Многочлены Шуберта: флаги и водопроводные сети

В.А. Кириченко*

*Факультет математики и Лаборатория алгебраической геометрии и её приложений,
Национальный исследовательский университет Высшая Школа Экономики
и
Институт проблем передачи информации им. Харкевича РАН

28 января 2015 г.

Задача Шуберта

Сколько прямых проходит через четыре заданные прямые в 3-хмерном пространстве?

Ответ

2

Исчислительная геометрия

Задача Шуберта

Сколько прямых проходит через четыре заданные прямые в 3-хмерном пространстве?

Ответ

2

Исчислительная геометрия

Цель

Нас интересуют только те конфигурации, для которых ответ — максимальный конечный. Его и нужно найти.

Мотивировка

В задачах *комплексной* исчислительной геометрии *почти все* конфигурации дают максимальный конечный ответ.

Исчислительная геометрия

Цель

Нас интересуют только те конфигурации, для которых ответ — максимальный конечный. Его и нужно найти.

Мотивировка

В задачах *комплексной* исчислительной геометрии *почти все* конфигурации дают максимальный конечный ответ.

Исчислительная геометрия

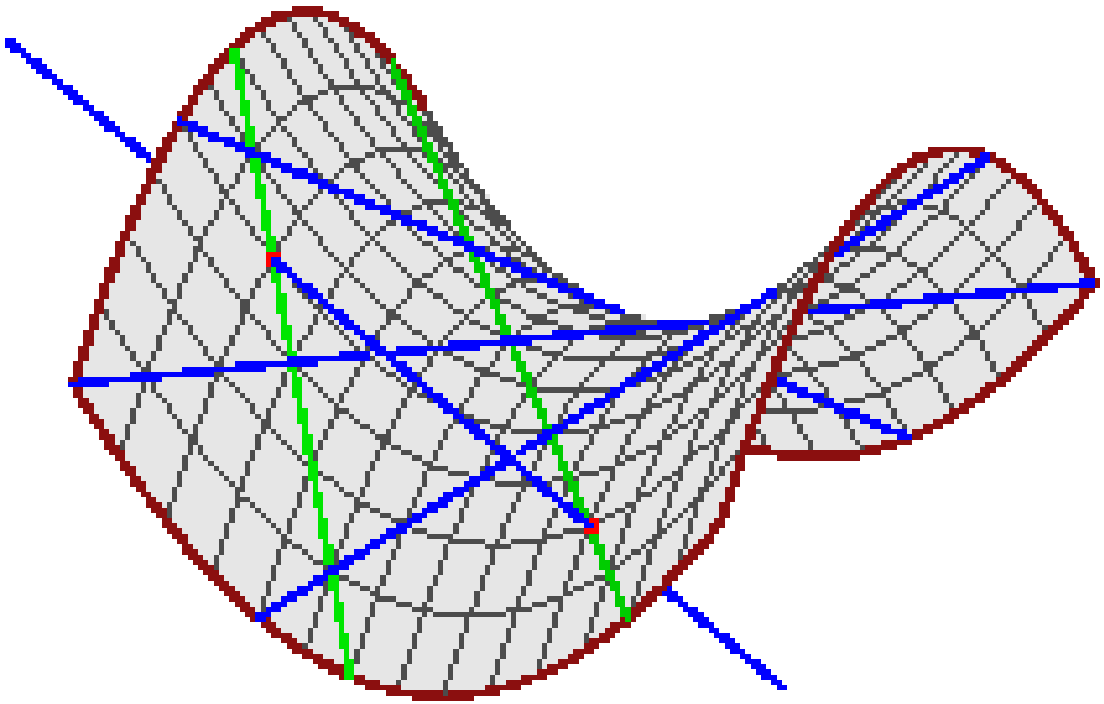


Рисунок Frank Sottile

http://www.math.tamu.edu/ sottile/research/stories/connections.html

Исчислительная геометрия

Фотографии Wikipedia https://en.wikipedia.org/wiki/Shukhov_Tower

Исчислительная геометрия

Герман Шуберт (1848-1911),
немецкий математик

Исчислительная геометрия в современной математике

- Алгебраическая геометрия
- Теория пересечений
- Алгебраическая комбинаторика
- Теория струн
- Исчисление Шуберта

Исчислительная геометрия в современной математике

- Алгебраическая геометрия
- Теория пересечений
- Алгебраическая комбинаторика
- Теория струн
- Исчисление Шуберта

Исчислительная геометрия в современной математике

- Алгебраическая геометрия
- Теория пересечений
- Алгебраическая комбинаторика
- Теория струн
- Исчисление Шуберта

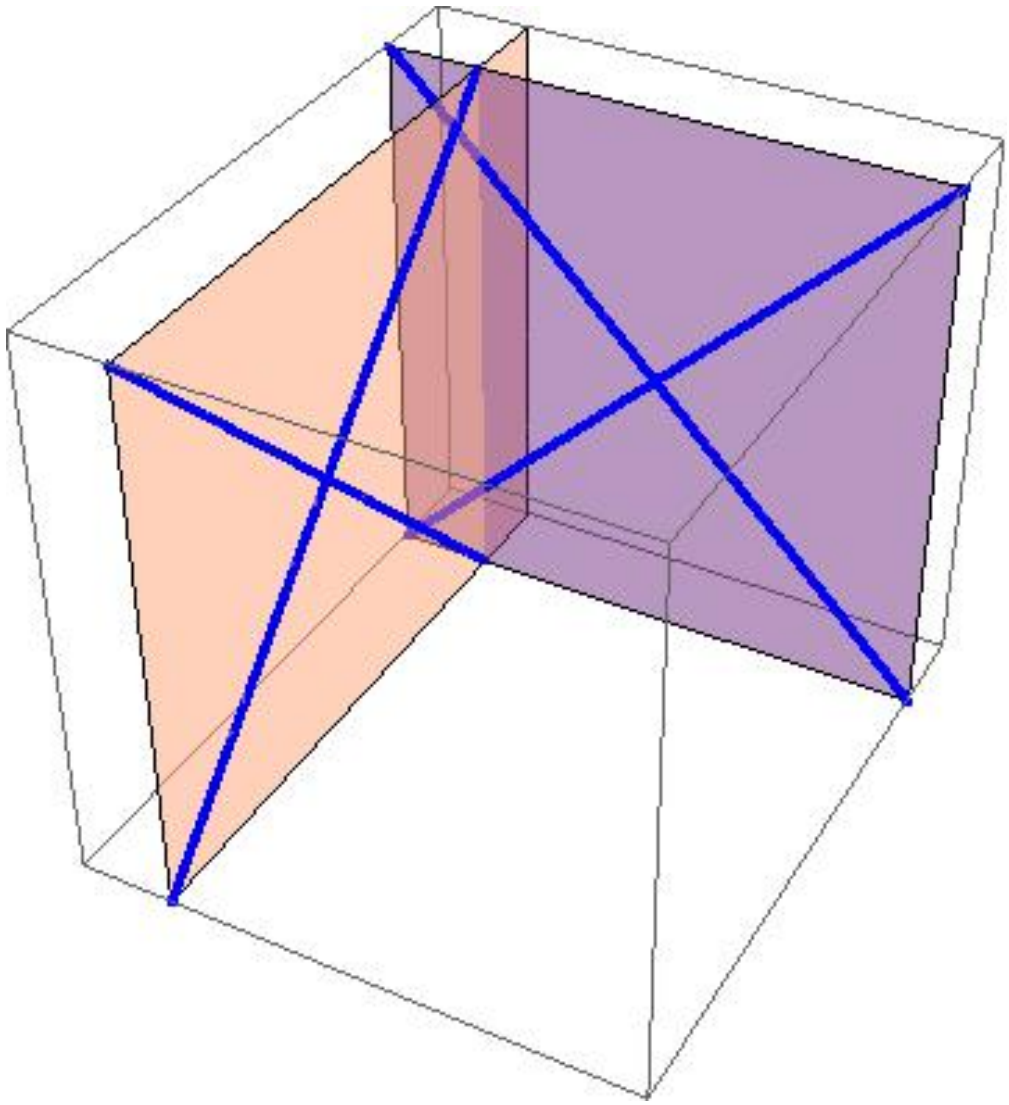
Исчислительная геометрия в современной математике

- Алгебраическая геометрия
- Теория пересечений
- Алгебраическая комбинаторика
- Теория струн
- Исчисление Шуберта

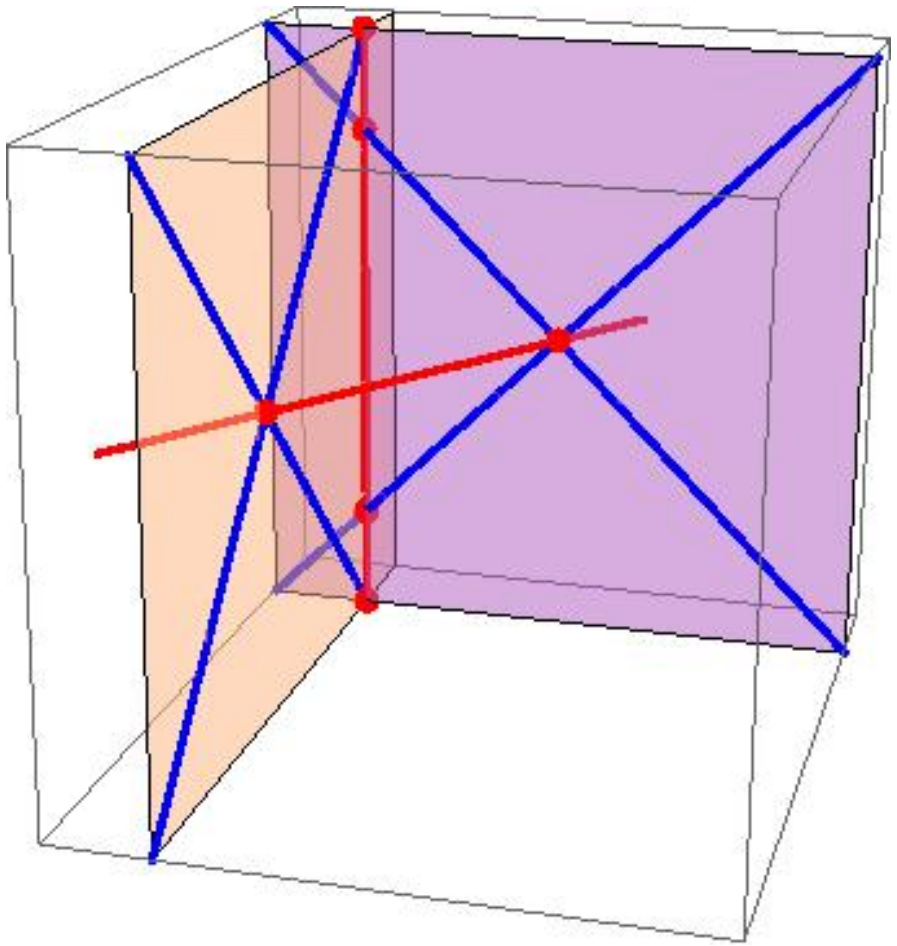
Исчислительная геометрия в современной математике

- Алгебраическая геометрия
- Теория пересечений
- Алгебраическая комбинаторика
- Теория струн
- Исчисление Шуберта

