативная структура полностью определяется тем, как ξ^r раскладывается по образующим.

Теперь объясним геометрический смысл x_i в теореме Бореля. На \mathbb{F}_n есть n тавтологических расслоений $\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_n$. Слой расслоения \mathcal{V}_i над данным флагом — это i -тое пространство флага. Заметим, что \mathcal{V}_n — тривиальное расслоение. Теперь определим n линейных расслоений $\mathcal{L}_i = \mathcal{V}_i/\mathcal{V}_{i-1}$ (положим $\mathcal{V}_0 = 0$, то есть $\mathcal{L}_1 = \mathcal{V}_1$). Тогда $x_i = c_1(\mathcal{L}_i)$.

Теперь мы доведём до конца второй подход к доказательству теоремы Бореля. Напомним, что

$$P_1 = \{V_{n-1} \subset \mathbb{C}^n\} = \mathbb{P}^{n-1}$$

$$P_2 = \{V_{n-2} \subset V_{n-1} \subset \mathbb{C}^n\} = \mathbb{P}(\mathcal{V}_{P_1}^{n-1})$$

...

$$P_{n-1} = \{V_1 \subset \dots \subset V_{n-1} \subset \mathbb{C}^n\} = \mathbb{P}(\mathcal{V}_{P_{n-2}}^2)$$

Тогда $\mathbb{F}_n = \mathbb{P}(\mathcal{V}_{P_{n-2}}^2) = P_{n-1}$.

Здесь и далее, мы допускаем вольность в обозначениях, когда расслоения \mathcal{V}_j и \mathcal{L}_j (при $j \geq n - i$) рассматриваем как расслоения на P_i .

Применяя $n - 1$ раз теорему о проективизированном расслоении несложно вывести, что $H^*(\mathbb{F}_n)$ мультипликативно порождается образующими x_n, x_{n-1}, \dots, x_2 .

Упражнение 9.6. *Докажите изоморфизм линейных расслоений на P_{n-i} :*

$$\mathcal{O}_{\mathcal{V}^i}(1) \simeq \mathcal{L}_i.$$

Несложно также проверить, что x_1, \dots, x_n удовлетворяют всем соотношениям из идеала S . Действительно, имеем серию коротких точных последовательностей:

$$0 \rightarrow \mathcal{V}^{n-1} \rightarrow \mathcal{V}^n \rightarrow \mathcal{L}_n \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \mathcal{V}^{n-2} \rightarrow \mathcal{V}^{n-1} \rightarrow \mathcal{L}_{n-1} \rightarrow 0$$

...

$$0 \rightarrow \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{V}^2 \rightarrow \mathcal{L}_2 \rightarrow 0$$

Упражнение 9.7. Вывести из формулы Уитни, что $(1 + x_1) \dots (1 + x_n) = 1$.

Поскольку $(1 + x_1) \dots (1 + x_n) = 1 + \underbrace{(x_1 + \dots + x_n)}_{=0} + \dots + \underbrace{\sigma_n(x_1, \dots, x_n)}_{=0}$, мы получаем, что все элементарные симметрические многочлены σ_i от x_i равны нулю.

Осталось проверить, что нет других соотношений. Это можно вывести косвенно из сравнения размерностей \mathbb{Z} -модулей, а можно прямо — выписав соотношения из теоремы о проективизированном расслоении. Последний способ является поучительным упражнением на применение классов Черна и формулы Уитни. Мы разберём случай $n = 3$. Общий случай оставим в качестве упражнения.

Имеем $\mathbb{P}^2 = P_1 = \{V_2 \subset \mathbb{C}\}$, $P_2 = \mathbb{F}_3 = \{V_1 \subset V_2 \subset \mathbb{C}^3\}$. Мы знаем, что $H^*(\mathbb{P}^2) = \mathbb{Z}[x_3]/(x_3^3)$, $P_2 = \mathbb{P}(\mathcal{V}_{\mathbb{P}^2}^2) \Rightarrow H^*(P_2) = H^*(\mathbb{P}^2)[x_2]/(x_2^2 - c_1(\mathcal{V}^2)x_2 + c_2(\mathcal{V}^2))$. Но мы уже выяснили (см. Пример 9.4), что $c_1(\mathcal{V}^2) = -x_3$, $c_2(\mathcal{V}^2) = x_3^2$. Отсюда можно заключить, что $H^*(P_2) = \mathbb{Z}[x_2, x_3]/(x_3^3, x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2)$. Легко проверить (хотя это не сразу очевидно), что идеал $(x_3^3, x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2)$ совпадает с S . В общем случае, мы также получим описание S отличное от стандартного (все детали можно найти в [11, Proposition 3.6.15]).

Теперь докажем теорему Бореля с помощью первого подхода с прошлой лекции. В чём-то этот способ проще, поскольку позволяет сразу получить стандартное описание идеала S .

Теорема 9.8 (о расслоении флагов). Пусть $E \rightarrow X$ — векторное расслоение, $\mathbb{F}(E)$ — полные флаги в E . Тогда

$$H^*(\mathbb{F}(E)) = H^*(X)[x_1, \dots, x_n]/(\sigma_i(x_1, \dots, x_n) = c_i(E), i = 1, \dots, n).$$

Нас интересует случай $X = \text{pt}$, $E = \mathbb{C}^n$, $\mathbb{F}(E) = \mathbb{F}_n$. Тогда из теоремы о расслоении флагов в качестве простейшего частного случая следует теорема Бореля. Но как это часто бывает, более общее утверждение при этом проще доказать.

Доказательство. Индукция по n . База очевидна (вопреки тому, что написано в доказательстве [11, Proposition 3.8.1], теорема Бореля для этого не нужна). Пусть $Y = \mathbb{P}(E^*)$ — гиперплоскости в E . Имеем $\mathcal{H}_E \rightarrow Y$, $\text{rk}(\mathcal{H}(E)) = n - 1$, причём $\mathbb{F}(\mathcal{H}_E) = \mathbb{F}(E)$. Но к \mathcal{H}_E уже можно применить предположение индукции.

Задача 9.9. Довести доказательство до конца. □

10. СВЯЗЬ ТЕОРИИ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУППЫ G И ДИВИЗОРОВ НА G/B

Здесь G будет любой редуктивной группой. Основным примером послужит $G = \text{GL}_n$ или $G = \text{SL}_n$.

Напомним теорию: пусть $\pi : G \rightarrow \text{GL}(V)$ — неприводимое конечномерное представление, и в G фиксирована борелевская подгруппа B , тогда существует единственная прямая $\langle v \rangle$, для которой $B\langle v \rangle = \langle v \rangle$. Этот v — старший вектор. Весом $\lambda(v)$ представления называется характер тора $T \in B$ на $\langle v \rangle$.

Пример 10.1. Пусть $G = \text{GL}(n)$, V тавтологическое, тогда $v = e_1$, $\lambda(v) = t_1 \leftrightarrow (1, 0, \dots, 0)$.

Теорема 10.2. Неприводимые представления G биективно соответствуют доминантным весам.

Для $\text{GL}(n)$ вес доминантный, если $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$. Имеем отображение $G/B \rightarrow \mathbb{P}(V_\lambda)$, $g \rightarrow \pi(g)\langle v \rangle$, являющееся вложением для строго доминантного веса (в случае GL это условие доминантности со строгими знаками).

Предложение 10.3. Если вес λ строго доминантный, то $p_\lambda : G/B \rightarrow \mathbb{P}(V_\lambda)$ является вложением.

Обозначим за \mathfrak{X}_T решётку характеров максимального тора T .

Предложение 10.4. Для полупростой (то есть для редуктивной группы с дискретным центром) односвязной группы G $\text{Pic}(G/B) \simeq \mathfrak{X}_T$.

Изоморфизм устроен так: строго доминантному весу λ сопоставляем очень обильный дивизор D_λ , являющийся дивизором гиперплоского сечения для вложения $G/B \rightarrow \mathbb{P}(V_\lambda)$, на остальные веса продолжаем по линейности. Докажем эту предложение для $G = \text{SL}_n$.

Доказательство. Мы знаем, что $\text{Pic}(\mathbb{F}_n) = \langle D_1, \dots, D_{n-1} \rangle_{\mathbb{Z}}$, где $D_i = \{F : V_i(F) \cap E^{n-i} \neq \{0\}\}$ — дивизоры Шуберта (здесь E^i — фиксированное подпространство размерности i). Надо найти такое представление V_λ , что D_i — дивизор гиперплоского сечения для $\mathbb{F}_n \rightarrow \mathbb{P}(V_\lambda)$.

Упражнение 10.5. Пусть V тавтологическое представление. Тогда представления $\Lambda^i V$ неприводимы для всех $i = 1, \dots, n-1$, и D_i — гиперплоское сечение для $\mathbb{F}_n \rightarrow \mathbb{P}(\Lambda^i V)$.

Например, в V есть старший вектор e_1 , и \mathbb{F}_n отображается как GL-орбита $\langle e_1 \rangle$ в $\mathbb{P}(V)$. Это отображение забвения всех пространств флага, кроме прямой, причём образ — всё $\mathbb{P}(V)$. В общем случае вместо проективного пространства в образе получатся грассманианы. \square

11. МНОГОЧЛЕНЫ ШУБЕРТА

В нескольких предыдущих параграфах мы преимущественно задавались геометрическими вопросами, сейчас же займёмся ещё и комбинаторикой.

Как мы выяснили ранее, $H^*(\mathbb{F}_n) \simeq \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]/S$, $x_i = -c_i(\mathcal{L})$. С другой стороны имеется базис из циклов Шуберта, и естественно спросить, какие многочлены им соответствуют? Вообще говоря, многочлены, представляющие циклы Шуберта определены по модулю идеала S , но принято их фиксировать за счёт следующего выбора базиса.

Упражнение 11.1. В $H^*(\mathbb{F}_n)$ набор $\{x_1^{i_1} \dots x_{n-1}^{i_{n-1}} : i_k \leq n-k, k=1, \dots, n-1\}$ составляет базис.

Определение 11.2. Многочлен Шуберта S_w — целочисленная линейная комбинация мономов вышеуказанного вида, для которой $S_w \bmod S = [X_w]$.

Знак « $-$ » в определении элементов x_i выбран для удобства, чтобы все коэффициенты в многочленах Шуберта были положительны.

Пример 11.3.

- $n = 2$, $\mathbb{F}_2 = \mathbb{P}^1$, $X_e = [\text{pt}]$, $X_{(12)} = \mathbb{P}^1$.
 $S_{(12)} = 1$, $S_e = x_1 (= -x_2)$ — первый класс Черна расслоения \mathcal{L}_2 .
- $n = 3$, $X_{(123)} = c_1(\mathcal{L}_1)$, $X_{(132)} = c_1(\mathcal{L}_3) \Rightarrow S_{(123)} = x_1$, $S_{(132)} = x_1 + x_2$;
 $X_{(12)} = X_{(132)}^2 \Rightarrow S_{(12)} = S_{(132)}^2 = (x_1 + x_2)^2 \equiv_S x_1 x_2$, $S_{(23)} = x_1^2$
 $S_{(13)} = 1$, $S_e = x_1^2 x_2$.

Задача 11.4 (про дивизоры и кривые Шуберта).

0. $S_e = x_1^{n-1} x_2^{n-2} \dots x_{n-1}$ (следствие доказательства теоремы Бореля)

1. $S_{s_i} = \frac{S_e}{x_i}$ (тоже)

2. $S_{w_0 s_i} = x_1 + \dots + x_i$, где $\mathfrak{S} \ni w_0 = (1, \dots, n) \rightarrow (n, \dots, 1)$ — самый длинный элемент в $(X_{w_0 s_i} = c_1(\mathcal{V}^n/\mathcal{V}^i))$ и формула Уитни).

- Для циклов Шуберта других размерностей всё уже не так просто. Например, для $n = 4$, $w = (1, 2, 3, 4)$, $S_w = x^2 y + x y^2 + x^2 z + x y z + y^2 z$.

Задача 11.5 (открытая). Для данного n найти многочлен Шуберта с наибольшим числом мономов или хотя бы их количество, то есть $S_w(1, \dots, 1)$ (мономы одного и того же типа мы тоже различаем, скажем, $3x_1$ это три монома, а не один).

Задача 11.6 (решённая). Для любого n и $w = (1, n, n-1, \dots, 2)$ оказывается, что $S_w(1, \dots, 1) = C_{n-1}$ — числа Каталана. Таким образом, мы получаем ещё одно из большого множества их определений.

Здесь мы видим, что число мономов растёт достаточно быстро. Но на самом деле рост значительно более быстрый (числа Каталана дают максимум только для $n = 2, 3, 4$).

Теперь мы опишем алгоритм вычисления многочленов Шуберта.

Определение 11.7. Оператор разделённых разностей (оператор Демазюра) A_i действует на $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ по формуле

$$A_i(f) = \frac{f(\dots, x_i, x_{i+1}, \dots) - f(\dots, x_{i+1}, x_i, \dots)}{x_i - x_{i+1}}$$

Упражнение 11.8.

- Показать корректность.
- $\ker(A_i) = \text{Im}(A_i) = \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]^{(i, i+1)} := R_i$. За R_i обозначим подкольцо многочленов инвариантных относительно транспозиции $(i, i+1)$
- Оператор A_i R_i -линеен, то есть $A_i(rf) = r A_i(f)$ для каждого $r \in R_i$ и $f \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$.
- На операторах Демазюра выполняются соотношения, аналогичные соотношениям на стандартных образующих в группе \mathfrak{S}_n :

$$A_i^2 = 0$$

$A_i A_j = A_j A_i$ в случае $|i - j| \geq 2$ — дальняя коммутативность.

