Многогранники и алгебраическая геометрия

В.А. Кириченко*

*Факультет Математики и Лаборатория Алгебраической Геометрии,
Национальный Исследовательский Университет Высшая Школа Экономики
и
Институт Проблем Передачи Информации им. Харкевича РАН

28 января 2011 г.

Многогранники

Выпуклый многогранник = *выпуклая оболочка* конечного числа точек в n-мерном пространстве

$n = 2$ многоугольники

$n = 3$ трёхмерные многогранники, в частности, платоновы тела

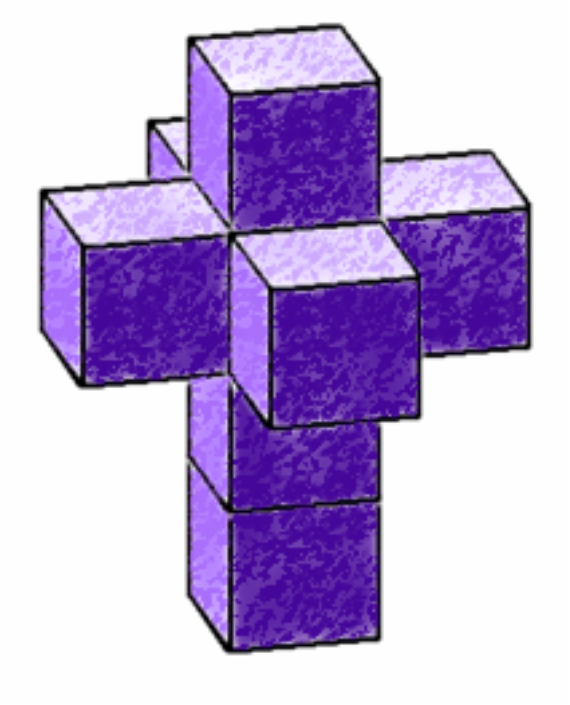
Многогранники

Канадский доллар “loonie”, правильный 11-угольник

Многогранники

Кристалл двойной соли хрома и калия $KCr(SO_4)_2$, правильный октаэдр

Многогранники



Развёртка 4-мерного гиперкуба (*тессеракта*)

Многогранники

$A_1, \ldots, A_r \in \mathbb{R}^n$ — точки. Поместим в A_i массу m_i.

Выпуклая оболочка = множество центров масс для всех таких наборов масс $(m_1, \ldots, m_r)$, что $m_1 + \ldots + m_r = 1$

Многогранники

Где используются многогранники?

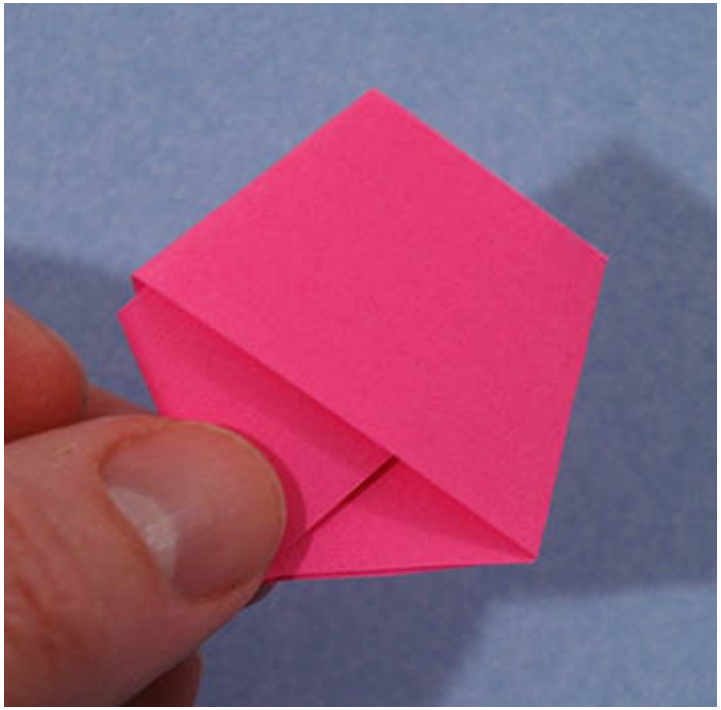
- Линейное программирование
- Кристаллография
- Архитектура
- ...
- Алгебраическая геометрия

Многогранники

Здание Министерства обороны США, правильный пятиугольник

Многогранники

Как сделать правильный пятиугольник из полоски бумаги:



Теорема Безу

Пусть f и g — многочлены от двух переменных. Обозначим степени многочленов через m и n. Система уравнений

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

имеет не более чем mn решений (если решений конечное число).

Примеры

- $m = n = 1$ (система линейных уравнений)

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ 0 или 1 решение

- $m = 2,\ n = 1$ (квадратное уравнение + линейное) $\Longrightarrow$ 0, 1 или 2 решения

Случай общего положения

Определение: Система уравнений — *общая*, если число её решений не меняется при любом достаточно малом измении коэффициентов многочленов.

Пример: Уравнение $x^2 - 1 = 0$ общее, а уравнение $x^2 = 0$ — нет.

Важный факт: Над комплексными числами все общие системы уравнений данной степени имеют одно и то же число решений.

Над вещественными числами это не так. Именно поэтому комплексная алгебраическая геометрия проще чем вещественная.

Теорема Безу над комплексными числами

Теорема Безу: Общая система уравнений

$$\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно mn решений.