Исчислительная геометрия



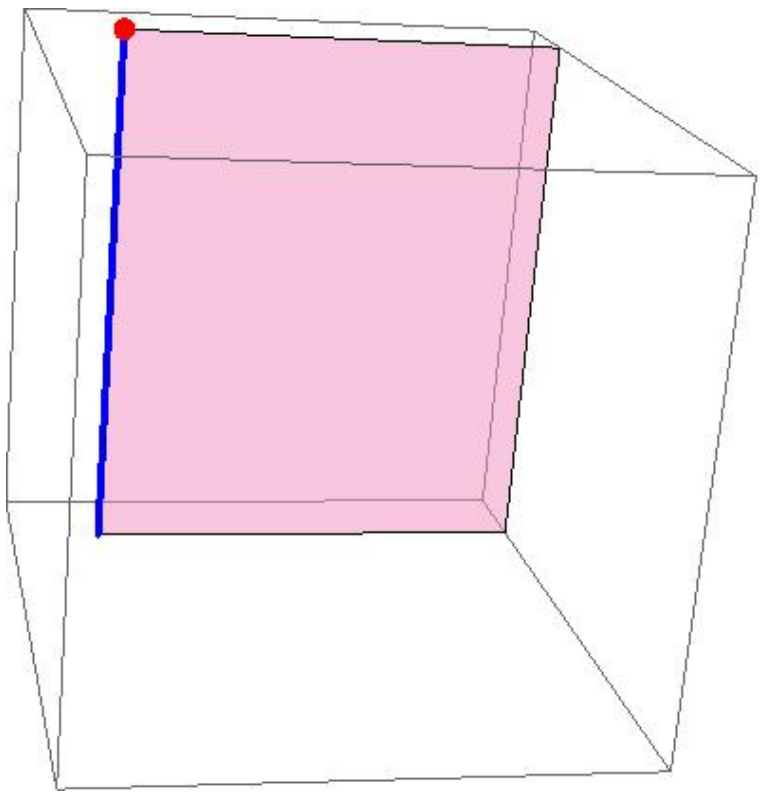
Исчислительная геометрия



Исчислительная геометрия

Обобщение

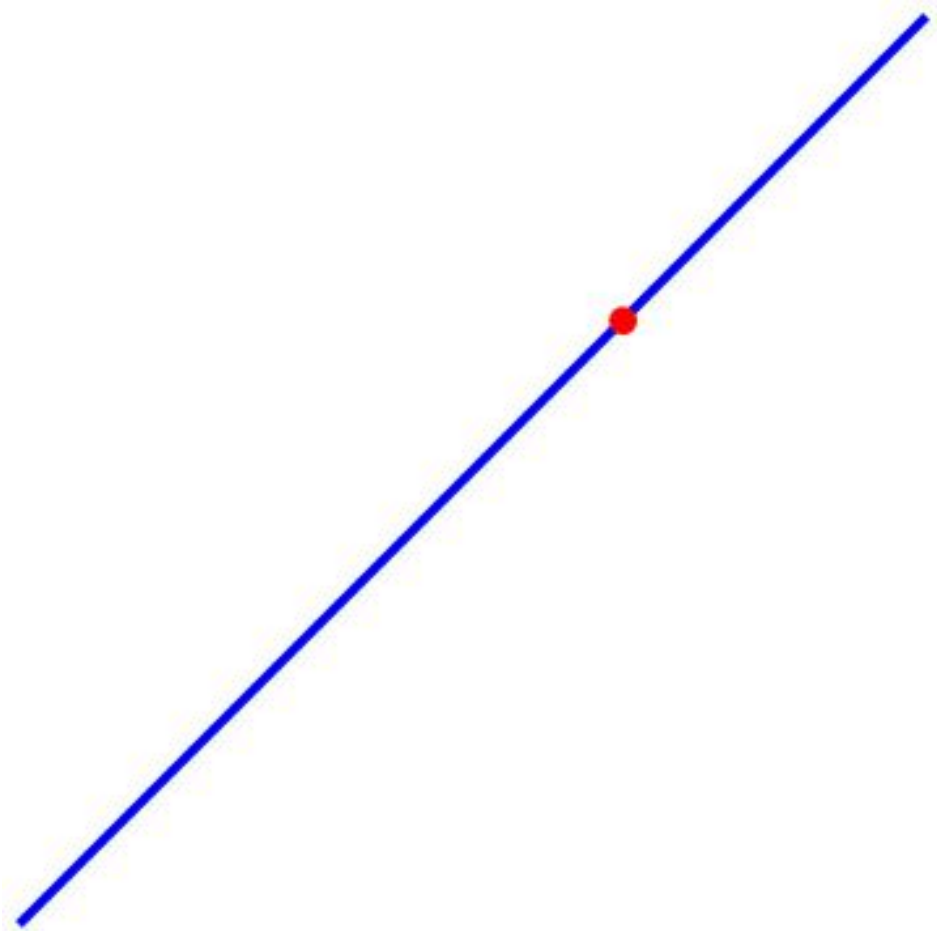
Вместо прямых (или подпространств) можно рассматривать *флаги*: точка $\in$ прямая $\subset$ плоскость $\subset \ldots$



Исчислительная геометрия

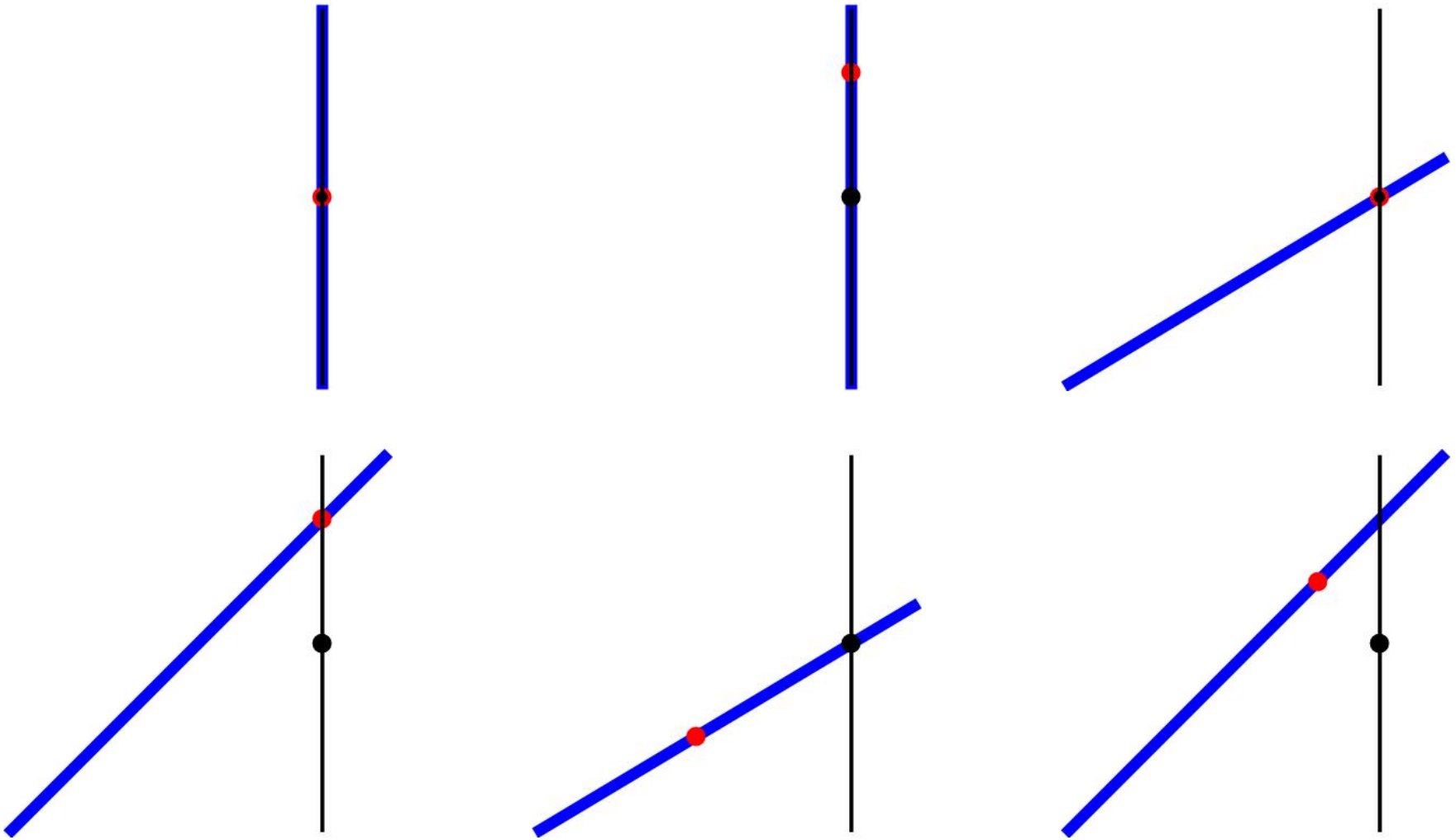
Пример

Флаги на плоскости: точка $\in$ прямая.