$A_i A_{i+1} A_i = A_{i+1} A_i A_{i+1}$ — соотношения кос.

Ясно, что $S \subseteq \ker(A_i)$, так что действие A_i опускается на $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]/S$.

Теорема 11.9 (И. Бернштейн–Гельфанд–Гельфанд, Демазюр). $S_e = x_1^{n-1} x_2^{n-2} \dots x_{n-1}$, $S_w = A_{i_1} \dots A_{i_1}$, где $w = s_{i_1} \dots s_{i_1}$ — любое приведённое (то есть минимальной длины) разложение.

Пример 11.10. $n = 3$, $S_{(12)} = A_1 S_e = A_1(x_1^2 x_2) = x_1 x_2$

Упражнение 11.11. Если разложение неприведённое, то $A_{i_1} \dots A_{i_1} = 0$. Если разложение приведённое, то оператор $A_{i_1} \dots A_{i_1}$ (часто обозначаемый просто A_w) зависит только от w .

В решении второй части упражнения полезен такой факт. Если построить граф, вершины которого соответствуют приведённым разложениям, а рёбра — соотношениям, не считая $s^2 = e$, то граф будет связан (это нетривиально). Об этом подробно написано в [11, Proposition 2.1.6].

12. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ОПЕРАТОРОВ ДЕМАЗЮРА И ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 11.9

Теорема 11.9 была доказана в начале 70-х годов прошлого века независимо в совместной работе И. Бернштейна–Гельфанда–Гельфанда [1] и в работе Демазюра [4] (многие идеи присутствовали уже в неопубликованной рукописи Шевалле начала 50-х). Доказательства абсолютно разные. Доказательство Демазюра существенно использует следующую геометрическую интерпретацию операторов разделённых разностей (которая полностью отсутствует в [1], так что остаётся загадкой, как они придумали эти операторы). Пусть $\mathbb{F}_n^i = \{V_0 \subset \dots \subset V_{i-1} \subset V_{i+1} \subset \dots \subset V_n\}$, $p_i : \mathbb{F}_n \rightarrow \mathbb{F}_n^i$ проективное расслоение со слоем \mathbb{P}^1 . Тогда имеем $A_i = p_i^* p_{i*}$. Это отображение $H^*(\mathbb{F}_n)$ в себя. Заметим, что R_i это в точности $p_i^* H^*(\mathbb{F}_n^i) \simeq H^*(\mathbb{F}_n^i)$.

Напомним, что есть прямой и обратный образ.

$p : Y \rightarrow X$ — морфизм многообразий.

$p^* : H^*(X) \rightarrow H^*(Y)$ — гомоморфизм колец, сохраняющий коразмерность циклов (то есть степени).

$p_* : H^*(Y) \rightarrow H^{*-d}(X)$ — гомоморфизм $H^*(X)$ -модулей (не колец!), сохраняющий размерность (то есть понижающий степени на $d := \dim Y - \dim X$).

Пример 12.1. Пусть $p : \mathbb{P}^1 \rightarrow \text{pt}$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} p^* : \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z}[t]/(t^2), & 1 &\mapsto 1 \\ p_* : \mathbb{Z}[t]/(t^2) &\rightarrow \mathbb{Z}, & 1 &\mapsto 0, t \mapsto 1 \end{aligned}$$

Теперь то же самое через оператор Демазюра: $\mathbb{P}^1 = \mathbb{F}_2$, $H^*(\mathbb{F}_2) = \mathbb{Z}[x_1, x_2]/(x_1 + x_2, x_1 x_2)$, $x_1 = t$, $x_2 = -t$. Видим, что $p^* p_* = A_1$, т.к. $1 \mapsto 0 = A_1(0)$, $x_1 \mapsto 1 = A_1(x_1)$.

Для произвольного n , тождество $A_i = p_i^* p_{i*}$ следует из более общего утверждения.

Задача 12.2. Для расслоения $E \rightarrow X$ ранга 2 рассмотрим $Y = \mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(E^*)$ (для ранга 2, прямые и гиперплоскости — одно и то же). Теорема о проективизации даёт когомологии Y также и в такой форме:

$$H^*(X)[x_1, x_2]/(x_1 + x_2 = c_1(E), x_1x_2 = c_2(E)).$$

Определим на этом кольце оператор разделённых разностей A_1 по обычной формуле. Обозначим за $p : Y \rightarrow X$ естественную проекцию. Тогда $p^*p_* = A_1$. (Указание: поскольку p^*p_* и A_1 сохраняют структуру $H^*(X)$ -модуля, достаточно сравнить их действие на образующих 1 и $\xi = x_1$. Из соображений размерности $p^*p_*(1) = 0$. Осталось проверить, что $p^*p_*(\xi) = 1$. Здесь полезно рассмотреть сначала случай, когда в E есть тривиальное линейное подрасслоение и реализовать ξ гиперповерхностью в Y .)

Теперь мы рассмотрим основные идеи в подходе Демазюра и в подходе Бернштейна с Гельфандами. Подход Демазюра:

$$\text{Во первых, } A_i = p_i^*p_{i*} \text{ (это мы уже обсудили), во-вторых } p_i^*p_{i*}X_w = \begin{cases} X_{ws_i}, & \text{если } l(ws_i) = l(w) - 1 \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

(это не очень сложно проверить). Отсюда всё получаем по индукции.

Подход Берштейна-Гельфанда-Гельфанда:

Главная составляющая — формула Шевалле для умножения цикла Шуберта на дивизор, точнее две версии этой формулы — геометрическая и алгебраическая, которые можно доказать независимо. Напомним, что элементы $\text{Pic}(\mathbb{F}_n)$ соответствуют точкам решётки весов, $D_\lambda \leftrightarrow \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Геометрическая версия:

$$D_\lambda X_w = \sum_{\substack{s=(i,j) \\ l(ws)=l(w)-1}} (\lambda_i - \lambda_j) X_{ws}$$

Алгебраическая версия:

$$D_\lambda A_{i_1} \dots A_{i_l} S_e = \sum_{1 \leq k \leq l} (\lambda_i - \lambda_j) A_{i_1} \dots \widehat{A_{i_k}} \dots A_{i_l} S_e,$$

где $(i, j) = s_{i_{k+1}} \dots s_{i_l}(i_k, i_{k+1})$, а суммирование достаточно вести по тем k , для которых $l(s_{i_1} \dots \widehat{s_{i_k}} \dots s_{i_l}) = l - 1$.

Пример 12.3. $n = 3$; $w = (123) = s_1s_2$

$$D_\lambda X_w = \sum_{s=(23), (13)} = (\lambda_2 - \lambda_3) X_{s_1} + (\lambda_1 - \lambda_3) X_{s_2}$$

$$D_\lambda A_2 A_1 S_e = \sum_{k=1,2} = (\lambda_1 - \lambda_3) A_2 S_e + (\lambda_2 - \lambda_3) A_1 S_e$$

Упражнение 12.4. Доказать эквивалентность версий, используя, что $X_w = A_w S_e$.

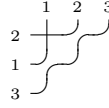
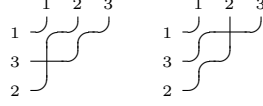
Упражнение 12.5. Проверьте тождество $D_\lambda A_i = A_i D_{s_i \lambda} + (\lambda_i - \lambda_{i+1})$ и выведите из него алгебраическую версию.

Полной индукцией по l можно доказать, что $X_w = A_w S_e$, используя сходство алгебраической и геометрической формул Шевалле.

База для $l = 0$ уже была в качестве упражнения разобрана выше.

Пусть $l > 0$. Сделаем шаг индукции. Предположим, что мы доказали $X_u = A_u S_e$ для всех u с $l(u) < l$. Тогда по формулам Шевалле $D_\lambda^l X_w = D_\lambda^l A_w S_e$ для всех $D_\lambda \in \text{Pic}(\mathbb{F}_n) \Rightarrow X_w = A_w S_e$ из невырожденности формы пересечений на $H^*(\mathbb{F}_n)$.

Заметим, что доказательство Демазюра универсальнее: оно работает для большего класса теорий когомологий, например, для кобордизмов, хотя перенос всех ингредиентов требует дополнительной работы. Для кобордизмов это было сделано Бресслером-Ивенсом [2]

Рис. 1. Приведённая диаграмма с $w = (12)$ и мономом x_1 Рис. 2. Приведённые диаграммы для $w = (23)$ с мономами x_1 и x_2 , соответственно.

13. КОМБИНАТОРНОЕ ОПИСАНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ ШУБЕРТА

Построим диаграммы такого вида: есть целочисленные точки треугольника с вершинами $(0, 0)$, $(n-1, 0)$, $(0, -(n-1))$, к ним подходит n труб сверху и уходят слева. При этом трубы могут пересекаться (вот так $\begin{array}{c} | \\ \text{---} \\ | \end{array}$) или расходиться (вот так $\begin{array}{c} \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \end{array}$) только в целой точке, причём пересекаться каждые две трубы имеют право не более одного раза. Столбцы и строки диаграммы мы нумеруем от вершины $(0, 0)$.

Каждой диаграмме D сопоставим перестановку $w(D)$ на n элементах из условия: труба, входящая в i -том столбце выходит в строке с номером $w(D)(i)$. Также сопоставим моном x^D от $(n-1)$ -ой переменной таким образом:

$$x^D = x_1^{\text{число пересечений в первом столбце}} \dots x_{n-1}^{\text{число пересечений в предпоследнем столбце}}.$$

Теорема 13.1 (Кириллов–Фомин). $[5]S_w = \sum_{w(D)=w_0w} x^D$, где w_0 — самая длинная перестановка.

Пример 13.2. См. рисунки 1 и 2.

- $w = (123)$, $w_0w = (12)$, $S_w = x_1$.
- $w = (132)$, $w_0w = (23)$, $S_w = x_1 + x_2$.

14. КОГОМОЛОГИИ МНОГООБРАЗИЙ ЧАСТИЧНЫХ ФЛАГОВ

До сих пор мы изучали только когомологии многообразия полных флагов, во-первых, потому их кольца когомологий проще описать, а во вторых потому что с их помощью уже несложно описать кольца когомологий и всех многообразий частичных флагов. Это мы сейчас и сделаем. Рассмотрим многообразие частичных флагов $\mathbb{F}_{m_\bullet} = \{V_{m_1} \subset V_{m_2} \subset \dots \subset V_{m_k} \subset \mathbb{C}^n\}$, $m_\bullet = \{m_0 = 0 < m_1 < \dots < m_k < m_k = n\}$.

На \mathbb{F}_{m_\bullet} также есть тавтологические расслоения \mathcal{V}^{m_i} , $i = 0, \dots, k+1$, тавтологические факторрасслоения $\mathcal{E}_i = \mathcal{V}^{m_i} / \mathcal{V}^{m_{i-1}}$. В случае полных флагов расслоения \mathcal{E}_i линейны, здесь же не обязательно: $\dim(\mathcal{E}_i) = m_i - m_{i-1}$.

Теорема 14.1. $H^*(\mathbb{F}_{m_\bullet}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \left[\begin{array}{c} \text{классы Черна расслоений} \\ \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_{k+1} \end{array} \right] / \left(\begin{array}{c} \text{классы Черна расслоения} \\ \mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{E}_{k+1} \\ \text{тривиальны.} \end{array} \right)$

То есть описание в точности повторяет представление Бореля для многообразия полных флагов. Так же как и для представления Бореля легко проверить, что классы Черна расслоения $\mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{E}_{k+1}$ должны быть тривиальны. Действительно, имеем цепь коротких точных последовательностей:

$$0 \rightarrow \mathcal{V}^{m_1} \rightarrow \mathcal{V}^{m_2} \rightarrow \mathcal{E}_2 \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \mathcal{V}^{m_2} \rightarrow \mathcal{V}^{m_3} \rightarrow \mathcal{E}_3 \rightarrow 0$$

...

$$0 \rightarrow \mathcal{V}^{m_k} \rightarrow \mathcal{V}^{m_{k+1}} \rightarrow \mathcal{E}_{k+1} \rightarrow 0$$

Таким образом, по формуле Уитни $c(\mathcal{V}^{m_k}) = c(\mathcal{E}_1) \cdots c(\mathcal{E}_{k+1}) = 1$. Доказать теорему 14.1 можно с помощью естественной проекции $p : \mathbb{F}_n \rightarrow \mathbb{F}_{m_\bullet}$ (забываем все подпространства в полном флаге, размерности которых отличны от m_1, \dots, m_k) и вложения $p^* : H^*(\mathbb{F}_{m_\bullet}) \hookrightarrow H^*(\mathbb{F}_n)$. Опишем образ $p^*(H^*(\mathbb{F}_{m_\bullet})) \simeq H^*(\mathbb{F}_{m_\bullet})$ при этом вложении, используя представление Бореля. Оказывается, образ состоит из всех многочленов, инвариантных относительно перестановок, переставляющих первые m_1 переменных между собой, вторые $m_2 - m_1$ переменных между собой и т.д.

Теорема 14.2. $H^*(\mathbb{F}_{m_\bullet}) = \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]^H / S$, где $H := \mathfrak{S}_{m_1} \times \mathfrak{S}_{m_2 - m_1} \cdots \times \mathfrak{S}_{m_{k+1} - m_k} \subset \mathfrak{S}_n$.