Доказательство: Рассмотрим систему, где

$$f(x,y) = x(x-1)\dots(x-m+1), \quad g(x,y) = y(y-1)\dots(y-n+1).$$

Она общая (проверяется с помощью теоремы о неявной функции), и имеет mn решений. Следовательно, любая другая общая система тоже имеет mn решений. $\square$

Случай НЕобщего положения

Пример: Система

$$\begin{cases} axy + bx + cy + d = 0 \\ a'xy + b'x + c'y + d' = 0 \end{cases}$$

имеет не более 2 решений (ровно 2 при общих значениях параметров a, b, c, d, a', b', c', d').

Многогранники Ньютона

По многочлену

$$f(x,y) = \sum_{i,j} a_{ij} x^i y^j$$

строится *многогранник Ньютона* = выпуклая оболочка точек $\{(i,j) | a_{ij} \neq 0\}$.

Пример: $f(x,y) = axy + bx + cy + d \rightsquigarrow$ многогранник Ньютона — единичный квадрат

Замечание: Точно так же многогранник Ньютона строится по любому *многочлену Лорана*.

Многочлены Лорана

Многочлен Лорана — это конечная сумма мономов вида

$$f(x,y) = \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} a_{ij}x^i y^j$$

Пример: $f(x,y) = ax^{-1}y^{-1} + bx + cy + d \rightsquigarrow$ многогранник Ньютона — треугольник

Многочлен Лорана определён при $x, y \neq 0$, то есть определён на *комплексном торе* $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^2$.

Комплексный тор — алгебраическая группа относительно покоординатного умножения.

Теорема Кушниренко

Пусть $f_1, \ldots f_k$ — многочлены Лорана от k переменных с одним и тем же многогранником Ньютона P. Общая система уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_k) = 0 \\ \ldots \\ f_k(x_1, \ldots, x_k) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно $k!\mathrm{Volume}(P)$ решений в $(\mathbb{C} \setminus 0)^k$.

Примеры

- $k = 1$, многогранник Ньютона P — отрезок $[p, q]$, $\mathrm{Volume}(P) = (q - p) \Longrightarrow$ Уравнение

$$\sum_{i=p}^{q} a_i x^i = 0,$$

где $a_p, a_q \neq 0$ имеет $(q - p)$ ненулевых решений (при общих значениях параметров a_i).

Примеры

- $k = 2$, многогранник Ньютона P — единичный квадрат, $\mathrm{Volume}(P) = 1 \Longrightarrow$ Система уравнений

$$\begin{cases} axy + bx + cy + d = 0 \\ a'xy + b'x + c'y + d' = 0 \end{cases}$$

имеет 2 решения (при общих значениях параметров a, b, c, d, a', b', c', d').

Примеры

- $k = 2$, многогранник Ньютона P — треугольник с вершинами $(0,0)$, $(n,0)$ и $(0,n)$, $\mathrm{Volume}(P) = \frac{n^2}{2} \Longrightarrow$ Общая система уравнений степени n

$$\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно n^2 решений (частный случай теоремы Безу).

Алгебраическая геометрия

Как доказывать теорему Кушниренко?

Пусть $X \subset \mathbb{C}^k$ — подмножество, заданное конечным числом полиномиальных неравенств $(f(x) \neq 0)$, и L — подпространство пространства рациональных функций, определённых на X. Обозначим через L^n пространство функций, натянутое на произведения n функций из L.

Пример: $X = (\mathbb{C} \setminus \{0\})^k$ — комплексный тор, L — пространство многочленов Лорана с носителем в фиксированном конечном множестве $A \subset \mathbb{Z}^k \Longrightarrow L^n$ — пространство многочленов Лорана с носителем в множестве $nA := \underbrace{A + A + \ldots + A}_{n}$

Пример

Если $X = (\mathbb{C} \setminus \{0\})^2$ — двумерный комплексный тор, L — пространство многочленов Лорана с носителем в множестве $A = \{(0,0),(0,1),(1,0)\}$, то
L^n — пространство многочленов от x и y степени $\leq n$,
nA — множество целых точек внутри и на границе треугольника с вершинами $(0,0)$, $(n,0)$ и $(0,n)$.

Функция Гильберта

Функция Гильберта: $H_{X,L}(n) := \dim L^n$

Обозначим через $C_{X,L}$ число решений в X общей системы вида $f_1 = \ldots = f_k = 0$, где $f_1, \ldots, f_k \in L$.

Теорема Гильберта: Функция Гильберта, начиная с некоторого n, совпадает с многочленом степени k (он называется *многочлен Гильберта*), и его старший член равен

$$\frac{C_{X,L}}{k!} n^k$$

Пример

Если $X = (\mathbb{C} \setminus \{0\})^2$ — двумерный комплексный тор, L — пространство линейных функций от x и y, то

$$H_{X,L}(n) = \text{ число мономов степени } \leq n \text{ от } x \text{ и } y$$

В этом случае теорема Гильберта говорит, что число мономов степени не выше n от двух переменных асимптотически равно $\frac{n^2}{2}$.

Алгебраическая геометрия

Теорема Гильберта $\Longrightarrow$ теорема Кушниренко

Если $X = (\mathbb{C} \setminus \{0\})^k$ — комплексный тор, L — пространство многочленов Лорана с носителем в фиксированном конечном множестве $A \subset \mathbb{Z}^k$, то

$$H_{X,L}(n) = |nA|,$$

где $|nA|$ = число векторов, представимых в виде суммы n векторов из A.

Остаётся решить следующую задачу из элементарной геометрии:

Многогранники

Задача: Пусть P — выпуклый многогранник с вершинами в целых точках, A — множество всех целых точек внутри и на границе многогранника P. Тогда $|nA|$ асимптотически равно $\mathrm{Volume}(P)n^k$, то есть

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|nA|}{n^k} = \mathrm{Volume}(P).$$

Спасибо!

Вопросы и комментарии можно присылать по адресу
vkiritchenko@yahoo.ca