Исчислительная геометрия

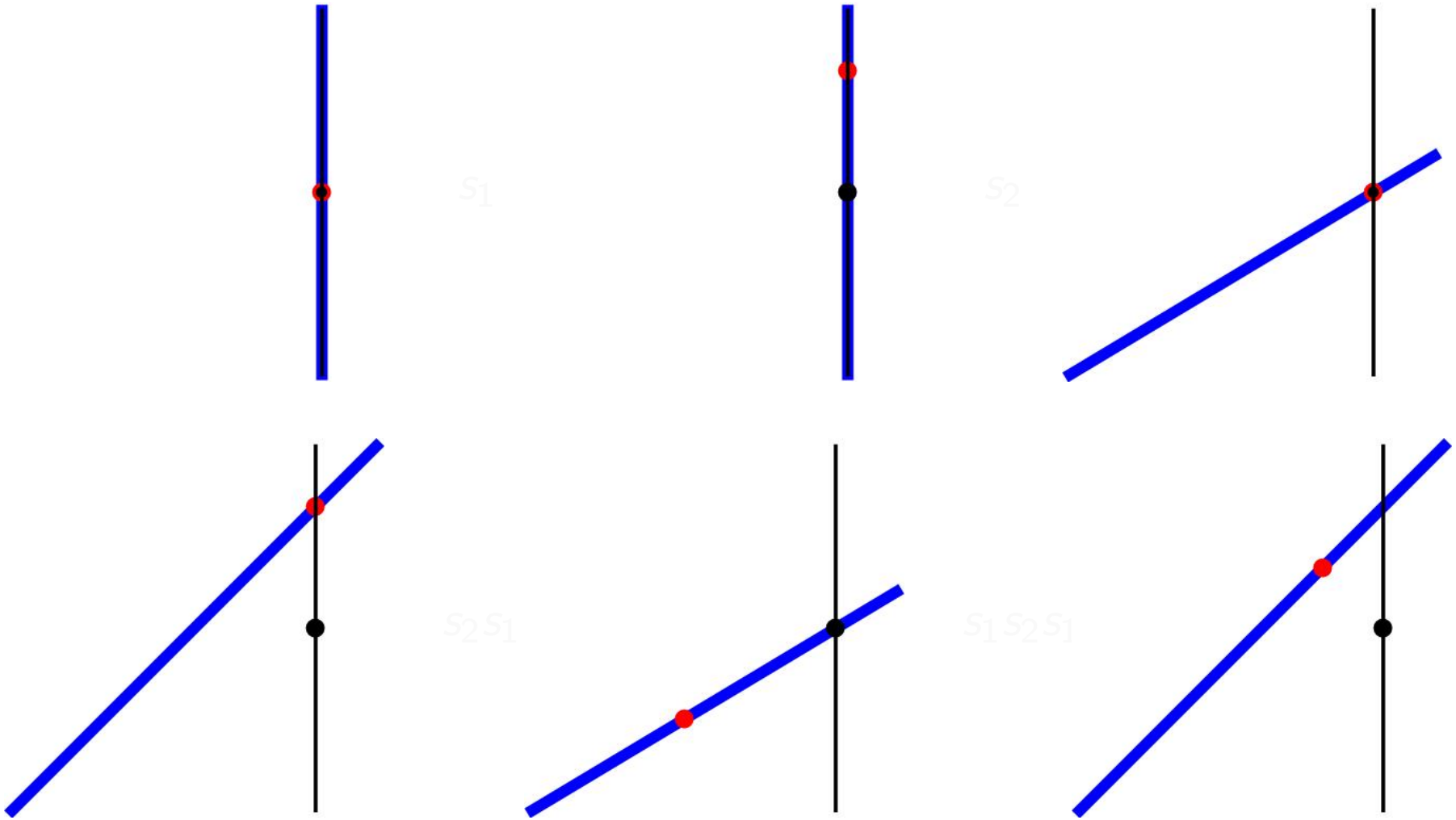
Условия на флаги



Флаги и симметрическая группа

Взаимные расположения двух флагов $\leftrightarrow$ перестановки в S_3

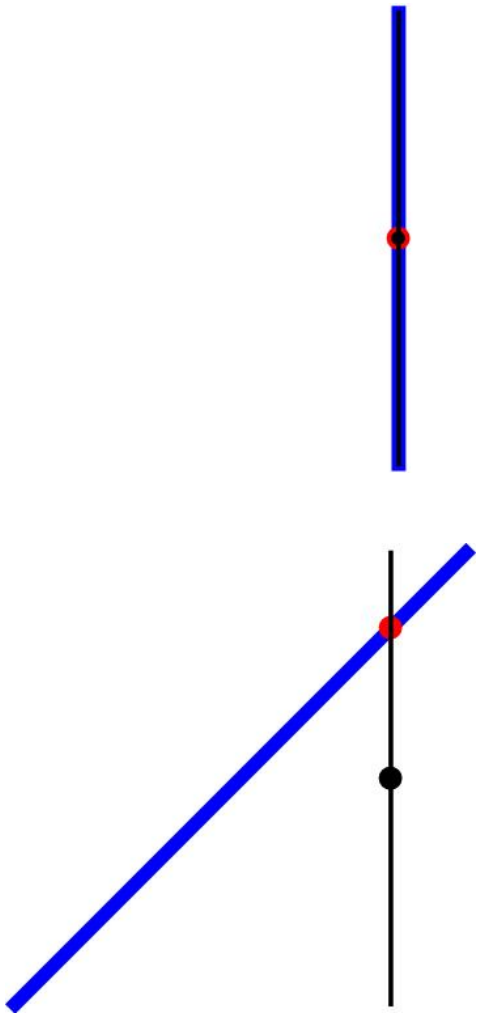
$s_1 := (1\ 2)$, $s_2 := (2\ 3)$



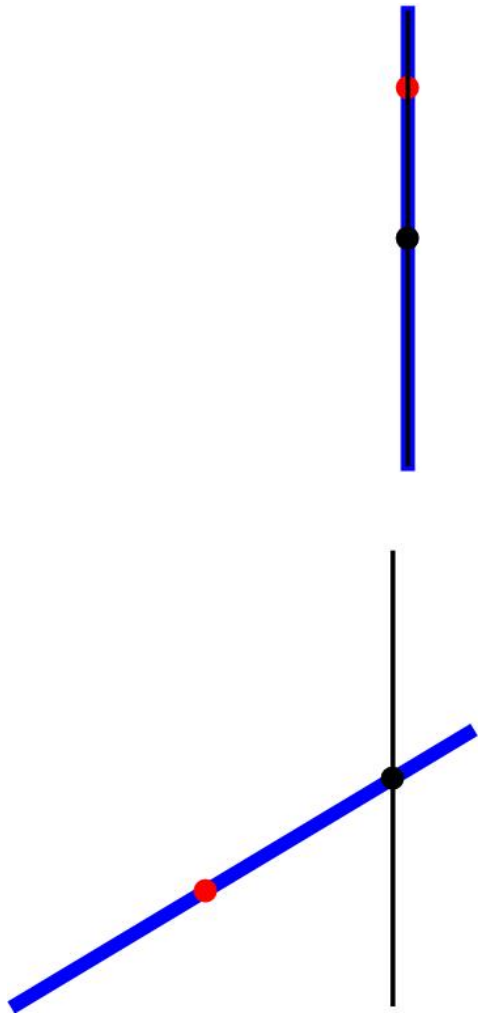
Флаги и симметрическая группа

Взаимные расположения двух флагов $\leftrightarrow$ перестановки в S_3

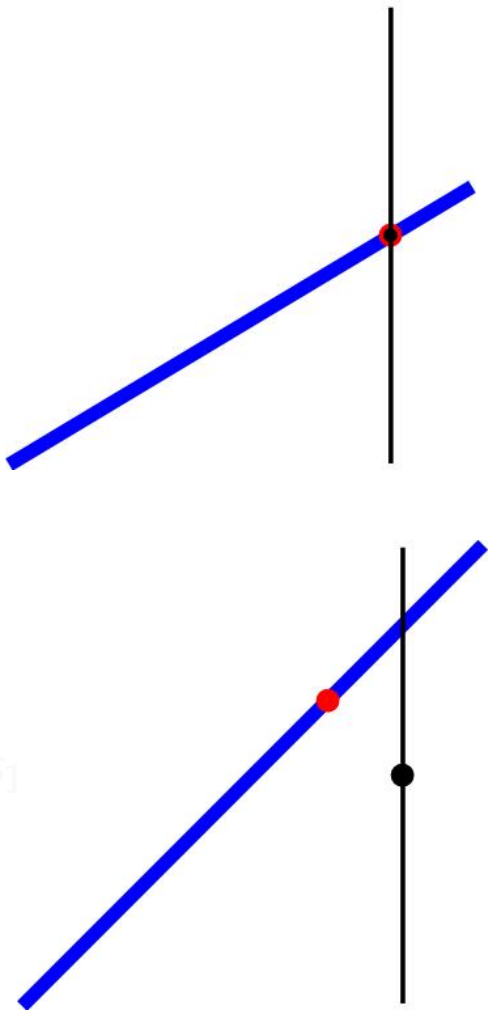
$s_1 := (1\ 2)$, $s_2 := (2\ 3)$



id



s_1



s_2

$s_1 s_2$

$s_2 s_1$

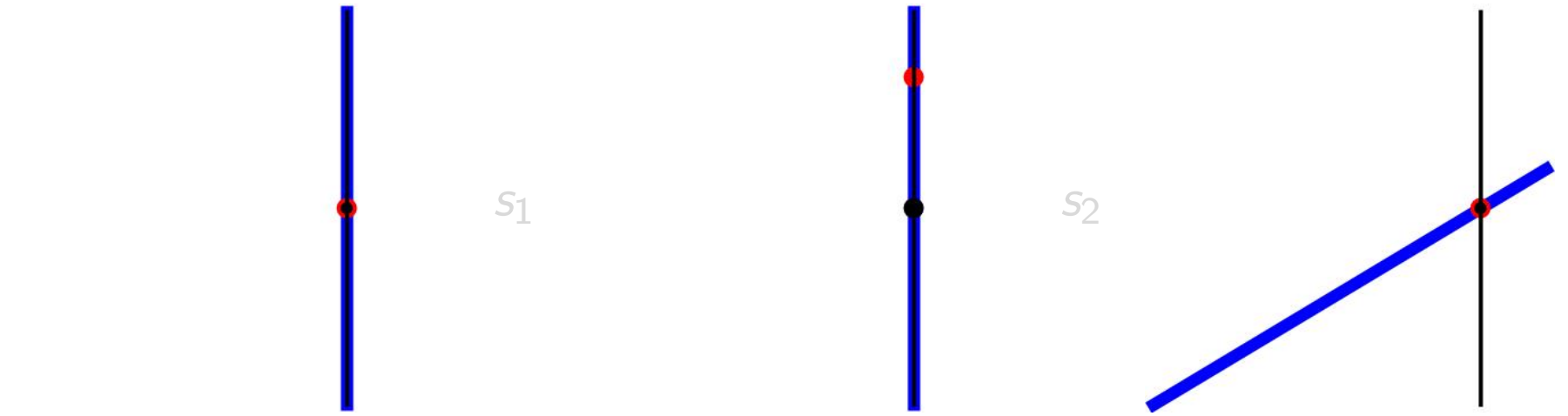
$s_1 s_2 s_1$

Флаги и симметрическая группа

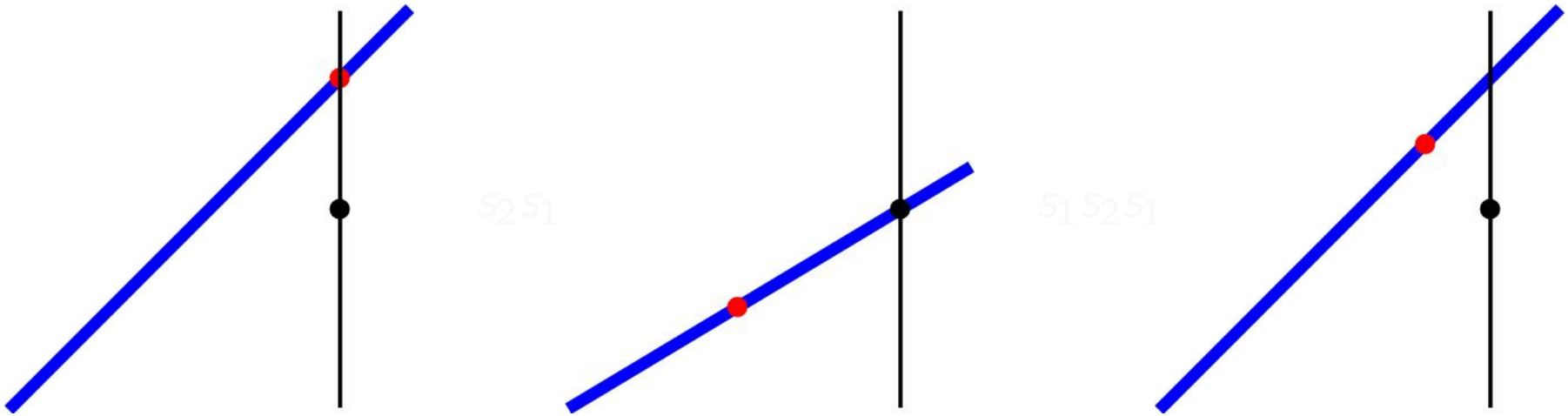
Взаимные расположения двух флагов $\leftrightarrow$ перестановки в S_3