Наблюдение. Как легко проверить, классы Черна расслоения \mathcal{E}_i — элементарные симметрические функции от $x_{m_i}, \dots, x_{m_{i+1}-1}$, а классы Черна расслоения $c(\mathcal{E}_1) \cdots c(\mathcal{E}_{k+1})$ порождают идеал S . Поэтому Теорема 14.1 сразу следует из Теоремы 14.2. Кроме того, образ $p^*(H^*(\mathbb{F}_{m_\bullet}))$ содержит все многочлены, инвариантные относительно H (поскольку он содержит все классы Черна расслоений \mathcal{E}_i).

Упражнение 14.3. Докажите Теорему 14.2 для случая, когда $\mathbb{F}_{m_\bullet} = \mathbb{F}_n^i$

Таким образом, осталось доказать обратное включение, то есть $p^*(H^*(\mathbb{F}_{m_\bullet})) \subset \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]^H / S$. Это можно сделать двумя способами. Можно показать, что образ $p^*(H^*(\mathbb{F}_{m_\bullet}))$ инвариантен относительно H .

Упражнение 14.4. Если $m_j \leq i \leq m_{j+1} - 2$, то проекция $p : \mathbb{F}_n \rightarrow \mathbb{F}_{m_\bullet}$ факторизуется через \mathbb{F}_n^i . Соответственно, вложение $p^* : H^*(\mathbb{F}_{m_\bullet}) \hookrightarrow H^*(\mathbb{F}_n)$ проходит через $H^*(\mathbb{F}_n^i)$. Выведите отсюда, что $p^*(H^*(\mathbb{F}_{m_\bullet}))$ инвариантен относительно транспозиции $(i \ i + 1)$.

А можно сравнить размерности.

Упражнение 14.5. Используя теорему о проективизации расслоения, докажите, что $H^*(\mathbb{F}_n)$ — свободный модуль ранга $m_1!(m_2 - m_1)! \cdots (m_{k+1} - m_k)!$ над $H^*(\mathbb{F}_{m_\bullet})$.

Пример 14.6. Пусть $\mathbb{F}_{m_\bullet} = G(2, 4) = \{V_2 \subset \mathbb{C}^4\}$. $\mathcal{E}_1 = \mathcal{V}^2$, $\mathcal{E}_2 = \mathcal{V}^4 / \mathcal{V}^2$.

$$c_1(\mathcal{E}_1) = u_1 \in H^2, \quad c_1(\mathcal{E}_2) = v_1$$

$$c_2(\mathcal{E}_1) = u_2 \in H^4, \quad c_2(\mathcal{E}_2) = v_2$$

$$(1 + u_1 + u_2)(1 + v_1 + v_2) = c(\mathcal{E}_1) \cdot c(\mathcal{E}_2) = 1.$$

$$u_1 + v_1 = 0 \Rightarrow v_1 = -u_1.$$

$$u_2 + v_2 + u_1 v_1 = 0 \Rightarrow v_2 = u_1^2 - u_2.$$

$$u_1 v_2 + u_2 v_1 = 0.$$

$$u_2 v_2 = 0.$$

$H^*(G(2, 4)) = \mathbb{Z}[u_1, u_2] / (u_1^3, u_2^2 - u_1^2 u_2)$, $\deg(u_1) = 2$, $\deg(u_2) = 4$. Базисом служит набор $\left\{ \underbrace{1}_0, \underbrace{u_1}_2, \underbrace{u_2, u_1^2}_4, \underbrace{u_1 u_2}_6, \underbrace{u_2^2}_8 \right\}$. Как мы помним, числа Бетти именно такие.

15. ОБОБЩЕНИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФЛАГОВ

Будем считать, что G — произвольная связная редуктивная группа (поскольку нас интересует многообразие флагов G/B , мы можем считать, что центр группы G дискретен, то есть G полупроста). В этом случае $H^*(G/B, \mathbb{Z})$ уже не обязательно порождается компонентой $H^2(G/B, \mathbb{Z})$. Но если мы перейдем к когомологиям с рациональными коэффициентами, то будет справедлив аналог представления Бореля для \mathbb{F}_n .

Теорема 15.1 (Борель). $H^*(G/B, \mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Q}[T]/(\mathbb{Q}[T]_{>0}^W)$.

Здесь, $\mathbb{Q}[T]$ — это пространство многочленов (обычных, а не Лорана) с рациональными коэффициентами на максимальном торе T . Группа Вейля W действует на торе, а следовательно и на многочленах $\mathbb{Q}[T]$. Напомним, что корни — это веса присоединённого представления. Они порождаются k простыми корнями $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, где $k = \dim(T) =: \text{rk}(G)$. Выбор простых корней зависит от выбора борелевской подгруппы.

Упражнение 15.2. $G = \text{SL}(n)$, $\mathfrak{X}_G = \mathbb{Z}^n = \langle \chi_1, \dots, \chi_n \rangle_{\mathbb{Z}}$, $\chi_i(\text{diag}(t_1, \dots, t_n)) = t_i$. Тогда корни $\{\chi_i - \chi_j\}_{i \neq j}$. Простые корни (для верхнетреугольной борелевской) $\alpha_1 = \chi_1 - \chi_2, \dots, \alpha_{n-1} = \chi_{n-1} - \chi_n$.

Напомним, как из веса получается дивизор:

$$\begin{array}{ccc} \lambda & V_\lambda \ni v_\lambda & G/B \hookrightarrow \mathbb{P}(V_\lambda) \\ \text{строго} & \rightsquigarrow & \text{вектор} \\ \text{доминантный} & \text{старшего веса} & g \mapsto g\langle v_\lambda \rangle \end{array};$$

D_λ — класс гиперплоского сечения. Из строго доминантного веса делается очень обильный дивизор. На остальные, в том числе корни, продолжаем по линейности.

Заметим, что представление Бореля отождествляет веса с линейными функциями на T (то есть с элементами степени один в $\mathbb{Q}[T]$) таким образом: характер $x_1^{m_1} \dots x_k^{m_k}$ соответствует линейной функции $m_1 x_1 + \dots + m_k x_k$ (поэтому в формулировке теоремы Бореля иногда берут не многочлены на торе, а многочлены на алгебре Ли тора).

Теорема 15.3 (Бернштейн-Гельфанд-Гельфанд, Демазюр). Пусть P_i — минимальные параболические подгруппы. Имеем $p_i : G/B \rightarrow G/P_i$. Операторы Демазюра $A_i = p_i^* p_{i*}$. Тогда имеем

$$X_e = \frac{1}{|W|} \prod_{\alpha \in \Delta^+} D_\alpha, \quad X_w = A_{i_1} \dots A_{i_l} X_e, \quad w = s_{i_1} \dots s_{i_l}.$$

Здесь s_i — простое отражение, соответствующее простому корню α_i .

Как и в случае \mathbb{F}_n , операторы Демазюра можно определить и чисто алгебраически, а именно

$$A_i : \mathbb{Q}[T] \rightarrow \mathbb{Q}[T]; \quad A_i : f \rightarrow \frac{f - s_i f}{\alpha_i}.$$

Упражнение 15.4. Для $\text{GL}(n)$ имеем $\frac{1}{n!} \prod_{\alpha \in \Delta^+} D_\alpha = x_1^{n-1} \dots x_{n-1}$.

В общем случае, получить формулу для X_e через дивизоры, не содержащую знаменателя, не удастся (именно потому что дивизоры не порождают кольцо когомологий с целыми коэффициентами, а только с рациональными).

16. ВЕСОВЫЕ МНОГОГРАННИКИ

Теперь мы частично интерпретируем геометрию многообразия полных флагов через многогранники. Рассматривать многогранники станем в решётке весов $\mathfrak{X}_G \simeq \mathbb{Z}^k \subset \mathbb{R}^k$, $k = \dim(T) = \text{rk}(G)$. Решётка весов зависит от группы, а не только от алгебры Ли. Группа Вейля действует на решётке весов (поскольку действует на торе), причём это действие сохраняет некоторое невырожденное скалярное произведение на решётке, то есть группа Вейля действует как группа, порождённая отражениями относительно гиперплоскостей, перпендикулярных корням.

Определение 16.1. Решётка корней — подгруппа решётки весов, порождённая корнями. Она уже определяется алгеброй Ли.

Пример 16.2.

- $G = \text{GL}(n)$, $\mathfrak{X}_G = \langle \chi_1, \dots, \chi_n \rangle_{\mathbb{Z}}$. Группа Вейля \mathfrak{S}_n действует перестановками векторов.
- $G = \text{SL}(n)$, $\mathfrak{X}_G = \langle \chi_1, \dots, \chi_n \rangle / \langle \chi_1 + \dots + \chi_n \rangle$ (поскольку SL_n вкладывается в GL_n , а решётки весов отображаются в обратную сторону, решётка весов для SL_n будет факторрешёткой решётки весов для GL_n). Группа Вейля \mathfrak{S}_n действует как группа изометрий правильного $(n-1)$ -мерного симплекса.

- $\mathfrak{X}_{\text{PGL}(n)} = \langle \chi_1, \dots, \chi_n \mid \sum \chi_i = 0 \rangle$ (здесь всё отображается наоборот, поэтому решётка весов для PGL_n будет подрешёткой решётки весов для GL_n , и совпадёт с решёткой корней).

Пусть $\pi : G \rightarrow \text{GL}(V)$ — представление.

Определение 16.3. *Весовой многогранник* — выпуклая оболочка (в $\mathbb{R}^k \supset \mathfrak{X}_G$) всех характеров в представлении $\pi|_G$.

Факт 16.4. $V = V_\lambda \Rightarrow P_\lambda = \text{conv}\{w\lambda\}_{w \in W}$.

Наконец можно дать определение строго доминантного веса: доминантный вес *строго доминантен*, если все $w\lambda$ различны. В этом случае, весовой многогранник для представления V_λ имеет ровно $|W|$ вершин.

Пример 16.5. $G = \text{SL}(3)$.

- V тавтологическое. Веса χ_1, χ_2, χ_3 . Весовой многоугольник — треугольник.
- V присоединённое. Веса $\{\chi_i - \chi_j\}$. Старший вес $\chi_1 - \chi_3$. Весовой многоугольник — шестиугольник, то есть представление строго доминантно.
- $G = \text{SL}(n)$, λ строго доминантный. P_λ — *пермutoэдр* (получается срезанием граней у правильного $(n - 1)$ -мерного симплекса: от каждой грани во всех размерностях отступаем на небольшое расстояние и срезаем симметрично по гиперплоскости, параллельной грани).

Упражнение 16.6. *Найти весовой многогранник для присоединённого представления $\text{SL}(4)$. Внимание, оно не строго доминантно.*

Упражнение 16.7. *Докажите, что у пермutoэдра ровно $2^n - 2$ гиперграней (то есть столько же, сколько собственных граней у $(n - 1)$ -мерного симплекса).*

17. ВЕСОВЫЕ МНОГОГРАННИКИ И МНОГООБРАЗИЯ ФЛАГОВ

Определение 17.1. B -модуль Демазюра $D(w\lambda)$ — минимальное B -инвариантное подпространство в V_λ , содержащее ненулевой вектор $v_{w\lambda}$ с весом $w\lambda$ (из теории представлений следует, что такой вектор всегда один с точностью до пропорциональности, он получается из вектора старшего веса v_λ применением w , то есть $v_{w\lambda} = wv_\lambda$).

Предложение 17.2 (Бернштейн-Гельфанд-Гельфанд). *Вложим G/B в $\mathbb{P}(V_\lambda)$, где λ строго доминантный. Тогда*

$$X_w = G/B \cap \mathbb{P}(D(w\lambda)).$$

Поскольку клетка Шуберта $C_w = Bwv_\lambda = Bv_{w\lambda}$, а $X_w = \overline{C}_w$, мы сразу получаем, что $X_w \subset G/B \cap \mathbb{P}(D(w\lambda))$. Осталось проверить, что все клетки Шуберта, входящие в $G/B \cap \mathbb{P}(D(w\lambda))$ входят также и в X_w . Для этого можно использовать такой факт из теории представлений.

Факт 17.3. *Все веса в $D(w\lambda)$ содержатся в конусе с вершиной $w\lambda$ натянутом на простые корни.*

Следствие 17.4. *Если $l(u) + l(w) = \dim(G/B)$, то*

$$X_w \cdot X_u = \begin{cases} [\text{pt}], & u = w_0w, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Напомним, что $w_0 \in W$ — самый длинный элемент.

Доказательство. Представим X_w как $G/B \cap \mathbb{P}(D(w\lambda))$, а X_u как $G/B \cap \mathbb{P}(D^-(w_0u\lambda))$, где $D^-(w\lambda)$ обозначает модуль Демазюра для нижнетреугольной борелевской подгруппы $B^- = w_0Bw_0$ (заметим, что $w_0 = w_0^{-1}$). Если модули Демазюра $D(w\lambda)$ и $D^-(w_0u\lambda)$ пересекаются, то и конуса, натянутые на веса этих модулей пересекаются. Из приведённого выше явного описания этих конусов следует, что они противоположны, так что они имеют общую точку если и только если вершина одного лежит в другом. С другой стороны, из условия $l(u) + l(w) = \dim(G/B) \Leftrightarrow l(w_0u) = l(w)$ получается, что вершина одного конуса может лежать только в вершине другого, или строго снаружи. Поэтому $w = w_0u$, или что то же самое $u = w_0w$. \square

Предложение 17.5. Из следствия 17.4 следует положительность структурных коэффициентов в $H^*(G/B)$. А именно, пусть $v, w \in W$. Тогда $X_v X_w = \sum C_{vw}^u X_u$, где все C_{vw}^u неотрицательны.