$s_1 := (1\ 2)$, $s_2 := (2\ 3)$

id s_1 s_2



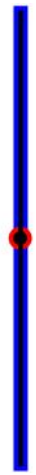
$s_1 s_2$ $s_2 s_1$ $s_1 s_2 s_1$



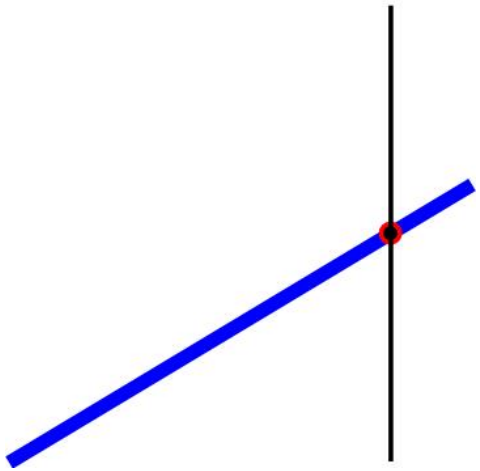
Флаги и симметрическая группа

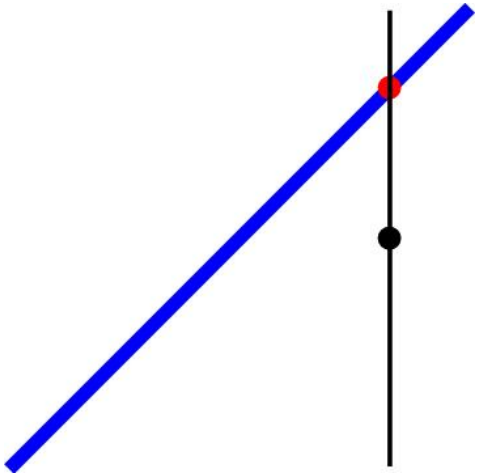
Взаимные расположения двух флагов $\leftrightarrow$ перестановки в S_3