Доказательство. Комбинаторного доказательства ещё нет, но геометрически это доказывается просто. С одной стороны, $C_{vw}^u = X_v X_w X_{w_0 u}$. С другой стороны индекс пересечения $X_v X_w X_{w_0 u}$ можно считать, приведя X_v, X_w и $X_{w_0 u}$ в трансверсальное положение действием группы G . Тогда индекс пересечения будет равен числу точек пересечения, которое неотрицательно. \square

Формулу Шевалле можно записать через весовой многогранник. Напомним, что на весах можно ввести отношение частичного порядка таким образом: $\mu > \lambda$, если $\mu - \lambda$ есть сумма простых корней с неотрицательными коэффициентами (то есть μ лежит в конусе с вершиной в λ , натянутом на простые корни).

Формула[Шевалле]. Пусть λ доминантный, тогда

$$D_\lambda X_w = \sum_{\substack{u: l(u)=l(w)-1; \\ u\lambda > w\lambda}} d(w\lambda, u\lambda) X_u,$$

где $d(w\lambda, u\lambda)$ — целочисленное расстояние на решётке корней, между двумя точками решётки оно равно числу отрезков, на которые разбивается отрезок между ними точками решётки. Такое «расстояние» не является метрикой, но зато $SL_k(\mathbb{Z})$ -инвариантно.

Пример 17.6. $w = (123)$, $\lambda = x_1 - x_3$, $w = s_1 s_2$. $D_\lambda X_{(123)} = 2X_{s_2} + X_{s_1}$, так-как расстояние $d(w\lambda, s_2\lambda) = 2$, а расстояние $d(w\lambda, s_1\lambda) = 1$.

18. ТОРИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ

Нас будут интересовать в \mathbb{R}^n выпуклые оболочки целочисленных точек, то есть целочисленные многогранники. Можно считать, что многогранники имеют размерность n , иначе можно сразу рассматривать их в подпространстве меньшей размерности. Пусть P — целочисленный многогранник, и

$$N = \sharp(P \cap \mathbb{Z}^n); P \cap \mathbb{Z}^n = \{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}.$$

Напомним, что по многограннику мы строим торическое многообразие $X_P \subseteq \mathbb{P}^{N-1}$.

$$\varphi_P : (\mathbb{C}^*)^n \rightarrow \mathbb{P}^{N-1}, x \mapsto (x^{\alpha_1}, \dots, x^{\alpha_N}), X_P = \overline{\text{im}(\varphi_P)}.$$

Тор $(\mathbb{C}^*)^n$ действует на \mathbb{P}^{N-1} линейно: $\mathbb{P}^{N-1} = \{(y_0 : \dots : y_N)\}$, $x : (y_1 : \dots : y_N) \rightarrow (x^{\alpha_1} y_1 : \dots : x^{\alpha_N} y_N)$, так что действует и на X , очевидно, с плотной орбитой. Но априори неочевидно, что число $(\mathbb{C}^*)^n$ -орбит в X конечно.

Пример 18.1.

- $P = \triangle$, $\varphi_P : (x : y) \mapsto (1 : x : y)$, $X_P = \mathbb{P}^2$.
- $P = \square$, $\varphi_P : (x, y) \mapsto (1 : x : y : xy)$, $X_P = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^3$. Образ задаётся уравнением $x_0 x_3 - x_1 x_2 = 0$. Это квадрака Сегре.
- $P = \triangle$, $\varphi_P : (x, y) \mapsto (1 : x : y : y^2)$. Образ задаётся уравнением $x_0 x_3 = x_2^2$, точка $(0 : 1 : 0 : 0)$ особая.

Упражнение 18.2. $X_P = (\mathbb{C}^3 - \{0\}) / ((x, y, z) \sim (tx, ty, t^2 z))$ — взвешенная проективная плоскость.

Таким же образом можно получить все взвешенные проективные плоскости.

Если вкладывать тор не в проективное пространство, а в аффинное и там замыкать, то получится аффинное торическое многообразие. Заметим, что бывают и непроективные, но полные (то есть компактные) торические многообразия. Их можно получить через более общий двойственный подход, описывающий все торические многообразия через вееры.

Замечание 18.3. Обычно, в определение торического многообразия включают ещё условие нормальности. Многообразие X_P не всегда нормально (нормальность связана с тем, насколько внутри P много целых точек). Мы, в основном, будем изучать гладкие торические многообразия (тем самым

нормальные). В тех же утверждениях, которые мы докажем для всех X_P нормальность не нужна, поэтому мы её и не требуем.

19. ДВОЙСТВЕННОЕ ОПИСАНИЕ. ВЕЕРЫ.

$P \subset \mathbb{R}^n \rightsquigarrow F_P \subset (\mathbb{R}^n)^* \simeq \mathbb{R}^n$, так как есть стандартная форма.

$P \supset \Gamma \rightsquigarrow C_\Gamma := \{f \in (\mathbb{R}^n)^* : f \text{ достигает максимума по многограннику в точности на } \Gamma\}$. Это открытый конус.

Пример 19.1. $P = \triangle, \Gamma = P \Rightarrow C_P = \{0\}$

$\Gamma = [x, y] \Rightarrow C_P = \{(t, t) | t > 0\}$

$\Gamma = [1, x] \Rightarrow C_P = \{(0, t) | t > 0\}$

$\Gamma = [1, y] \Rightarrow C_P = \{(t, 0) | t > 0\}$

Вершинам соответствуют конуса максимальной размерности.

Иногда по вееру строят такой многогранник. На одномерных конусах веера, то есть лучах, возьмём ближайшие к началу координат целочисленные точки, и рассмотрим их выпуклую оболочку. Таким образом, получаем многогранник P' , который вообще говоря не позволяет восстановить многогранник P . Однако, если P *рефлексивен* (то есть двойственный к P многогранник $P^* := \{f | f(x) \leq 1 \text{ для всех } x \in P\}$ тоже целочисленный), то P' совпадает с P^* . Как мы вскоре увидим, торические многообразия, построенные по рефлексивным многогранникам являются *многообразиями Фано* (определение будет дано ниже), и поэтому активно используются в *Зеркальной Симметрии*.

Веер *полный*, если объединение его конусов — это всё аффинное пространство. На плоскости любой полный веер является нормальным веером для некоторого многоугольника, в трёхмерном пространстве это уже не так (см. контрпример в [6, Section 1.5]).

Факт 19.2. Любому целочисленному вееру соответствует торическое многообразие, и наоборот, причём по нормальному вееру многогранника P получается в точности многообразие X_P . Полным веерам соответствуют полные торические многообразия. Любое проективное торическое многообразие получается из многогранника, так что если полный веер не получается из многогранника, соответствующее торическое многообразие не будет проективно.

Мы будем работать только с проективными торическими многообразиями, поэтому используем более геометрическое описание торического многообразия через многогранник, а более общую конструкцию через веер изучать не будем (об этой конструкции можно прочесть в [6]).

20. ОРБИТЫ ДЕЙСТВИЯ ТОРА НА X_P

Теперь мы опишем $(\mathbb{C}^*)^n$ -орбиты в X_P . Как уже упоминалось, все орбиты находятся во взаимно однозначном соответствии с гранями многогранника P . Сначала с каждой гранью Γ размерности k многогранника P мы свяжем $(\mathbb{C}^*)^n$ -орбиту \mathcal{O}_Γ размерности k в \mathbb{P}^{N-1} , а потом докажем, что $X_P = \bigsqcup_\Gamma \mathcal{O}_\Gamma$. То есть многогранник P можно рассматривать как дискретную модель многообразия P (как мы позже увидим есть и более глубокая связь между геометрией многообразия P и комбинаторикой многогранника P). Определим отображение $\varphi_\Gamma : (\mathbb{C}^*)^n \hookrightarrow \mathbb{P}^{\#\mathbb{Z}^n \cap \Gamma - 1} \hookrightarrow \mathbb{P}^{N-1}$, $x \mapsto (y_0 : \dots : y_N)$ таким образом: если соответствующая целая точка не на грани, то есть $\alpha_i \notin \Gamma$, то $y_i = 0$. Иначе $y_i = x^{\alpha_i}$. Положим $\mathcal{O}_\Gamma = \varphi_\Gamma((\mathbb{C}^*)^n)$.




Пример 20.1. $P = \triangle, \Gamma = \setminus, \varphi_\Gamma : (x, y) \mapsto (0 : x : y)$
 $\varphi_P : (x, y) \mapsto (1 : x : y)$, Образ φ_Γ — бесконечно удалённая прямая в \mathbb{P}^2 .

Упражнение 20.2. $\mathcal{O}_\Gamma \simeq (\mathbb{C}^*)^k$

Мы также опишем, в каких случаях многообразие X_P гладко. Для этого нам понадобится такое определение.

Определение 20.3. Многогранник P *целочисленно простой*, если из каждой вершины выходит n рёбер, и примитивные векторы на рёбрах образуют базис решётки.

Пример 20.4.

-  простой, но не целочисленно простой (выполнена только первая часть условия).
-  целочисленно простой.
-  Октаэдр даже не простой.

Теорема 20.5.

- $X_P = \bigsqcup_{\Gamma \subset P} \mathcal{O}_\Gamma$. Значит, на X_P конечное число орбит. Есть биекция граней и орбит с сохранением размерностей.
- Многообразие X_P гладко, если только если многогранник P целочисленно простой. В этом случае есть алгебраическое клеточное разбиение, нет кручений в когомологиях.

Позже мы опишем когомологии гладкого торического многообразия X_P через многогранник P . В общем случае когомологии неизвестны.

Доказательство. (1) Нужно научиться уходить на бесконечность. Из тора и результата ухода на бесконечность вместе и сложится полное многообразие.

Уходить на бесконечность можно при помощи однопараметрических подгрупп.

$$(\mathbb{Z}^n)^* \ni \underbrace{\alpha}_{(k_1, \dots, k_n)} \rightsquigarrow \psi_\alpha : \mathbb{C}^* \rightarrow (\mathbb{C}^*)^n$$

$$t \mapsto (t^{k_1}, \dots, t^{k_n})$$


Замечание 20.6. Есть каноническое невырожденное спаривание между характеристиками и однопараметрическими подгруппами: $(\psi_\alpha, \chi) = \text{ord}_{t=0} \chi(\psi_\alpha(t))$. То есть однопараметрические подгруппы образуют решётку двойственную к решётке характеров.

Упражнение 20.7. Каждая точка $x \in \mathcal{O}_\Gamma$ представляется как предел однопараметрической подгруппы $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi_\alpha(t)x$, где $\alpha \in \mathbb{C}_\Gamma$, $x \in (\mathbb{C}^*)^n$ любой. Таким образом, $\mathcal{O}_\Gamma \subset X_P$.

Пример 20.8. $P = \triangle \rightsquigarrow \leftarrow \nearrow$, $\Gamma = \setminus \rightsquigarrow (1, 1)$, $\psi_\alpha(t) = (t, t)$. $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi_\alpha(t)(x, y) = \lim_{t \rightarrow \infty} (1 : tx : ty) = \lim_{t \rightarrow \infty} (\frac{1}{t} : x : y) = (0 : x : y)$.

Так получаются все точки на орбите. Заметим, что вдоль общей однопараметрической подгруппы (то есть лежащей в одном из открытых конусов) приходим в нуль-мерную орбиту, соответствующую вершине. Чтобы придти в орбиту большей размерности, нужно уже выбрать более специальную однопараметрическую подгруппу.

Упражнение 20.9. Каждая точка X_P лежит в некоторой орбите \mathcal{O}_Γ .

Пример 20.10.  $\text{pt} = (1 : x : y : xy)$, $x \rightarrow 0 \Rightarrow \text{pt} \rightarrow (y_1 : 0 : y_2 : y_3)$, тогда обязательно либо $y_1 = 0$, либо $y_4 = 0$. В самом деле, если $y_1 \neq 0$, то можно считать $y_1 = 1$, тогда $y \rightarrow y_3$, а $xy \rightarrow 0 \cdot y_3 = 0$.

Подобными рассуждениями можно и в общем случае доказать, что если $y_i = 0$, $y_j \neq 0$, то найдётся грань, содержащая α_j . Все характеры α_k равны нулю, если α_k не лежит на этой грани. Это несложно вывести из следующих двух фактов.

Упражнение 20.11. (1) Если точка $(y_1 : \dots : y_N) \in \mathbb{P}^{N-1}$ лежит в X_P и при этом $y_i = 0$, а $y_j \neq 0$, то $y_k = 0$ для всех k таких, что характер α_k лежит в $(\alpha_i - \alpha_j + P) \cap \mathbb{Z}^n$.

(2) Если точка $(y_1 : \dots : y_N) \in \mathbb{P}^{N-1}$ лежит в X_P и при этом $y_{i_1} = \dots = y_{i_k} \neq 0$, то и $y_i \neq 0$ для всех i таких, что характер α_i лежит в подрешётке, порождённой разностями характеров $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k}$.

(2) Чтобы построить аффинную карту, выберем вершину $v \in P$.

Композицией целочисленного унимодулярного преобразования и параллельного переноса переведем вершину v в начало координат так чтобы примитивные векторы на рёбрах, исходящих из вершины v перешли в стандартный базис. Это соответствует замене координат на торе, то есть автоморфизму многообразия X_P . Теперь весь многогранник P находится в положительном октанте базиса. Переобозначив координаты в \mathbb{P}^{N-1} , мы можем считать, что

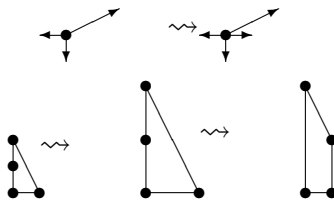
$\varphi_P : x \mapsto (1 : x_1 : \dots : x_n : \text{и ещё много мономов}) \in \mathbb{P}^{N-1}$, причём мономов не Лорана, а обычных с неотрицательными показателями. Несложно проверить, что $X_P \cap \{y_0 \neq 0\} \simeq \mathbb{A}^n$. Обозначим такую карту за U_v .

Упражнение 20.12. Карты U_v , v — вершина многогранника P , образуют покрытие.

Если многообразие негладкое, эти карты всё равно можно строить, но они могут отличаться от \mathbb{A}^n . □

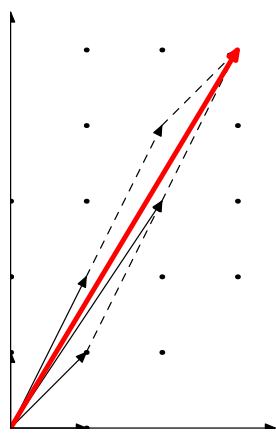
Теорема 20.13. У любого торического многообразия есть торическое разрешение особенностей, и его можно получить последовательными раздутиями замыканий орбит.

Пример 20.14. Можно построить разрешение:



Многообразие при этом раздувается в точке (то есть нульмерной орбите), соответствующей вершине $(1, 0)$.

Как построить разрешение особенностей? Удобнее это делать на уровне веера, используя следующий факт. Если один веер подразбивает другой, то есть морфизм нормализаций соответствующих торических многообразий постоянен на открытой орбите (в частности, он является бирациональным изоморфизмом). В случае поверхностей, нужно исхитриться добавить лучей в двойственный веер, так чтобы примитивные векторы на соседних лучах образовывали базис в решётке \mathbb{Z}^2 . Это удобно делать с помощью цепных дробей.



Из любого вещественного числа мы способны сделать цепную дробь, притом делается это единственным образом, и конечна она в точности для рациональных чисел, периодична в точности для квадратичных иррациональностей. Подходящие цепные дроби получаются обрывом цепи.

Цепные дроби удобно описывать геометрически, как мы увидим на примере. Допустим, прямая проходит через точку $(3, 5)$. Начнём с векторов $v_0 = (0, 1)$ и $v_1 = (1, 0)$, и будем последовательно строить из них новый базис, чтобы оказаться как можно ближе к прямой. На каждом шаге мы из двух базисных векторов (v_{n-1}, v_n) делаем новый базис (v_n, v_{n+1}) в \mathbb{Z}^2 таким образом: $v_{n+1} = v_{n-1} + kv_n$, где целое неотрицательное число k выбирается так, чтобы v_{n+1} оказался как можно ближе к прямой (это соответствует делению с остатком для получения следующей подходящей цепной дроби). В этом примере $k = 1$ на всех шагах.

То есть каждый раз мы берём подходящие цепные дроби и в конце концов доходим до точки $(3, 5)$.

Чтобы получить все лучи, которые нужно добавить в веер для разрешения особенностей, нужно немного модифицировать приведённую выше конструкцию, а именно начать с $v_0 = (-1, 0)$, $v_1 = (0, 1)$ и искать v_{n+1} в виде $-v_{n-1} + kv_n$ (то есть все v_n будут лежать сверху от прямой). Иными словами, матрица перехода от (v_n, v_{n+1}) к (v_{n+1}, v_{n+2}) должна лежать в $SL_2(\mathbb{Z})$. Соответствующая цепная дробь тогда будет со знаками минус, а не со знаками плюс.

21. ГЛАДКИЕ ТОРИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ

Теперь мы опишем группу и Пикара и кольцо когомологий гладких проективных торических многообразий. Пусть P — целочисленный простой многогранник. $\mathbb{R}^n \supset P \rightsquigarrow X_P = \overline{(\mathbb{C}^*)^n}$. Обозначим комплексный тор $(\mathbb{C}^*)^n$ за T . Пусть l — число гиперграней многогранника P . Обозначим гиперграни за $\Gamma_1, \dots, \Gamma_l$. Что мы уже знаем о многообразии X_P :

- X_P можно покрыть T -инвариантными аффинными картами $U_v \subset X_P$.

$$X_P = \bigcup_{v \in P \text{ — вершины}} U_v$$

При этом $U_v \simeq \mathbb{C}^n$ как торические многообразия.

- $X_P - (\mathbb{C}^*)^n = \bigcup_{i=1}^l \overline{\mathcal{O}_i}$, где $\overline{\mathcal{O}_i}$ — гладкие поверхности, пересечения любых их наборов трансверсальны. Локально дивизор $\bigcup_{i=1}^l \overline{\mathcal{O}_i}$ выглядит как объединение координатных гиперплоскостей в \mathbb{C}^n .
- Если \mathcal{O} — T -орбита, то $\overline{\mathcal{O}} = \overline{\mathcal{O}_{i_1}} \cap \dots \cap \overline{\mathcal{O}_{i_k}}$, T -орбиты находятся во взаимно однозначном соответствии с подмножествами $\{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, l\}$, для которых $\Gamma_{i_1} \cap \dots \cap \Gamma_{i_k} \neq \emptyset$.

Пример 21.1. (1) $P = \Delta^n = \{x_1, \dots, x_n \geq 0, x_1 + \dots + x_n \leq 1\}$ — стандартный симплекс в \mathbb{R}^n , то есть $l = n + 1$. Тогда $X_P = \mathbb{C}\mathbb{P}^n$, и в однородных координатах $(y_1 : \dots : y_{n+1})$ гиперповерхность $\overline{\mathcal{O}_i}$ задаётся уравнением $y_i = 0$.

(2) Пусть $F \subset 2\Delta^n$ — грань размерности k в удвоенном симплексе, заданная уравнением $x_1 = \dots = x_{n-k-1} = 0, x_1 + \dots + x_n = 0$. Отрежем грань F от симплекса гиперплоскостью $x_{n-k} + \dots + x_n = 1$, и обозначим оставшийся многогранник за P . Тогда X_P — раздутие \mathbb{P}^n вдоль подпространства \mathbb{P}^k (то есть вдоль замыкания орбиты, соответствующей срезанной грани F). Гиперграней у P на одну больше, чем у симплекса, и добавленная гипергрань соответствует исключительному дивизору.

(3) $P = \Delta^n \times \Delta^m$ — произведение симплексов. Тогда $X_P = \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$.

Конструкция из второго пункта этого примера может быть применена к произвольному многограннику P и его грани Γ и даёт раздутие многообразия X_P вдоль подмногообразия $\overline{\mathcal{O}_\Gamma}$. На уровне веера срезание грани означает добавление нового конуса, то есть в результате получается подразбиение исходного веера.

Упражнение 21.2. Докажите, что любая гладкая торическая поверхность получается последовательными раздутиями либо из \mathbb{P}^2 , либо из $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

Предложение 21.3. На X_P есть алгебраическое клеточное разбиение.

Доказательство. Сначала заметим, что любой грани Γ размерности k и вершине $v \in \Gamma$ на этой грани соответствует T -инвариантная аффинная клетка $U_v(\Gamma)$ размерности k . Она является объединением всех орбит в \mathcal{O}_Γ , замыкания которых содержат нуль-мерную орбиту \mathcal{O}_v , соответствующую вершине v . Осталось выбрать такие клетки согласованно: так чтобы они не пересекались и в объединении давали всё X . Это удобно делать с помощью теории Морса на многограннике P . Выберем линейную функцию f на \mathbb{R}^n , так чтобы она не была постоянна ни на одной грани многогранника P (кроме вершин). Значение f в точке можно считать высотой этой точки. Каждой вершине v многогранника P (то есть каждой критической точке) сопоставим нижнюю сепаратрисную грань $\Gamma(v, f)$, натянутую в точности на рёбра, идущие из v вниз (то есть вдоль этих рёбер функция f убывает). Такая грань всегда существует так-как многогранник простой. Число рёбер, идущих из v вниз назовём индексом вершины v . Несложно проверить, что клетки $U_v(\Gamma(v, f))$, взятые по всем вершинам $v \in P$, образуют клеточное разбиение многообразия X_P . В частности, i -тое число Бетти многообразия X_P равно числу вершин многогранника P с индексом i . \square

Замечание 21.4. Теорию Морса на многограннике P можно связать с классической теорией Морса на X_P при помощи отображения момента $p : X_P \rightarrow P$. Нужно рассмотреть функцию Морса $f \circ p$

на X_P и её нижние сепаратрисные диски. Ниже мы подробно рассмотрим алгебраический вариант теории Морса — разложение Бялыницкого-Бирюли и его связь с теорией Морса на многограннике.

Теория Морса на многограннике позволяет выразить числа Бетти через число граней данной размерности. Пусть h_i — количество клеток размерности i (то есть i -тое число Бетти многообразия X_P), определим h -вектор как многочлен $1 + h_1t + \dots + h_{n-1}t^{n-1} + t^n$ (то есть $h(t)$ — многочлен Пуанкаре многообразия X_P). Определим f -вектор многогранника P так $f(t) = f_0 + f_1t + \dots + f_nt^n$, где f_i — число граней размерности i .

Пример 21.5. Если P — трёхмерный симплекс, то $X_P = \mathbb{C}\mathbb{P}^2$, и $h(t) = 1 + t + t^2 + t^3$, а $f(t) = 4 + 6t + 4t^2 + t^3$.

Упражнение 21.6. Для любого целочисленно простого многогранника $h(t) = f(t - 1)$.

В частности, из двойственности Пуанкаре мы знаем, что $h_i = h^{n-i}$, что даёт содержательные соотношения на коэффициенты f -вектора (соотношения Дена–Соммервиля). Например, соотношение $h_0 = h_n$ эквивалентно формуле Эйлера $f_0 - f_1 + \dots + (-1)^n f_n = 1$. Соотношения Дена–Соммервиля можно доказать и элементарно опять же с помощью теории Морса на многограннике: нужно вместо функции f взять функцию $-f$, тогда вершины, имевшие индекс i , будут иметь индекс $-i$, откуда $h_i = h_{n-i}$.

Открытая задача в комбинаторике выпуклых многогранников — каким условиям должен удовлетворять набор целых положительных чисел f_0, \dots, f_n , чтобы существовал выпуклый многогранник с таким f -вектором? Гипотеза, содержащая необходимый и достаточный набор условий в случае простого многогранника, была сформулирована П.МакМалленом (кроме соотношений Дена–Соммервиля есть ещё неравенства). Доказали её сначала с использованием теории торических многообразий, а затем сам МакМаллен придумал элементарное но довольно сложное доказательство. Впоследствии, В.Тиморин упростил доказательство МакМаллена, использовав для этого кольцо Пухликова–Хованского [12]. Для непростых многогранников задача по-прежнему открыта.

21.1. Классы Черна.

Определение 21.7. Класс Черна $c_i(TX)$ касательного расслоения компактного гладкого многообразия X называется i -тым классом Черна многообразия X и обозначается $c_i(X)$. Первый класс Черна $c_1(X)$ называется также антиканоническим классом.

Оказывается, классы Черна гладкого торического многообразия несложно найти прямо из определения классов Черна.

Теорема 21.8 (Эхлерс). Если X_P гладко, то полный класс Черна $c(X_P)$ такой же как у суммы линейных расслоений, связанных с дивизорами $\overline{\mathcal{O}}_1, \dots, \overline{\mathcal{O}}_l$:

$$c(X_P) = \prod_{i=1}^l (1 + \overline{\mathcal{O}}_i).$$

То есть $c_i(X_P) = \sum_{\text{codim } \mathcal{O}=i} \overline{\mathcal{O}}$. В частности, $c_1(X_P) = \sum_{i=1}^l \overline{\mathcal{O}}_i$.

Доказательство. Пусть v_1, \dots, v_n — общие левоинвариантные векторные поля на X_P . Это означает, что в аффинной карте $\mathbb{C}^n \subset X_P$ они имеют вид

$$(v_1, \dots, v_n) = (x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, x_n \frac{\partial}{\partial x_n})A,$$

где A — общая $n \times n$ матрица с постоянными коэффициентами. Тогда i -тый цикл вырождения $c_i := \{x|v_1(x), \dots, v_{n-i+1}(x) \text{ линейно зависимы}\}$ совпадает с

$$\bigcup_{j_1, \dots, j_i \in \{1, \dots, l\}} \overline{\mathcal{O}}_{j_1} \cap \dots \cap \overline{\mathcal{O}}_{j_i}$$

(достаточно проверить это в каждой аффинной карте, что несложно). □

Определение 21.9. Алгебраическое многообразие называется многообразием Фано если его антиканонический класс является очень обильным дивизором.

Пример 21.10. Торические поверхности \mathbb{P}^2 , $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$, раздутие $\hat{\mathbb{P}}^2$ являются многообразиями Фано. Из формулы для первого класса Черна гладкого торического многообразия X_P следует, что оно Фано если и только если дивизор $\sum_{i=1}^l \bar{\mathcal{O}}_i$ очень обилён. Ниже мы переформулируем этот критерий в терминах многогранника P .

21.2. Группа Пикара. Теперь мы опишем группу Пикара торического многообразия, а также алгоритм для вычисления произведения нескольких дивизоров. Этого оказывается достаточно для описания кольца когомологий, поскольку из построенного выше клеточного разбиения гладкого торического многообразия X_P немедленно получаем:

Следствие 21.11. (1) Как абелева группа, кольцо когомологий $H^*(X_P)$ порождается классами замыканий орбит $\bar{\mathcal{O}} = \bar{\mathcal{O}}_{i_1} \cap \dots \cap \bar{\mathcal{O}}_{i_k}$.