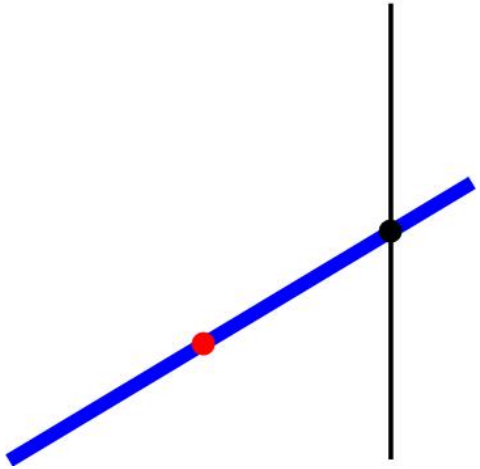
$s_1 := (1\ 2)$, $s_2 := (2\ 3)$

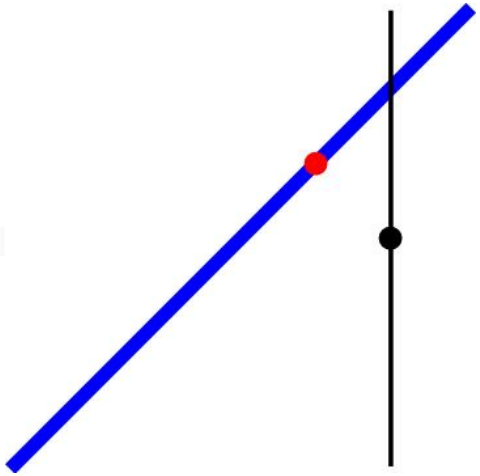
id 

s_1

s_2 

$s_1 s_2$ 

$s_2 s_1$ 

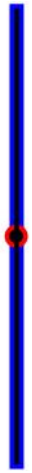
$s_1 s_2 s_1$ 

Флаги и симметрическая группа

Взаимные расположения двух флагов $\leftrightarrow$ перестановки в S_3

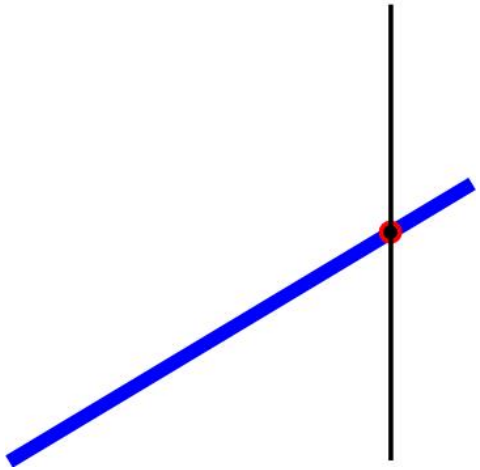
$s_1 := (1\ 2)$, $s_2 := (2\ 3)$

id

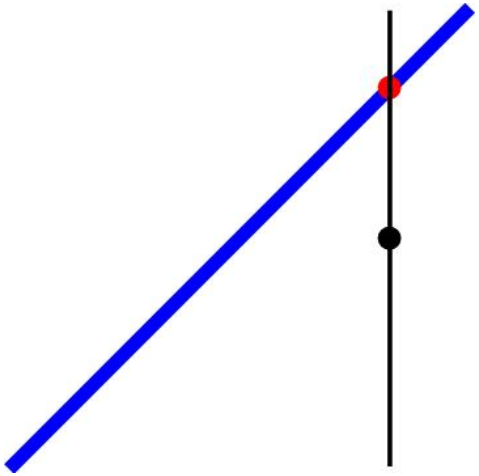


s_1

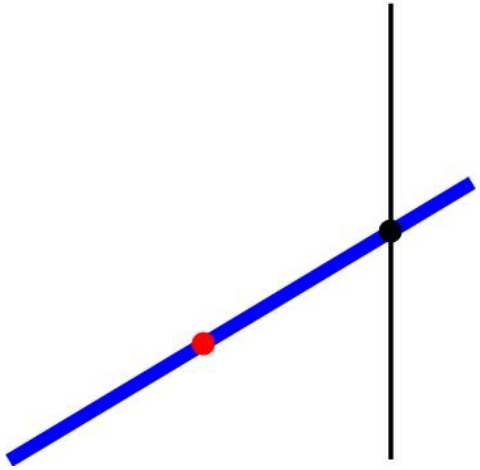
s_2



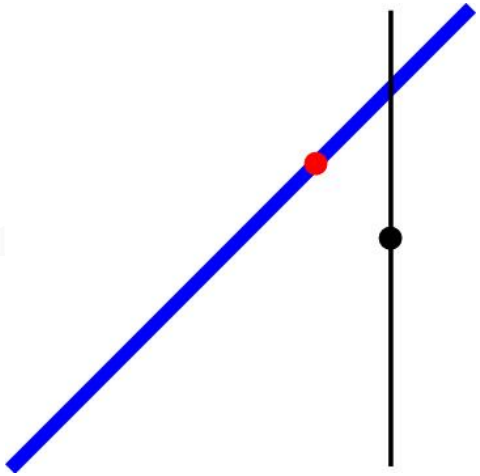
$s_1 s_2$



$s_2 s_1$



$s_1 s_2 s_1$

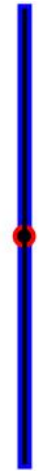


Флаги и симметрическая группа

Взаимные расположения двух флагов $\leftrightarrow$ перестановки в S_3

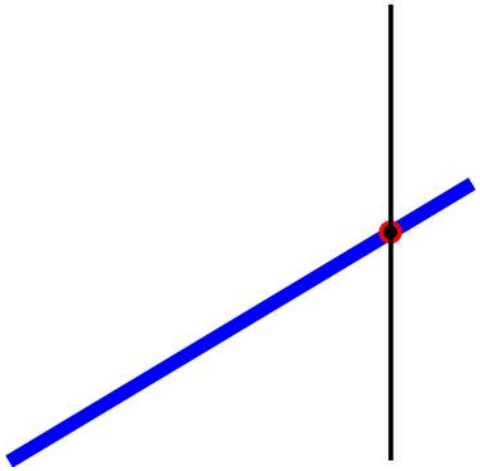
$s_1 := (1\ 2)$, $s_2 := (2\ 3)$

id

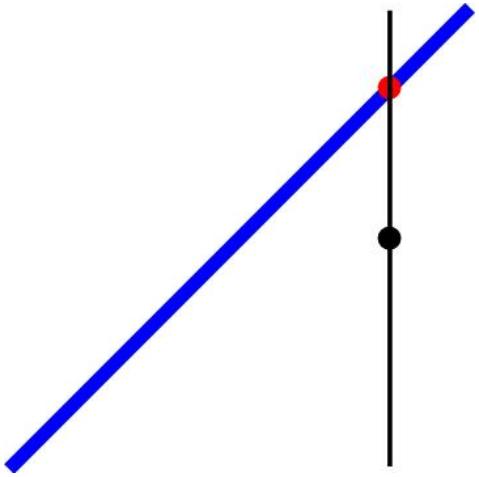


s_1

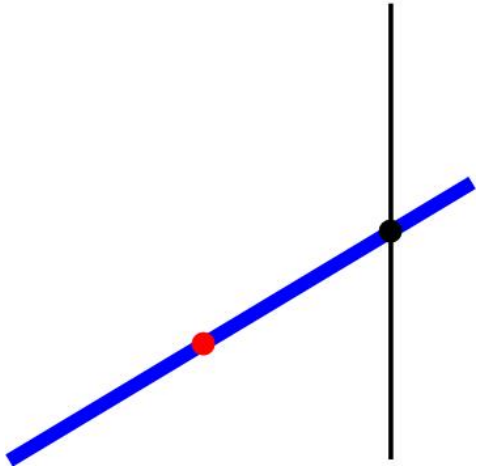
s_2



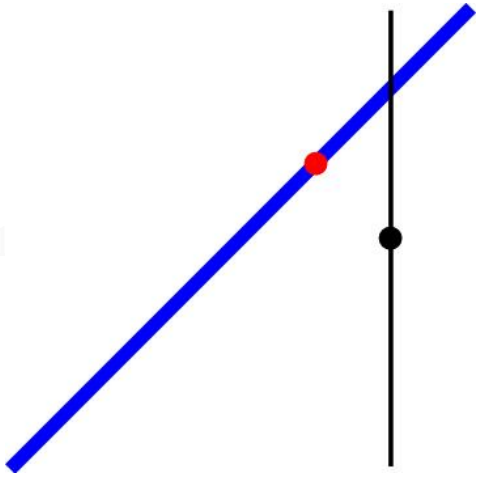
$s_1 s_2$



$s_2 s_1$



$s_1 s_2 s_1$

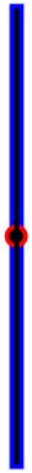


Флаги и симметрическая группа

Взаимные расположения двух флагов $\leftrightarrow$ перестановки в S_3

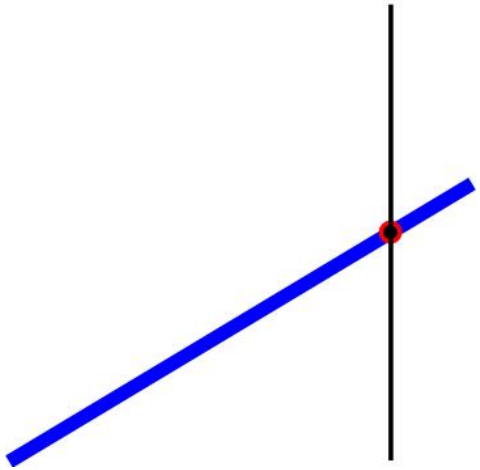
$s_1 := (1\ 2)$, $s_2 := (2\ 3)$

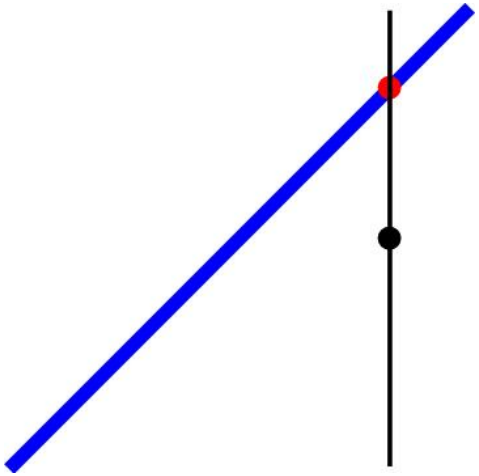
id

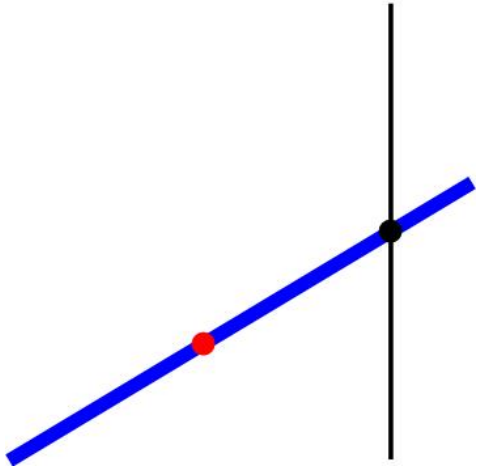


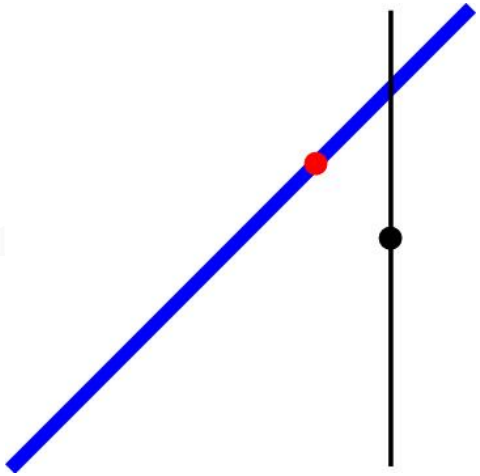
s_1

s_2







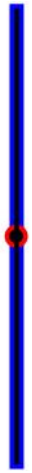


Флаги и симметрическая группа

Взаимные расположения двух флагов $\leftrightarrow$ перестановки в S_3

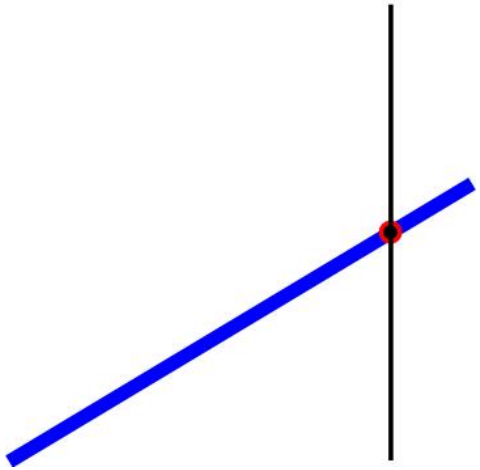
$s_1 := (1\ 2)$, $s_2 := (2\ 3)$

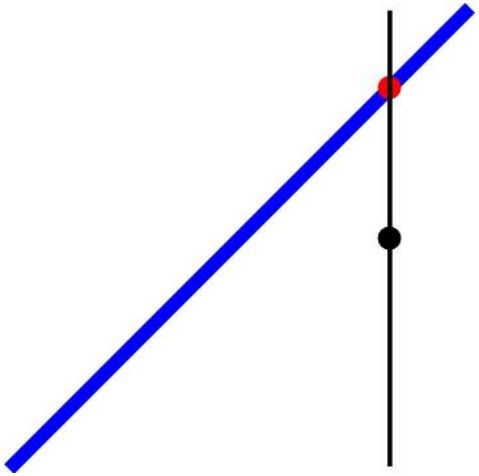
id

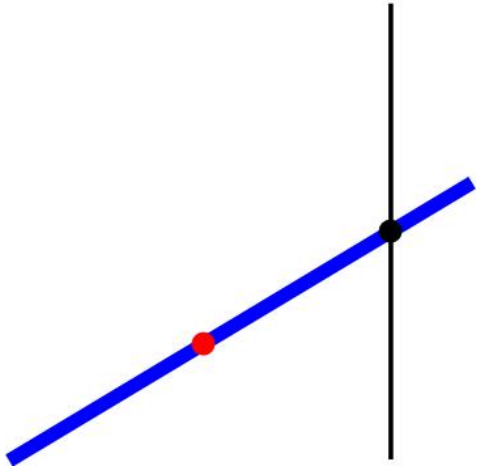


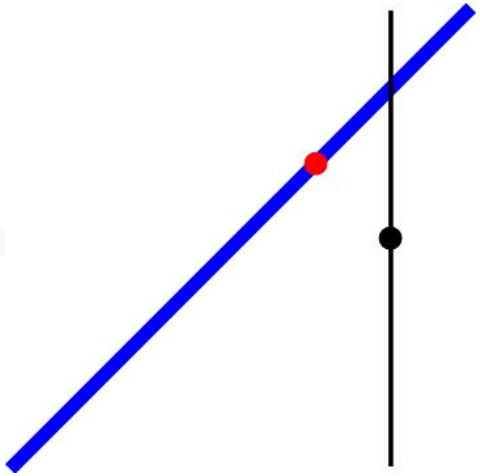
s_1

s_2







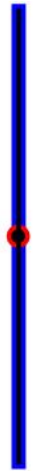


Флаги и симметрическая группа

Взаимные расположения двух флагов $\leftrightarrow$ перестановки в S_3

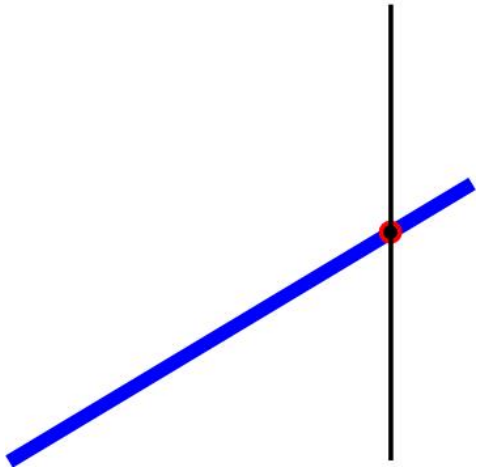
$s_1 := (1\ 2)$, $s_2 := (2\ 3)$

id

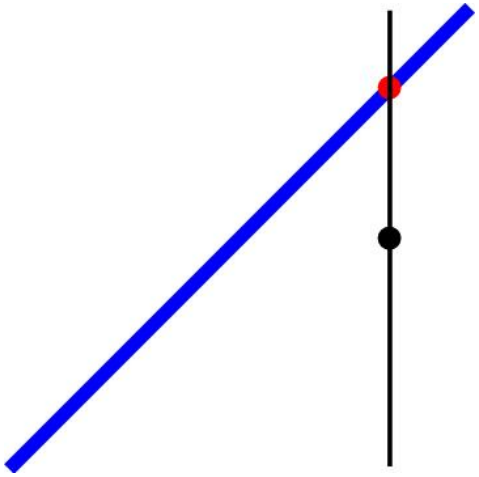


s_1

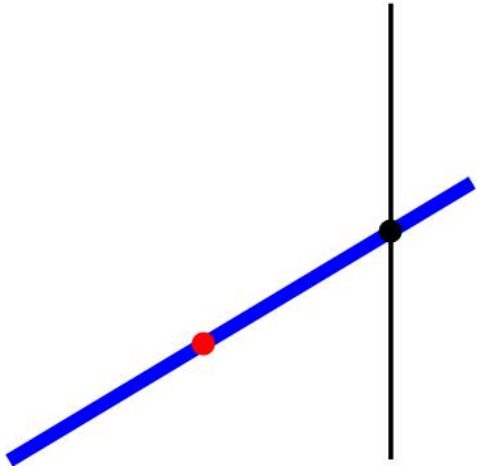
s_2



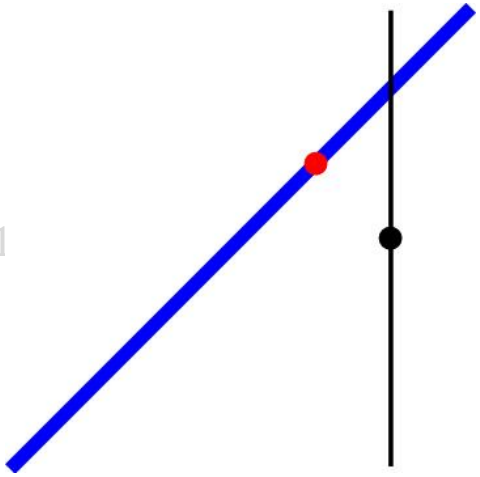
$s_1 s_2$



$s_2 s_1$



$s_1 s_2 s_1$

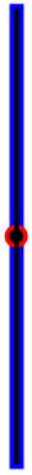


Флаги и симметрическая группа

Взаимные расположения двух флагов $\leftrightarrow$ перестановки в S_3

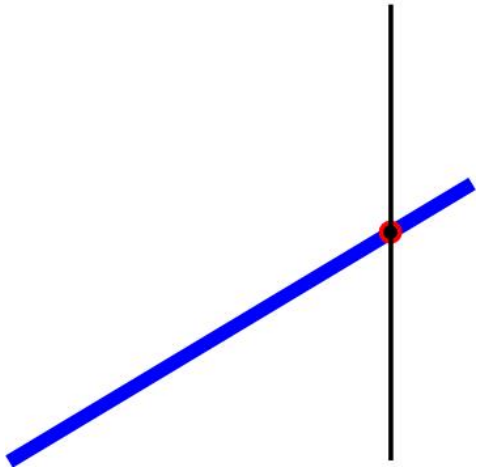
$s_1 := (1\ 2)$, $s_2 := (2\ 3)$

id

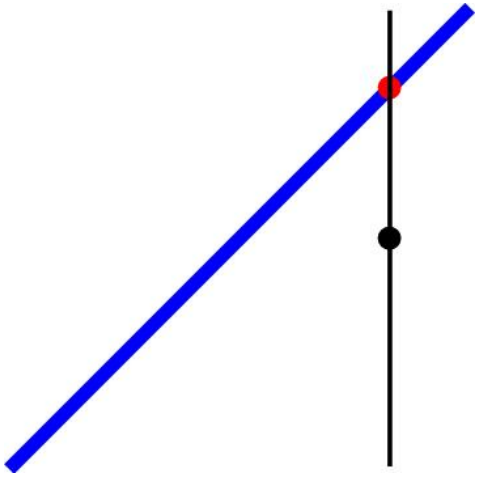


s_1

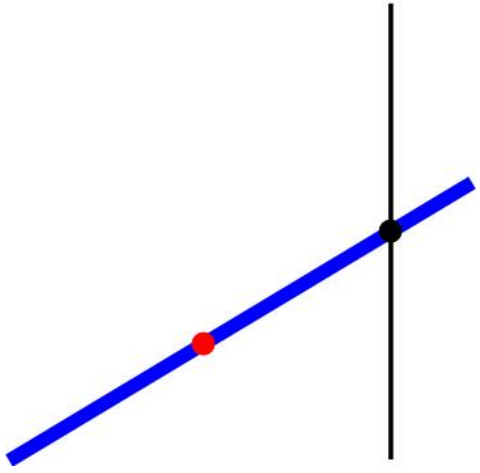
s_2



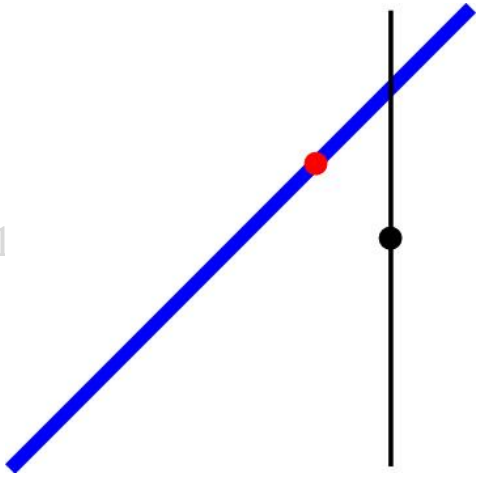
$s_1 s_2$



$s_2 s_1$



$s_1 s_2 s_1$

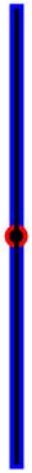


Флаги и симметрическая группа

Взаимные расположения двух флагов $\leftrightarrow$ перестановки в S_3

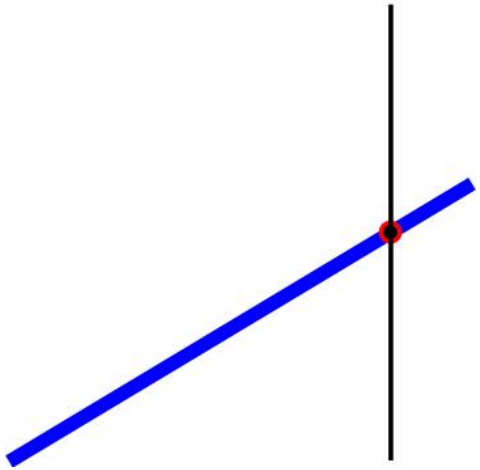
$s_1 := (1\ 2)$, $s_2 := (2\ 3)$

id

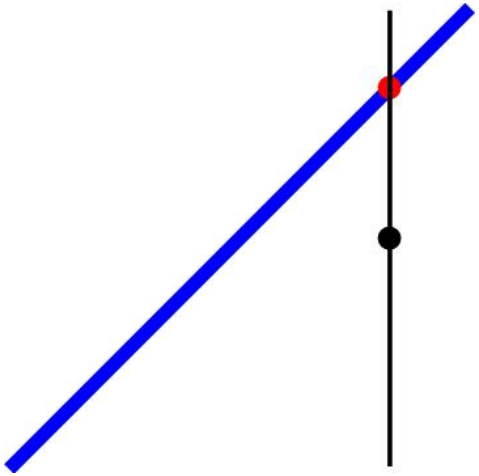


s_1

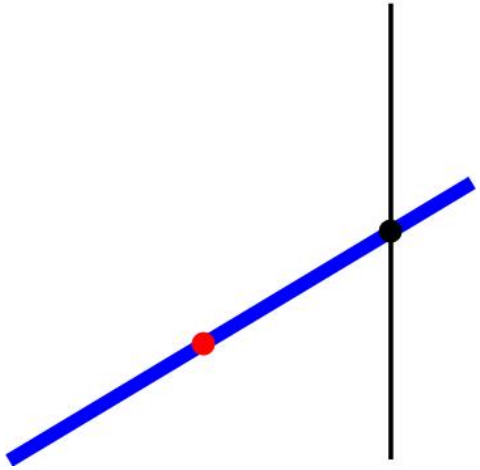
s_2



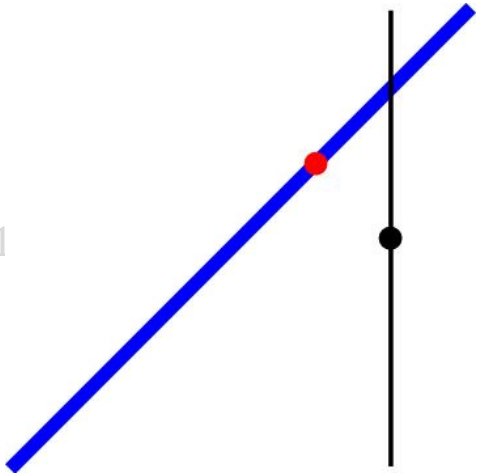
$s_1 s_2$



$s_2 s_1$



$s_1 s_2 s_1$

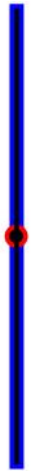


Флаги и симметрическая группа