(2) Мультипликативно, кольцо когомологий гладкого торического многообразия порождается компонентой степени два, то есть дивизорами $\bar{\mathcal{O}}_1, \dots, \bar{\mathcal{O}}_l$.

Кроме того из клеточного разбиения прямо следует и такое описание группы Пикара.

Следствие 21.12. Группа Пикара $\text{Pic}(X_P)$ изоморфна свободной абелевой группе ранга $l - n$. Базис в группе Пикара можно выбрать так. Выберем n дивизоров $\bar{\mathcal{O}}_{i_1}, \dots, \bar{\mathcal{O}}_{i_n}$ так чтобы их общее пересечение было непусто. Тогда дивизоры $\{\bar{\mathcal{O}}_i\}_{i \neq i_1, \dots, i_n}$ свободно порождают группу Пикара.

Иными словами, каждая вершина многогранника P даёт базис в группе Пикара, элементы которого соответствуют гиперграням, не содержащим эту вершину. Это очень полезно для вычисления произведения дивизоров $\bar{\mathcal{O}}_{i_1} \cdot \dots \cdot \bar{\mathcal{O}}_{i_k}$, то есть для представления его в виде $\sum_{\text{codim } \mathcal{O} = k} k_i \bar{\mathcal{O}}$. Алгоритм такой:

(1) Если i_1, \dots, i_k попарно различны или $\bar{\mathcal{O}}_{i_1} \cap \dots \cap \bar{\mathcal{O}}_{i_k} = \emptyset$, то

$$\bar{\mathcal{O}}_{i_1} \cdot \dots \cdot \bar{\mathcal{O}}_{i_k} = \bar{\mathcal{O}}_{i_1} \cap \dots \cap \bar{\mathcal{O}}_{i_k}.$$

(2) Если i_1, \dots, i_k не попарно различны (пусть, скажем, $i_1 = i_2$) и $\bar{\mathcal{O}}_{i_1} \cap \dots \cap \bar{\mathcal{O}}_{i_k} \neq \emptyset$, то в группе Пикара можно выбрать базис, не содержащий ни один из дивизоров $\bar{\mathcal{O}}_{i_1}, \dots, \bar{\mathcal{O}}_{i_k}$. Разложим $\bar{\mathcal{O}}_{i_1}$ по этому базису. Получим

$$\bar{\mathcal{O}}_{i_1} \cdot \bar{\mathcal{O}}_{i_2} \cdot \dots \cdot \bar{\mathcal{O}}_{i_k} = \left(\sum_{j \neq i_1, \dots, i_k} k_j \bar{\mathcal{O}}_j \right) \cdot \bar{\mathcal{O}}_{i_2} \cdot \dots \cdot \bar{\mathcal{O}}_{i_k} = \sum_{j \neq i_1, \dots, i_k} \bar{\mathcal{O}}_j \cdot \bar{\mathcal{O}}_{i_2} \cdot \dots \cdot \bar{\mathcal{O}}_{i_k}.$$

К каждому из новых мономов $\bar{\mathcal{O}}_j \cdot \bar{\mathcal{O}}_{i_2} \cdot \dots \cdot \bar{\mathcal{O}}_{i_k}$ опять применяем шаг 1 или шаг 2.

Назовём сложностью монома $\bar{\mathcal{O}}_1^{m_1} \cdot \dots \cdot \bar{\mathcal{O}}_l^{m_l}$ сумму $\sum_{m_i \neq 0} (m_i - 1)$. Например, сложность монома $\bar{\mathcal{O}}_1^k$ равна $k - 1$. Сложность монома $\bar{\mathcal{O}}_{i_1} \cdot \bar{\mathcal{O}}_{i_2} \cdot \dots \cdot \bar{\mathcal{O}}_{i_k}$ измеряет, насколько не попарно различны индексы i_1, \dots, i_k . Если все индексы попарно различны, то сложность равна нулю. Несложно заметить, что применение шага 2 уменьшает сложность монома по крайней мере на один, следовательно за конечное число шагов мы сведём всё к мономам нулевой сложности, к которым уже применим шаг 1.

Исторически, этот алгоритм был первым способом искать индекс самопересечения дивизора на торическом многообразии. На первый взгляд, алгоритм очень длинный и неудобный (ведь каждое применение шага 2 существенно увеличивает число мономов, с которыми нужно работать). Однако с помощью многогранников можно довести этот алгоритм до явной красивой формулы (теоремы Кушниренко). То есть сложность приведённого выше алгоритма прямо связана со сложностью алгоритма для вычисления объёма многогранника (в частности, численные вычисления теорема Кушниренко, как правило, не облегчает). К счастью, для доказательства теоремы Кушниренко достаточно лишь сравнить эти два алгоритма и показать, что они одинаковы, вычислять же с их помощью ничего не нужно. Так мы и будем доказывать. Для этого мы сначала изучим связь между группой Пикара и многогранниками *аналогичными* многограннику P .

Определение 21.13. Два многогранника аналогичны (обозначение: \sim), если у них один и тот же нормальный веер.

Иными словами, один многогранник можно получить из другого параллельным сдвигом гиперграней, так чтобы в процессе комбинаторный тип многогранника не менялся. Например, на плоскости квадрат и прямоугольник аналогичны, если каждая сторона одного параллельна одной из сторон другого. Но два треугольника, полученных друг из друга центральной симметрией, уже не будут аналогичны (хотя их соответствующие стороны параллельны).

Упражнение 21.14. (1) Пусть P и Q целочисленно простые. Тогда если $P \sim Q$, то $X_P \simeq X_Q$.

(2) Приведите контрпример для не целочисленно простых P и Q .

Мы по-прежнему предполагаем, что многогранник P целочисленно простой за исключением тех случаев, где явно оговорено обратное. Обозначим за D_Q дивизор гиперплоского сечения для вложения $\phi_Q : X_P \simeq X_Q \rightarrow \mathbb{P}^{N_Q-1}$.

Упражнение 21.15. Если многогранники P и Q совмещаются параллельным переносом, то $D_P = D_Q$ в группе Пикара.

Таким образом, каждому многограннику, аналогичному P , можно сопоставить дивизор, причём два таких дивизора линейно эквивалентны, если соответствующие многогранники совмещаются параллельным переносом.

Предложение 21.16. Отображение $Q \rightarrow D_Q$ продолжается до изоморфизма между группой целочисленных виртуальных многогранников аналогичных P по модулю параллельного переноса и группой Пикара $\text{Pic}(X_P)$.

Мы сначала поясним формулировку (то есть дадим определение виртуальных многогранников), а потом докажем это предложение. Рассмотрим все многогранники аналогичные P . Легко видеть, что они образуют полугруппу относительно сложения по Минковскому. Напомним, что суммой по Минковскому двух подмножеств $A, B \subset \mathbb{R}^n$ называется множество $A + B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$ (такая сумма зависит от выбора начала координат в \mathbb{R}^n , но все возможные суммы $A + B$ при разных выборах совмещаются параллельным переносом). Полугруппу многогранников аналогичных P можно дополнить до группы, добавив формальные разности (то есть взять группу Гротендика полугруппы). Полученная группа называется группой виртуальных многогранников аналогичных P . На этой группе есть естественная структура вещественного векторного пространства (умножение многогранника на вещественное число определяется с помощью гомотетии и переносится на виртуальные многогранники по линейности).

Многогранник P можно задать неравенствами $h_1(x) \leq h_1(Q), \dots, h_l(x) \leq h_l(Q)$, где $h_i \in C_{\Gamma_i}$ (то есть h_i — линейная функция, постоянная на гипергранни Γ_i), а $h_i(Q)$ — константа. Функция h_i называется i -той опорной функцией, а число $h_i(Q)$ — i -тым опорным числом многогранника P . Тем самым можно представить P как пересечение l полупространств. Тогда виртуальный многогранник Q аналогичный P можно представлять себе как набор из l полупространств $h_1(x) \leq h_1(Q), \dots, h_l(x) \leq h_l(Q)$, где опорные числа $h_1(Q), \dots, h_l(Q)$ могут быть любыми вещественными числами (заметим, что пересечение этих подпространств уже необязательно будет выпуклым n -мерным многогранником). Например, каждая точка $v \in \mathbb{R}^n$ определяет l полупространств $h_1(x) \leq h_1(v), \dots, h_l(x) \leq h_l(v)$, которые пересекаются только в точке v . Таким образом, опорные числа являются координатами на пространстве всех многогранников аналогичных P . Если P не простой, то между опорными числами будут соотношения (если $(n+1)$ гипергрань пересекаются в одной точке, то их уже нельзя двигать независимо).

Замечание 21.17. Опорные числа зависят от выбора опорных функций. Если P — целочисленный, то естественно нормировать h_i так чтобы h_i был минимальным целочисленным ковектором на луче $C_{\Gamma_i} \subset \mathbb{R}^{n*}$.

Определение 21.18. Целочисленное расстояние от точки $v \in \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ до гиперплоскости $H \subset \mathbb{R}^n$ равно индексу подгруппы $\langle v, H \cap \mathbb{Z}^n \rangle$ в \mathbb{Z}^n .

Упражнение 21.19. (1) Целочисленное расстояние инвариантно относительно унимодулярных преобразований \mathbb{R}^n .

(2) Опорное число $h_i(P)$ равно целочисленному расстоянию от начала координат до гиперплоскости, содержащей Γ_i .

Предложение 21.16 немедленно следует из такой леммы.

Лемма 21.20.

$$D_Q = h_1(Q)\overline{\mathcal{O}}_1 + \dots + h_l(Q)\overline{\mathcal{O}}_l$$

Пример 21.21. Пусть $n = 1$, и $Q = [k - d, k]$ — отрезок длины d . Тогда $\varphi_Q : \mathbb{P}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^d$ — вложение Веронезе, и $D_Q = d[\text{pt}] = k\overline{\mathcal{O}}_1 + (d - k)\overline{\mathcal{O}}_2$.

Доказательство. По определению D_Q — дивизор нулей линейной функции на $\mathbb{C}\mathbb{P}^{N_Q-1}$, ограниченной на $X_Q \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^{N_Q-1}$. Возьмём в качестве такой линейной функции первую однородную координату y_1 . Тогда дивизор нулей лежит в $X_Q \setminus (\mathbb{C}^*)^n$ (так как y_1 в ограничении на тор это моном Лорана, и поэтому в ноль не обращается). Таким образом $D_Q = \sum_{i=1}^l k_i \overline{\mathcal{O}}_i$. Осталось посчитать кратности k_i . Это можно делать в аффинных картах, то есть достаточно проверить следующее.

Упражнение 21.22. (1) Моном $x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$ обращается в ноль на координатной гиперплоскости $x_i = 0$ с кратностью k_i .

(2) Целочисленное расстояние от точки $(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$ до координатной гиперплоскости $x_i = 0$ равно k_i . \square

Упражнение 21.23. Все соотношения между дивизорами орбит $\overline{\mathcal{O}}_1, \dots, \overline{\mathcal{O}}_l$ имеют вид

$$h_1(v)\overline{\mathcal{O}}_1 + \dots + h_l(v)\overline{\mathcal{O}}_l,$$

где $v \in \mathbb{Z}^n$ — произвольный целочисленный вектор.

В качестве приложения Леммы 21.20 опишем гладкие торические многообразия Фано в терминах многогранника P .

Следствие 21.24. Торическое многообразие X_P является многообразием Фано, если и только если P аналогичен рефлексивному многограннику. Иными словами, среди многогранников аналогичных P найдётся многогранник, все опорные числа которого равны единице.

Таким образом торические многообразия Фано соответствуют рефлексивным многогранникам. Рефлексивность довольно ограничительное условие. В частности, рефлексивный многогранник содержит строго внутри себя ровно одну целую точку.

Упражнение 21.25. Классифицируйте все торические поверхности Фано.

Используя формулу Нётера для торических поверхностей (см. задачу 9 из экзамена), можно доказать такую теорему из элементарной геометрии.

Теорема 21.26 (о 12-ти точках). Если многоугольник P рефлексивен, то число целых точек на границе многогранника P и число целых точек на границе двойственного многогранника P^* в сумме составляют 12.

21.3. Теорема Кушниренко. Теперь мы можем довести до явного ответа алгоритм из раздела 21.2. Сначала рассмотрим пример.