Взаимные расположения двух флагов $\leftrightarrow$ перестановки в S_3

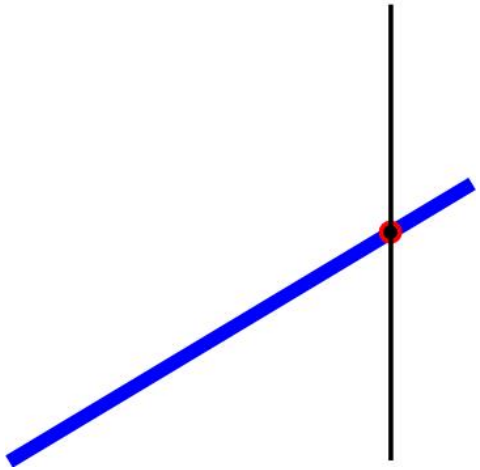
$s_1 := (1\ 2)$, $s_2 := (2\ 3)$

id

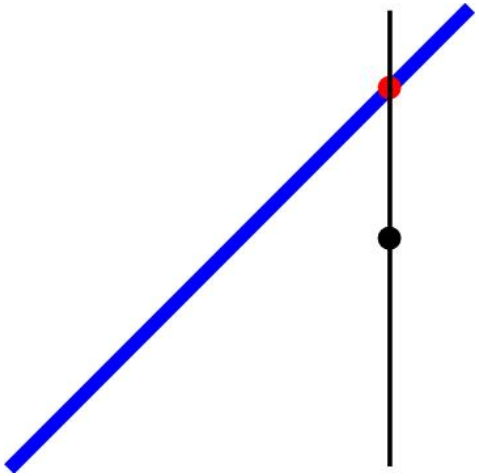


s_1

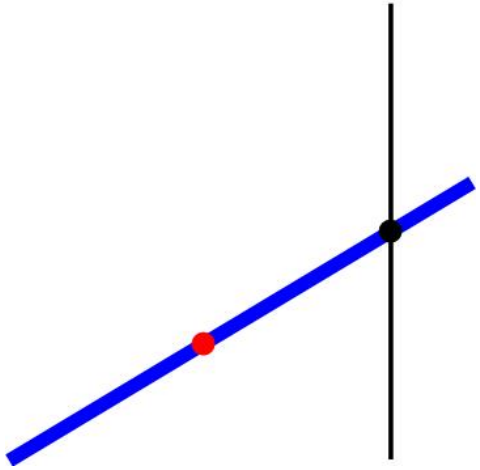
s_2



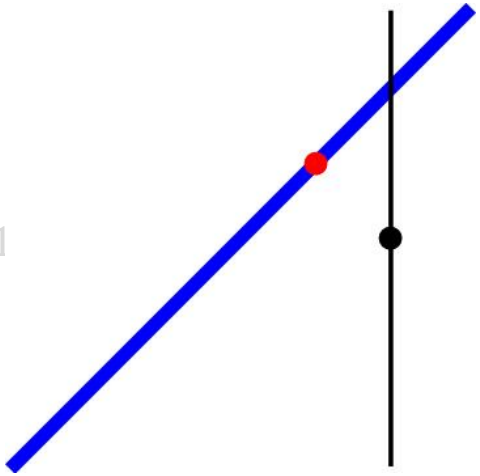
$s_1 s_2$



$s_2 s_1$



$s_1 s_2 s_1$

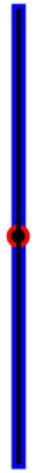


Флаги и симметрическая группа

Взаимные расположения двух флагов $\leftrightarrow$ перестановки в S_3

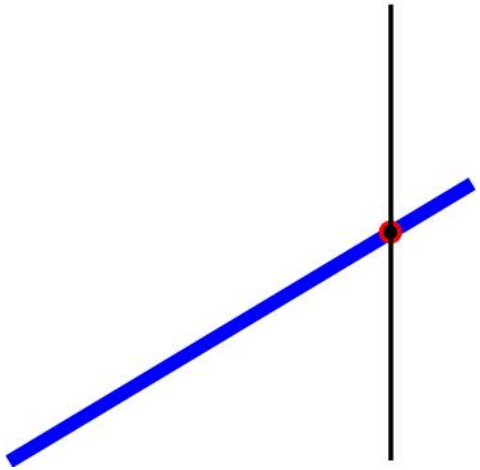
$s_1 := (1\ 2)$, $s_2 := (2\ 3)$

id

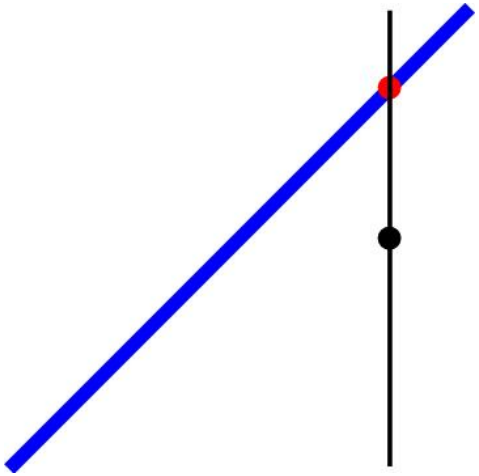


s_1

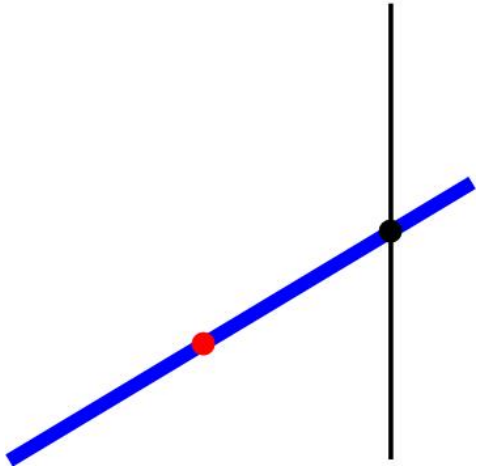
s_2



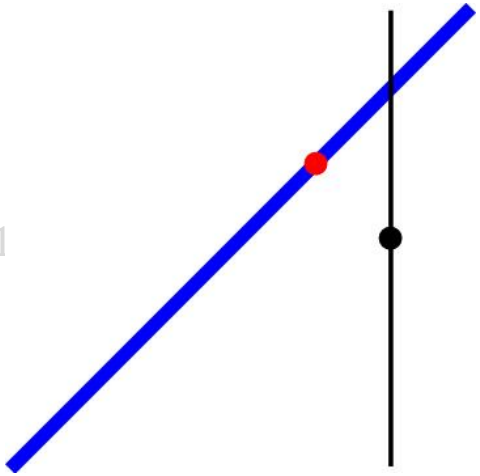
$s_1 s_2$



$s_2 s_1$



$s_1 s_2 s_1$

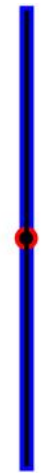


Флаги и симметрическая группа

Взаимные расположения двух флагов $\leftrightarrow$ перестановки в S_3

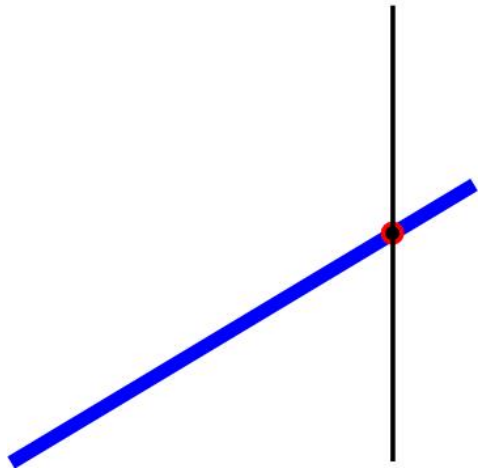
$s_1 := (1\ 2)$, $s_2 := (2\ 3)$

id

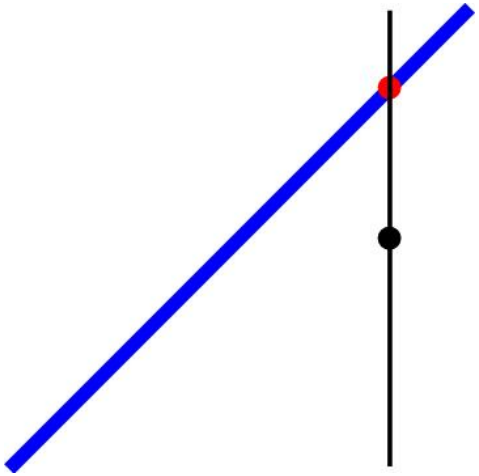


s_1

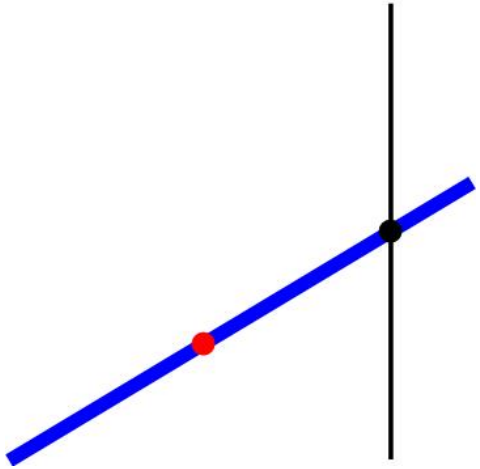
s_2



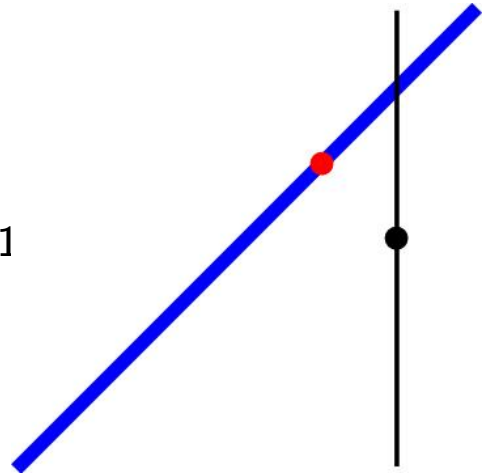
$s_1 s_2$



$s_2 s_1$



$s_1 s_2 s_1$

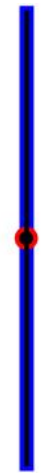


Флаги и симметрическая группа

Взаимные расположения двух флагов $\leftrightarrow$ перестановки в S_3

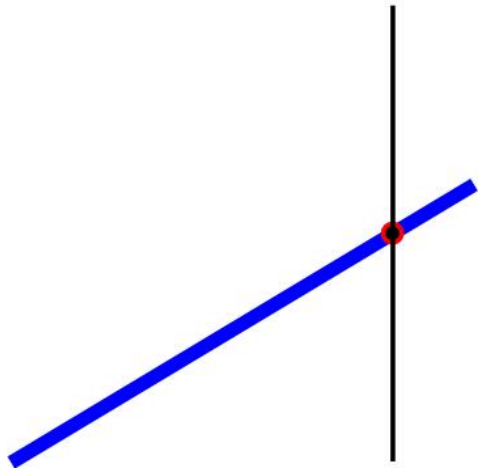
$s_1 := (1\ 2)$, $s_2 := (2\ 3)$

id

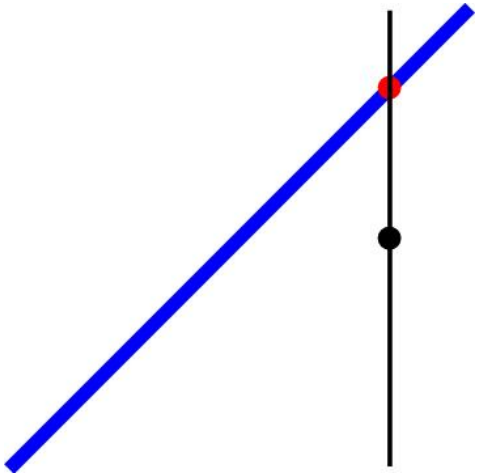


s_1

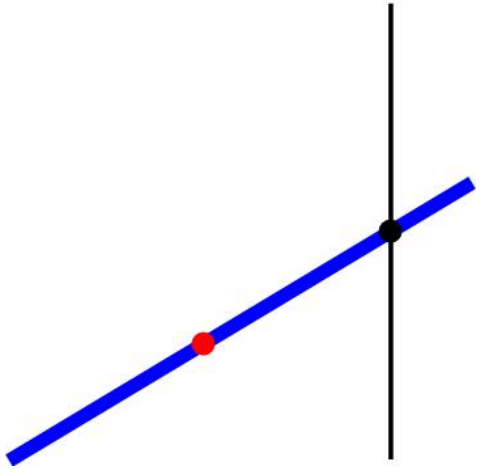
s_2



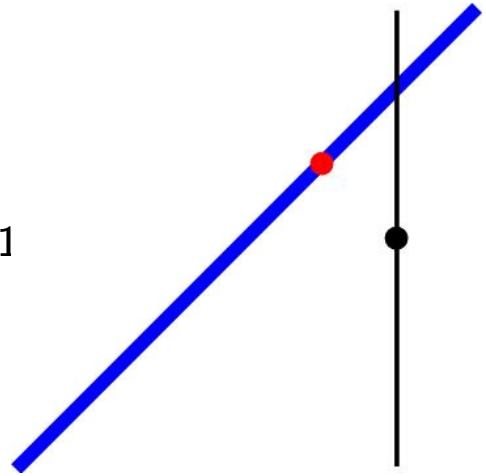
$s_1 s_2$



$s_2 s_1$



$s_1 s_2 s_1$



Разложение Брюа

Упражнение

Группа линейных операторов, оставляющих на месте данный флаг, изоморфна группа верхнетреугольных матриц в GL_n.

Обозначение

B — группа верхнетреугольных матриц GL_n

Теорема

$$GL_n = \bigsqcup_{w \in S_n} BwB$$

Пример $n = 2$

$$GL_2 = B \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} B \sqcup B$$

Разложение Брюа

Упражнение

Группа линейных операторов, оставляющих на месте данный флаг, изоморфна группа верхнетреугольных матриц в GL_n.

Обозначение

B — группа верхнетреугольных матриц GL_n

Теорема

$$GL_n = \bigsqcup_{w \in S_n} BwB$$

Пример $n = 2$

$$GL_2 = B \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} B \sqcup B$$

Разложение Брюа

Упражнение

Группа линейных операторов, оставляющих на месте данный флаг, изоморфна группа верхнетреугольных матриц в GL_n.

Обозначение

B — группа верхнетреугольных матриц GL_n

Теорема

$$GL_n = \bigsqcup_{w \in S_n} BwB$$

Пример $n = 2$

$$GL_2 = B \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} B \sqcup B$$

Разложение Брюа

Упражнение

Группа линейных операторов, оставляющих на месте данный флаг, изоморфна группа верхнетреугольных матриц в GL_n.

Обозначение

B — группа верхнетреугольных матриц GL_n

Теорема

$$GL_n = \bigsqcup_{w \in S_n} BwB$$

Пример $n = 2$

$$GL_2 = B \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} B \sqcup B$$

Симметрическая группа

Перестановки в стандартной форме

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$s_1 s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad s_2 s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad s_1 s_2 s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Симметрическая группа

Перестановки в стандартной форме

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$s_1 s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad s_2 s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad s_1 s_2 s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Симметрическая группа

Перестановки в стандартной форме

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$s_1 s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad s_2 s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad s_1 s_2 s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Симметрическая группа

Перестановки в стандартной форме

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$s_1 s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad s_2 s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad s_1 s_2 s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Симметрическая группа

Перестановки в стандартной форме

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$s_1 s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad s_2 s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad s_1 s_2 s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Симметрическая группа

Перестановки в стандартной форме

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$s_1 s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad s_2 s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad s_1 s_2 s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Симметрическая группа

Перестановки в стандартной форме

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$s_1 s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad s_2 s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad s_1 s_2 s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Симметрическая группа

Перестановки в стандартной форме

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$s_1 s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad s_2 s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad s_1 s_2 s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Симметрическая группа

Перестановки в стандартной форме

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$s_1 s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad s_2 s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad s_1 s_2 s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Операторы разделённых разностей

Определение

Оператор разделённых разностей δ_i (для $i = 1, \ldots, n-1$) действует на кольце многочленов $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ от n переменных с целыми коэффициентами следующим образом:

$$\delta_i : f \mapsto \frac{f(x_1, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_{i+1}, x_i, \ldots, x_n)}{x_i - x_{i+1}}.$$

Пример

$$\delta_1(x_1^2) = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 - x_2} = x_1 + x_2$$