Пример 21.27. Пусть P — трапеция с вершинами $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(1, 1)$ и $(1, 0)$. Тогда как мы знаем X_P — раздутие проективной плоскости в одной точке. Обозначим рёбра трапеция за Γ_i , $i = 1, 2, 3, 4$, как показано на рисунке. Ребро Γ_3 соответствует исключительному дивизору $\overline{\mathcal{O}}_3$. Теперь мы снова посчитаем индекс самопересечения исключительного дивизора, но уже не руками, а с помощью торической науки. Сначала найдём все соотношения между дивизорами $\overline{\mathcal{O}}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$. Опорные функции: $h_1 = -x$, $h_2 = -y$, $h_3 = x$, $h_4 = x + y$. Соотношения: $v = (1, 0) \rightsquigarrow -\overline{\mathcal{O}}_1 + \overline{\mathcal{O}}_3 + \overline{\mathcal{O}}_4 = 0$, $v = (0, 1) \rightsquigarrow -\overline{\mathcal{O}}_2 + \overline{\mathcal{O}}_4 = 0$. Теперь применяем алгоритм:

$$\overline{\mathcal{O}}_3^2 = (\overline{\mathcal{O}}_1 - \overline{\mathcal{O}}_2)\overline{\mathcal{O}}_3 = -1.$$

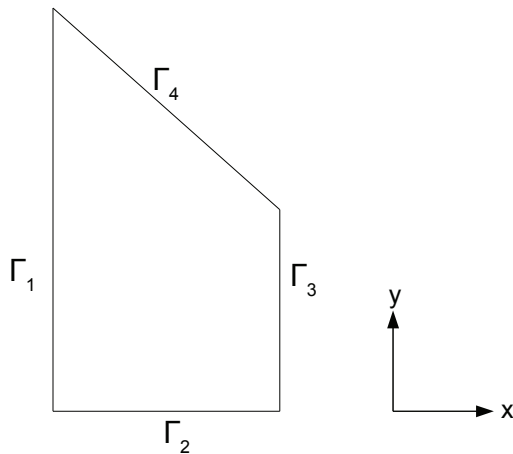


Рис. 3

Теорема 21.28 (Кушниренко).

$$D_P^n = n! \text{vol}(P)$$

Доказательство. Индукция по n . Применим Лемму 21.20:

$$D_P^n = (h_1(P)\overline{\mathcal{O}}_1 + \dots + h_l(P)\overline{\mathcal{O}}_l)D_P^{n-1} = \sum_{i=1}^l h_i(P)\overline{\mathcal{O}}_i D_P^{n-1}.$$

Упражнение 21.29. Рассмотрим торическое многообразие X_{Γ_i} , изоморфное $\overline{\mathcal{O}}_i$, и дивизор D_{Γ_i} на нём. Докажите, что $D_{\Gamma_i} = p^*D_P$, где $p : X_{\Gamma_i} \simeq \overline{\mathcal{O}}_i \subset X_P$ — вложение. Выведите отсюда, что $\overline{\mathcal{O}}_i D_P^{n-1} = D_{\Gamma_i}^{n-1}$.

Таким образом, по предположению индукции $\overline{\mathcal{O}}_i D_P^{n-1} = D_{\Gamma_i}^{n-1} = (n-1)! \text{vol}(\Gamma_i)$.

Упражнение 21.30. Докажите, что $\text{vol}(P) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{l-1} h_i(P) \text{vol}(\Gamma_i)$. □

22. СМЕШАННЫЙ ОБЪЁМ И ТЕОРЕМА БЕРНШТЕЙНА–ХОВАНСКОГО

Естественно обобщить теорему Кушниренко на многочлены Лорана с разными многогранниками Ньютона. Для этого нам понадобится понятие *смешанного объёма*. Мы дадим краткое определение, а более подробно можно прочесть об этом в записках по курсу Владлена Тиморина (см. учебные материалы на страничке нашего курса).

Рассмотрим пространство всех виртуальных выпуклых тел в \mathbb{R}^n относительно суммы по Минковскому. На нём определён *многочлен объёма* Vol , сопоставляющий каждому телу A его объём $\text{vol}(A)$. Многочлен объёма — однородный, степени n . Можно определить его *поляризацию* $MVol$ как единственную симметрическую n -форму степени n , ограничение которой на диагональ совпадает с Vol . *Смешанным объёмом* n выпуклых тел A_1, \dots, A_n называется число $MVol(A_1, \dots, A_n)$. Например, можно искать $MVol(A_1, \dots, A_n)$ как коэффициент при $\lambda_1 \dots \lambda_n$ в многочлене $\text{vol}(\lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_n A_n)$ от $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, поделенный на $n!$.

Упражнение 22.1. Пусть B — единичный шар в \mathbb{R}^n . Докажите, что для всякого выпуклого тела A имеем

$$MVol(\underbrace{A, \dots, A}_{n-1}, B) = \frac{1}{n} (\text{площадь поверхности тела } A).$$

Теорема 22.2 (И.Бернштейн–Хованский). Пусть f_1, \dots, f_n — общие многочлены Лорана на $(\mathbb{C}^*)^n$ с многогранниками Ньютона P_1, \dots, P_n , соответственно. Тогда число их общих нулей в торе равно $n!MVol(P_1, \dots, P_n)$.

Доказательство. Рассмотрим торическое многообразие X_P , где $P = k_1P_1 + \dots + k_nP_n$ для достаточно больших k_1, \dots, k_n . Заметим, что многогранники P_1, \dots, P_n являются виртуальными многогранниками аналогичными P . Обозначим соответствующие им дивизоры на X_P за D_1, \dots, D_n .

Упражнение 22.3. Индекс пересечения $D_1 \cdots D_n$ в X_P равен числу общих нулей соответствующих многочленов Лорана в комплексной торе.

Теперь осталось проверить, что сложение по Минковскому виртуальных многогранников аналогичных P согласовано со сложением соответствующих им дивизоров.

Упражнение 22.4. Пусть Q_1 и Q_2 аналогичны P . Докажите, что $D_{Q_1} + D_{Q_2} = D_{Q_1+Q_2}$. \square

23. КОЛЬЦО ПУХЛИКОВА–ХОВАНСКОГО

Теперь мы опишем кольцо когомологий гладкого торического многообразия. Мы используем обозначения раздела 21.

Рассмотрим пространство V_P всех виртуальных многогранников аналогичных P . Ограничим на это пространство многочлен объёма. Ограничение (обозначим его за Vol_P) будет однородным многочленом степени n от опорных чисел h_1, \dots, h_l .

Упражнение 23.1. Найдите многочлены объёма симплекса и куба в \mathbb{R}^n .

Определение 23.2. Кольцо Пухликова–Хованского R_P многогранника P — это кольцо дифференциальных операторов на V_P с постоянными целыми коэффициентами профакторизованное по оператором, аннулирующим многочлен объёма Vol_P .

Заметим, что это определение можно дать и для непростого многогранника. Правда, в этом случае опорные числа уже не будут координатами на пространстве V_P (между ними появятся соотношения).

Замечание 23.3. • В кольце R_P нет элементов степени выше n .

• В кольце R_P есть двойственность Пуанкаре, так-как есть невырожденное спаривание $(D_1^i, D_2^{n-i}) := D_1^i D_2^{n-i} (n!Vol_P) \in \mathbb{Z}$.

Теорема 23.4 (Пухликов-Хованский). Если P — целочисленно простой, то кольцо когомологий $H^*(X_P)$ изоморфно кольцу Пухликова-Хованского.

Доказательство. Доказательство основано на теореме Кушниренко и на том факте, что кольцо когомологий $H^*(X_P)$ порождается компонентой степени два. Далее нужно применить следующее очень общее утверждение.

Предложение 23.5. Пусть A — градуированная алгебра над \mathbb{Z} с компонентой старшей степени $A^n \simeq \mathbb{Z}$, такая что спаривание $A^i \times A^{n-i} \rightarrow A^n \simeq \mathbb{Z}$, $(a, b) \rightarrow ab$ невырождено. Если A порождается компонентой A^1 , то есть изоморфизм

$$A \simeq \text{Diff}[A_1]/\text{Ann}(f),$$

где многочлен f на A_1 определяется формулой $f(a) := a^n \in A^n \simeq \mathbb{Z}$.

Доказательство предложения несложно и содержится (см. например [10]).

Другой способ доказательства такой.

Упражнение 23.6. Выведите из результатов раздела 21, что

$$H^*(X_P) = \mathbb{Z}[\bar{O}_1, \dots, \bar{O}_l]/(I_1, I_2),$$

где I_1 — линейные соотношения вида $h_1(v)\bar{O}_1 + \dots + h_l(v)\bar{O}_l$, где $v \in \mathbb{Z}^n$ — произвольный целочисленный вектор, а I_2 — соотношения вида $\bar{O}_{i_1} \cdots \bar{O}_{i_k} = 0$, если $\Gamma_{i_1} \cap \dots \cap \Gamma_{i_k} = \emptyset$.

Упражнение 23.7. Проверьте, что гомоморфизм $H^*(X_P) \rightarrow R_P$, переводящий \bar{O}_i в ∂_{h_i} корректно определён (то есть все соотношения I_1 и I_2 выполняются в R_P).

Используя двойственность Пуанкаре в кольцах $H^*(X_P)$ и R_P , несложно проверить, что отображение $H^*(X_P) \rightarrow R_P$ является изоморфизмом. \square

Заметим, что с помощью Предложения 23.5 можно найти и когомологии многообразия полных флагов \mathbb{F}_n .

Теорема 23.8 (Костант).

$$H^*(\mathbb{F}_n) \simeq \text{Diff}[\partial_{\lambda_1}, \dots, \partial_{\lambda_n}] / \text{Ann}\left(\prod_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j)\right).$$

Доказательство. Нужно найти многочлен $f(\lambda) = D_\lambda^d$, где $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ — вес, а D_λ — дивизор, соответствующий весу. Например, в представлении Бореля $D_\lambda = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$.

Упражнение 23.9. Если $\lambda_i = \lambda_j$, то $D_\lambda^d = 0$.

Таким образом, f делится на $\lambda_i - \lambda_j$, следовательно $f = C \prod_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j)$, где константу C можно найти, решив задачу 5 из экзамена (но для доказательства теоремы она не нужна). \square

Упражнение 23.10. Докажите, что такое представление эквивалентно представлению Бореля.

24. КОЛЬЦО УСЛОВИЙ

Следующая теорема даёт способ определить теорию пересечений на некомпактной группе, или более общо, на однородном пространстве.

Теорема 24.1 (Теорема Клеймана о трансверсальности). [7] Пусть G связная алгебраическая группа, и пусть X — её однородное пространство. Возьмём два неприводимых алгебраических подмногообразия $M, N \subset X$. Обозначим за gM левый сдвиг подмногообразия M элементом $g \in G$. Существует открытое всюду плотное подмножество группы G такое что для всех элементов g этого подмножества каждая неприводимая компонента пересечения $gM \cap N$ имеет размерность $\dim M + \dim N - \dim G$. Если M и N — гладкие, то $gM \cap N$ трансверсально.

В частности, если M и N имеют дополнительные размерности (но не обязательно гладкие), то $gM \cap N$ состоит из конечного числа точек, и это число постоянно.

Если M и N имеют дополнительные размерности, определим индекс пересечения (M, N) как число точек пересечения $\#(gM \cap N)$ для общего $g \in G$. Если мы хотим решать задачи исчислительной геометрии, то естественно рассматривать алгебраические подмногообразия на X с точностью до такого отношения эквивалентности. Два неприводимых подмногообразия M_1, M_2 одинаковой размерности эквивалентны, если для любого неприводимого подмногообразия N дополнительной размерности индексы пересечения (M_1, N) и (M_2, N) совпадают. Это отношение эквивалентности похоже на численную эквивалентность в алгебраической геометрии. Рассмотрим все формальные линейные комбинации алгебраических подмногообразий в X по модулю этого отношения эквивалентности. Получившаяся группа $C^*(X)$ называется группой условий однородного пространства X . Эта группа естественным образом градуирована:

$$C^*(X) = \bigoplus_{i=0}^{\dim(X)} C^i(X),$$

где $C^i(X)$ определяем как группу, порождённую подмногообразиями коразмерности i над \mathbb{Z} с точностью до эквивалентности.

Можно определить произведение двух подмногообразий $M, N \subset X$, положив $M \cdot N = gM \cap N$, где $g \in G$ — общий. Однако такое произведение не всегда корректно определено на группе условий. Имеется следующий простой контрпример [9]. Предположим, что $G = \mathbb{C}^n$ — аффинное пространство, на котором действует группа параллельных переносов. Тогда два аффинных подпространства

одинаковой размерности представляют один и тот же класс в \mathbb{C}^n , только если они параллельны. Действительно, если они не параллельны, то существует подпространство дополнительной размерности $V \subset \mathbb{C}^n$ параллельное одному подпространству и пересекающее другое. Тогда общий параллельный сдвиг подпространства V не пересечёт первое подпространство, но пересечёт второе в одной точке. Теперь в аффинном пространстве \mathbb{C}^3 с координатами (x, y, z) рассмотрим квадрику N , заданную уравнением $x = yz$. Возьмём две различных плоскости параллельные координатной плоскости $M = \{y = 0\} \subset \mathbb{C}^3$. Их пересечения с N дают две прямых, которые не параллельны друг другу. Таким образом, они не принадлежат одному и тому же классу эквивалентности в группе условий, и класс $M \cdot N$ не определён.

Замечательный факт состоит в том, что для *сферических* однородных пространств такое произведение корректно определено, то есть если взять разных представителей в одних и тех же классах, то класс их произведения будет одним и тем же [8, 9]. Соответствующее кольцо $C^*(X)$ называется *кольцо условий*.

25. СФЕРИЧЕСКИЕ ОДНОРОДНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ИХ КОМПАКТИФИКАЦИИ

Определение 25.1. Однородное пространство G/H сферическое, если и только если G редуктивна, и борелевская подгруппа $B \subset G$ действует на G/H с открытой орбитой.

Из этого на первый взгляд негеометричного определения можно вывести, что все G -эквивариантные компактификации однородного пространства G/H имеют лишь конечное число G -орбит.

Определение 25.2. Алгебраическое многообразие X называется G -эквивариантной компактификацией однородного пространства G/H , если X содержит G/H в качестве открытого всюду плотного множества и действие G на G/H продолжается на X .

Теорема 25.3 (Luna–Vust). *Однородное пространство G/H сферическое, если и только если любая G -эквивариантная компактификация имеет конечное число G -орбит.*

Пример 25.4.

- Многообразия полных флагов G/B и многообразия частичных флагов G/P , где $P \subset B$ (все они уже сами компактны).
- Комплексный тор $G = (\mathbb{C}^*)^n$, $H = \{e\}$. В этом случае G -эквивариантные компактификации — это торические многообразия.
- Редуктивная группа G , рассматриваемая как однородное пространство относительно действия $G \times G$ умножениями слева и справа: $(g_1, g_2) : g \mapsto g_1 g g_2^{-1}$, то есть $G \simeq G \times G / G_{diag}$. Самый простой пример такой некоммутативной группы $G = \mathrm{PSL}(2)$ (ниже мы найдём все $G \times G$ -эквивариантные компактификации в этом простом случае).
- Пространство коник $\mathrm{PGL}(3)/\mathrm{PSO}(3)$. Ниже мы построим *чудесную компактификацию* пространства коник, иначе называемую *пространством полных коник*.

Последние два примера — частный случай *симметрических однородных пространств*, компактификации которых построены и изучены в [8, 9].

Рассмотрим поподробнее пример: $G = \mathrm{PSL}(2)$. Тогда G можно вложить в проективизацию пространства 2×2 матриц. Иными словами, если V — пространство тавтологического расслоения, то $G \hookrightarrow \mathbb{P}(V \otimes V^*)$, причём на $\mathbb{P}(V \otimes V^*)$ группа G действует слева и справа умножением матриц. Тем самым замыкание образа $\overline{G} = \mathbb{P}^3$ является $G \times G$ -эквивариантной компактификацией группы G . Имеем две $G \times G$ -орбиты: $\mathbb{P}(\text{матрицы } \mathrm{rk} = 2) = G$ и $\mathbb{P}(\text{матрицы } \mathrm{rk} = 1) \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$

Упражнение 25.5. *Доказать, что $G = \mathrm{PSL}(2)$ имеет единственную $G \times G$ -эквивариантную компактификацию (изоморфную \mathbb{P}^3).*

Если однородное пространство не сферическое, то существует компактификация с бесконечным числом орбит. Именно по этой причине на группе условий такого пространства не удаётся ввести структуру кольца.

Контрпримеры:

- $G = \mathbb{C}^n$, $H = \{0\}$, $\mathbb{C}\mathbb{P}^n = \overline{G} = \mathbb{C}^n \sqcup \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$, где второй элемент объединения состоит целиком из неподвижных точек.
- Некоммутативная редуктивная группа G как однородное пространство относительно левых сдвигов. Оно не сферическое. Приведём пример: $G = \mathrm{PSL}(2)$, $\overline{G} = \mathbb{P}^3$. Тогда G -орбиты имеют вид G и $\mathbb{P}^1 \times \{\mathrm{pt}\}$. Орбит второго типа бесконечно много.

Теперь объясним, почему на группе условий сферического однородного пространства есть структура кольца. Пусть Z_1 и Z_2 — две G -эквивариантные компактификации однородного пространства G/H .

Определение 25.6. Компактификация Z_1 доминирует компактификацию Z_2 ($Z_1 \succ Z_2$), если существует G -эквивариантное отображение $Z_1 \rightarrow Z_2$.

Отсюда существует $p^* : H^*(Z_2) \hookrightarrow H^*(Z_1)$ (если Z_1 и Z_2 гладкие). Используя эти вложения, можно определить прямой предел колец когомологий $H^*(Z)$ по всем гладким G -эквивариантным компактификациям Z .

Теорема 25.7 (Де Кончини–Прочези). Пусть X — сферическое однородное пространство. Тогда

$$C^*(X) \simeq \varinjlim_{\substack{Z \text{ — гладк. экв.} \\ \text{комп.}}} H^*(Z).$$

Пример 25.8.

- $X = G/B \Rightarrow C^*(X) = H^*(X)$.
- $X = (\mathbb{C}^*)^n \Rightarrow C^*(X) = \varinjlim_{Z \text{ — торическое}} H^*(Z)$.

В случае тора кольцо условий можно описать явно, поскольку мы умеем описывать кольца когомологий торических многообразий. Удобней переформулировать всё через вееры.

Упражнение 25.9. Если X_P — гладкое торическое многообразие, то $H^*(X_P)$ равно факторкольцу кольца кусочно полиномиальных функций на веере $F_P \subset (\mathbb{R}^n)^*$, непрерывных в классической топологии, по идеалу, порождённому линейными функциями на $(\mathbb{R}^n)^*$.

Упражнение 25.10. Пусть X_P доминирует X_Q , тогда F_P подразбивает F_Q . В этом случае вложение $p^* : H^*(X_Q) \hookrightarrow H^*(X_P)$ совпадает с естественным вложением соответствующих колец кусочно-полиномиальных функций.


Тем самым получаем в качестве следствия из Теоремы 25.7:

Теорема 25.11. Кольцо условий n -мерного тора равно факторкольцу кольца непрерывных функций на \mathbb{R}^n , каждая из которых кусочно полиномиальна относительно какого-нибудь веера, по идеалу, порождённому линейными функциями.

Идея доказательства Теоремы 25.7. Пусть $M \subset X$ — подмногообразие коразмерности i . Можно построить такую G -эквивариантную компактификацию Z , что либо $\mathrm{codim}_{\mathcal{O}}(M \cap \mathcal{O}) = i$, либо $M \cap \mathcal{O}$ пусто для всех орбит \mathcal{O} (это ключевой нетривиальный факт, используемый в доказательстве). Далее, сопоставим $C^i(X) \ni [M] \mapsto [\overline{M}] \in H^i(Z)$.

Упражнение 25.12. Проверить корректность такого определения гомоморфизма $C^*(X) \rightarrow \varinjlim H^*(Z)$.

Пример 25.13. $G/H = (\mathbb{C}^*)^2$, $M = \{x = y\}$.

$\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ не подходит, потому что $\overline{M} \ni (1 : 0 : 0)$, размерность 0, а не -1 , то есть множество не пустое. Чтобы улучшить это до требуемого, раздуем точку $(1 : 0 : 0)$. Имеем четыре неподвижных точки, ни одна из которых не содержится в $\overline{M} \subset \widehat{\mathbb{P}}^2$. В терминах многоугольников  Имеем $0 = M^2 \neq \overline{M}^2 = 1$ в \mathbb{P}^2 , но $0 = M^2 = \overline{M}^2$ в $\widehat{\mathbb{P}}^2$.

Вывод: для каждой исчислительной задачи есть своя “хорошая” компактификация, в которой и нужно эту задачу решать, но это не обязательно самая простая компактификация. Как правило, чем сложнее задача, тем сложнее компактификация.

Определение 25.14. Пусть G/H сферическое, X — G -эквивариантная компактификация. Скажем, что X *регулярна*, если:

- $X - G/H = \bigcup_{i=1}^l \overline{\mathcal{O}_i}$, где \mathcal{O}_i — G -орбиты коразмерности 1 с гладкими замыканиями и трансверсальными пересечениями замыканий.
- Замыкание любой G -орбиты является пересечением замыканий некоторых из $\overline{\mathcal{O}_i}$.
- $\forall x \in \mathcal{O}$ стабилизатор G_x действует на нормальном пространстве $T_x X / T_x \mathcal{O}$ к орбите \mathcal{O} с открытой плотной орбитой.

Пример 25.15. Гладкое торическое многообразие является регулярной компактификацией (третье условие легко проверить в аффинных картах).

Первые два условия в определении регулярной компактификации в точности повторяют соответствующие свойства гладкого торического многообразия и их естественно требовать от “хорошей” компактификации. Геометрический смысл третьего условия увидеть сложнее, но он тоже есть и будет разобран чуть позже. Кроме того, условие сферичности однородного пространства G/H в определении можно отбросить, так-как наличие регулярной компактификации само по себе очень сильное условие на однородное пространство равносильное сферичности. То есть геометрически можно определять сферические однородные пространства как пространства, обладающие регулярной компактификацией.

- Если в регулярной компактификации существует единственная замкнутая орбита, то X — *чудесная компактификация*.

Факт 25.16. Любая регулярная компактификация доминирует чудесную, если последняя существует.

Для тора есть регулярные компактификации, но нет чудесной. И не всегда есть компактификация, которую все доминируют.

Пример 25.17.

- Пусть $G = \mathrm{PSL}(2) \times \mathrm{PSL}(2)$, $H = \mathrm{PSL}(2)_{diag}$. Единственная компактификация — \mathbb{P}^3 . Она чудесна.
- Пусть $G = \mathrm{PSL}(3)$, $H = \mathrm{PSO}(3)$. Мы строили две компактификации:
 - $\mathbb{P}^5 \supset G/H$ не регулярна. G -орбиты:
 - G/H размерности 5,
 - $\mathcal{O}_1 = \{l_1 l_2 = 0 : l_1 \neq l_2\}$ размерности 4,
 - $\mathcal{O}_2 = \{l^2 = 0\}$ размерности 2. Это поверхность Веронезе в \mathbb{P}^5 (то есть образ \mathbb{P}^2 при вложении Веронезе ν_2 , заданном мономами степени два).

Упражнение 25.18. \mathcal{O}_2 — множество особых точек $\overline{\mathcal{O}_1}$.

- Пространство полных коник, равное раздутию \mathbb{P}^5 вдоль поверхности Веронезе.

Факт 25.19. Пусть $Z \subset \mathbb{P}^n$, $\varphi : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$ — рациональное отображение с множеством точек неопределённости Z . Если на раздутии $\widehat{\mathbb{P}}_Z^n$ отображение φ уже всюду определено, то тогда $\widehat{\mathbb{P}}_Z = \overline{\Gamma_\varphi} \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ совпадает с замыканием графика.

Исходно раздутие определяется либо в картах (так как мы можем раздувать $\mathbb{C}^k \subset \mathbb{C}^n$) либо как Proj некоторой алгебры.

Пример 25.20.

- $a \in \mathbb{P}^2$, $\varphi : x \mapsto$ прямая, проходящая через a и x , $\{(x, l) : x \in l\} = \overline{\Gamma(\varphi)} \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^{2*}$.
- $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(V)$ — прямые в V , $\mathbb{P}^{2*} = \mathbb{P}(V^*)$ — плоскости в V . Точки в \mathbb{P}^2 соответствуют прямым в \mathbb{P}^{2*} , а прямые — точкам. Пусть C — коника. Определим двойственную конику $C^* = \{l \in \mathbb{P}^{2*} : l \text{ касается } C\}$.

Упражнение 25.21.

- Если C невырождена, то и C^* невырождена.

- Если C — пара прямых, то C^* — пара точек.
- φ не определена на поверхности Веронезе, состоящей из двойных прямых.

Отсюда имеем чудесную компактификацию многообразия невырожденных коник $\widehat{\mathbb{P}}_V = \overline{\{C, C^*\}} \subset \mathbb{P}^5 \times \mathbb{P}^5$. Там есть следующие орбиты:

- Невырожденные коники. Размерность равна 5.
- $\{(l_1 \cup l_2, l^2) : l \ni l_1, l_2\}$
- Двойственное предыдущему.
- Пара из прямой и точки на ней. Таким образом, орбита изоморфна \mathbb{F}_3 .

Факт 25.22. Замкнутые орбиты в чудесной компактификации однородного пространства G/H изоморфны многообразию полных флагов G/B .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. И. Н. БЕРНШТЕЙН, И. М. ГЕЛЬФАНД, С. И. ГЕЛЬФАНД, *Клетки Шуберта и когомологии пространств G/P* , УМН, **28**:3(171) (1973), 3–26
2. P. BRESSLER, S. EVENS, *Schubert calculus in complex cobordism*, Trans. Amer. Math. Soc. **331** (1992), no. 2, 799–813.
3. Ф. ГРИФФИТС, ДЖ. ХАРРИС, *Принципы алгебраической геометрии*. В 2 томах. М., Мир, 1982
4. M. DEMAZURE, *Désingularisation des variétés de Schubert généralisées*, Collection of articles dedicated to Henri Cartan on the occasion of his 70th birthday, I. Ann. Sci. École Norm. Sup. 4 **7** (1974), 53–88.
5. S.FOMIN, A.N.KIRILLOV, *The Yang-Baxter equation, symmetric functions, and Schubert polynomials*, Discrete Mathematics **153** (1996), no. 1-3, 123–14
6. W. FULTON, *Introduction to toric varieties* Annals of Mathematics Studies, **131**, The William H. Roever Lectures in Geometry, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993
7. S.L. KLEIMAN, *The transversality of a general translate*, Compositio Mathematica, **28** (1974), Fasc.3, 287–297
8. C. DE CONCINI AND C. PROCESI, *Complete symmetric varieties I*, Lect. Notes in Math. **996**, Springer, 1983
9. C. DE CONCINI AND C. PROCESI, *Complete symmetric varieties II Intersection theory*, Advanced Studies in Pure Mathematics **6** (1985), Algebraic groups and related topics, 481–513
10. KUMARS KAVEN, *Note on the Cohomology Ring of Spherical Varieties and Volume Polynomial*, preprint arXiv:math/0312503v2[math.AG]
11. L. MANIVEL, *Symmetric functions, Schubert polynomials and degeneracy loci*, translated from the 1998 French original by John R. Swallow. SMF/AMS Texts and Monographs, 6. Cours Spécialisés, 3. American Mathematical Society, Providence, RI; Société Mathématique de France, Paris, 2001.
12. В.А. ТИМОРИН, *Аналог соотношений Ходжа–Римана для простых выпуклых многогранников*, Успехи Математических Наук, **54** (1999) номер 2, 113–162
13. Р. Хартсхорн, *Алгебраическая геометрия*. М.: Мир, 1981.
14. И. Р. ШАФАРЕВИЧ, *Основы алгебраической геометрии*. М.: МЦНМО, 2007.