Операторы разделённых разностей

Определение

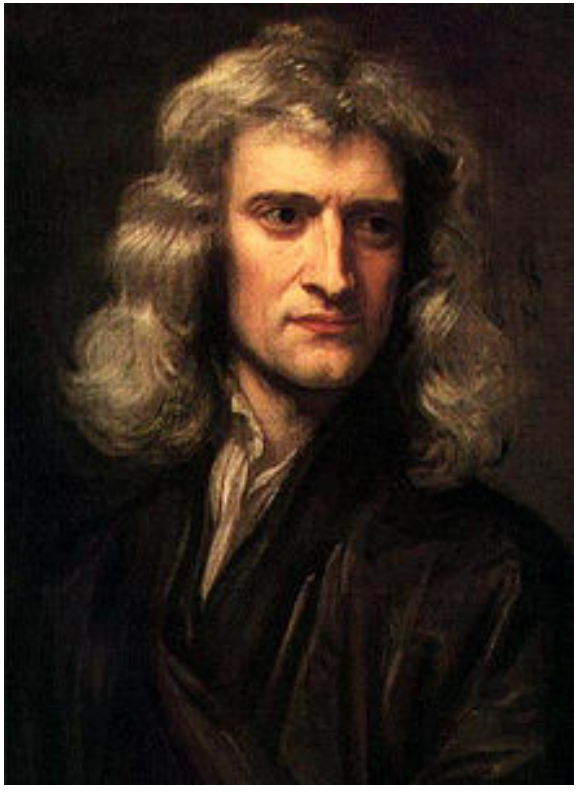
Оператор разделённых разностей δ_i (для $i = 1, \ldots, n-1$) действует на кольце многочленов $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ от n переменных с целыми коэффициентами следующим образом:

$$\delta_i : f \mapsto \frac{f(x_1, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_{i+1}, x_i, \ldots, x_n)}{x_i - x_{i+1}}.$$

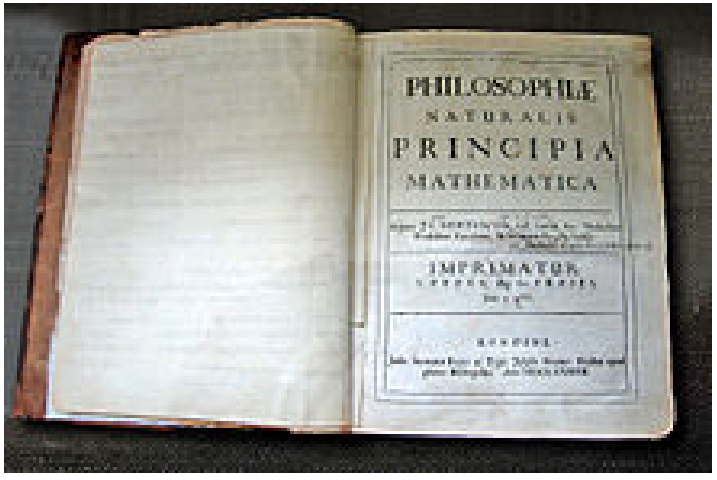
Пример

$$\delta_1(x_1^2) = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 - x_2} = x_1 + x_2$$

Операторы разделённых разностей



Исаак Ньютон (1642–1727),
британский математик



“Математические начала натуральной философии”

Операторы разделённых разностей

Свойства

1. Если f не меняется при перестановке переменных x_i и x_{i+1}, то $\delta_i(f) = 0$
2. Для любого f многочлен $\delta_i(f)$ не меняется при перестановке переменных x_i и x_{i+1}
3. $\delta_i^2 = 0$ (следует из 1 и 2)
4. $\delta_i \delta_{i+1} \delta_i = \delta_{i+1} \delta_i \delta_{i+1}$

Операторы разделённых разностей

Свойства

1. Если f не меняется при перестановке переменных x_i и x_{i+1}, то $\delta_i(f) = 0$
2. Для любого f многочлен $\delta_i(f)$ не меняется при перестановке переменных x_i и x_{i+1}
3. $\delta_i^2 = 0$ (следует из 1 и 2)
4. $\delta_i \delta_{i+1} \delta_i = \delta_{i+1} \delta_i \delta_{i+1}$

Операторы разделённых разностей

Свойства

1. Если f не меняется при перестановке переменных x_i и x_{i+1}, то $\delta_i(f) = 0$
2. Для любого f многочлен $\delta_i(f)$ не меняется при перестановке переменных x_i и x_{i+1}
3. $\delta_i^2 = 0$ (следует из 1 и 2)
4. $\delta_i \delta_{i+1} \delta_i = \delta_{i+1} \delta_i \delta_{i+1}$

Операторы разделённых разностей

Свойства

1. Если f не меняется при перестановке переменных x_i и x_{i+1}, то $\delta_i(f) = 0$
2. Для любого f многочлен $\delta_i(f)$ не меняется при перестановке переменных x_i и x_{i+1}
3. $\delta_i^2 = 0$ (следует из 1 и 2)
4. $\delta_i \delta_{i+1} \delta_i = \delta_{i+1} \delta_i \delta_{i+1}$

Операторы разделённых разностей

Свойства

1. Если f не меняется при перестановке переменных x_i и x_{i+1}, то $\delta_i(f) = 0$
2. Для любого f многочлен $\delta_i(f)$ не меняется при перестановке переменных x_i и x_{i+1}
3. $\delta_i^2 = 0$ (следует из 1 и 2)
4. $\delta_i \delta_{i+1} \delta_i = \delta_{i+1} \delta_i \delta_{i+1}$

Многочлены Шуберта

$w \in S_n$ — перестановка; $w = s_{i_1} \dots s_{i_\ell}$ — кратчайшее разложение в произведение элементарных транспозиций

Определение

Многочлен Шуберта $\mathfrak{S}_w \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$, соответствующий перестановке w, определяется как

$$\delta_{i_\ell} \delta_{i_{\ell-1}} \dots \delta_{i_1} \mathfrak{S}_{id},$$

где

$$\mathfrak{S}_{id} := x_1^{n-1} x_2^{n-2} \dots x_{n-1}.$$

Упражнение

Многочлен Шуберта $\mathfrak{S}_w$ зависит только от выбора перестановки w, а не от выбора кратчайшего разложения.

Многочлены Шуберта

$w \in S_n$ — перестановка; $w = s_{i_1} \dots s_{i_\ell}$ — кратчайшее разложение в произведение элементарных транспозиций

Определение

Многочлен Шуберта $\mathfrak{S}_w \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$, соответствующий перестановке w, определяется как

$$\delta_{i_\ell} \delta_{i_{\ell-1}} \dots \delta_{i_1} \mathfrak{S}_{id},$$

где

$$\mathfrak{S}_{id} := x_1^{n-1} x_2^{n-2} \dots x_{n-1}.$$

Упражнение

Многочлен Шуберта $\mathfrak{S}_w$ зависит только от выбора перестановки w, а не от выбора кратчайшего разложения.

Многочлены Шуберта

$w \in S_n$ — перестановка; $w = s_{i_1} \dots s_{i_\ell}$ — кратчайшее разложение в произведение элементарных транспозиций

Определение

Многочлен Шуберта $\mathfrak{S}_w \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$, соответствующий перестановке w, определяется как

$$\delta_{i_\ell} \delta_{i_{\ell-1}} \dots \delta_{i_1} \mathfrak{S}_{id},$$

где

$$\mathfrak{S}_{id} := x_1^{n-1} x_2^{n-2} \dots x_{n-1}.$$

Упражнение

Многочлен Шуберта $\mathfrak{S}_w$ зависит только от выбора перестановки w, а не от выбора кратчайшего разложения.

Многочлены Шуберта

Пример $n = 3$

$\mathfrak{S}_{id} = x_1^2 x_2$ $\quad$ $\mathfrak{S}_{s_1} = x_1 x_2$ $\quad$ $\mathfrak{S}_{s_2} = x_1^2$

$\mathfrak{S}_{s_1 s_2} = x_1$ $\quad$ $\mathfrak{S}_{s_2 s_1} = x_1 + x_2$ $\quad$ $\mathfrak{S}_{s_1 s_2 s_1} = 1$

Пример $n = 4$, $w = s_3 s_2 s_1$

$$\mathfrak{S}_w = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_2 x_3 + x_2^2 x_3$$

Многочлены Шуберта

Пример $n = 3$

$\mathfrak{S}_{id} = x_1^2 x_2$ $\quad$ $\mathfrak{S}_{s_1} = x_1 x_2$ $\quad$ $\mathfrak{S}_{s_2} = x_1^2$

$\mathfrak{S}_{s_1 s_2} = x_1$ $\quad$ $\mathfrak{S}_{s_2 s_1} = x_1 + x_2$ $\quad$ $\mathfrak{S}_{s_1 s_2 s_1} = 1$

Пример $n = 4$, $w = s_3 s_2 s_1$

$$\mathfrak{S}_w = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_2 x_3 + x_2^2 x_3$$

Многочлены Шуберта

Пример $n = 3$

$\mathfrak{S}_{id} = x_1^2 x_2$ $\quad \mathfrak{S}_{s_1} = x_1 x_2$ $\quad \mathfrak{S}_{s_2} = x_1^2$

$\mathfrak{S}_{s_1 s_2} = x_1$ $\quad \mathfrak{S}_{s_2 s_1} = x_1 + x_2$ $\quad \mathfrak{S}_{s_1 s_2 s_1} = 1$

Пример $n = 4$, $w = s_3 s_2 s_1$

$$\mathfrak{S}_w = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_2 x_3 + x_2^2 x_3$$

Многочлены Шуберта

Пример $n = 3$

$\mathfrak{S}_{id} = x_1^2 x_2$ $\quad$ $\mathfrak{S}_{s_1} = x_1 x_2$ $\quad$ $\mathfrak{S}_{s_2} = x_1^2$

$\mathfrak{S}_{s_1 s_2} = x_1$ $\quad$ $\mathfrak{S}_{s_2 s_1} = x_1 + x_2$ $\quad$ $\mathfrak{S}_{s_1 s_2 s_1} = 1$

Пример $n = 4$, $w = s_3 s_2 s_1$

$$\mathfrak{S}_w = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_2 x_3 + x_2^2 x_3$$

Многочлены Шуберта

Пример $n = 3$

$\mathfrak{S}_{id} = x_1^2 x_2$ $\quad$ $\mathfrak{S}_{s_1} = x_1 x_2$ $\quad$ $\mathfrak{S}_{s_2} = x_1^2$

$\mathfrak{S}_{s_1 s_2} = x_1$ $\quad$ $\mathfrak{S}_{s_2 s_1} = x_1 + x_2$ $\quad$ $\mathfrak{S}_{s_1 s_2 s_1} = 1$

Пример $n = 4$, $w = s_3 s_2 s_1$

$$\mathfrak{S}_w = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_2 x_3 + x_2^2 x_3$$

Многочлены Шуберта

Пример $n = 3$

$\mathfrak{S}_{id} = x_1^2 x_2$ $\quad$ $\mathfrak{S}_{s_1} = x_1 x_2$ $\quad$ $\mathfrak{S}_{s_2} = x_1^2$

$\mathfrak{S}_{s_1 s_2} = x_1$ $\quad$ $\mathfrak{S}_{s_2 s_1} = x_1 + x_2$ $\quad$ $\mathfrak{S}_{s_1 s_2 s_1} = 1$

Пример $n = 4$, $w = s_3 s_2 s_1$

$$\mathfrak{S}_w = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_2 x_3 + x_2^2 x_3$$

Многочлены Шуберта

Пример $n = 3$

$\mathfrak{S}_{id} = x_1^2 x_2$ $\quad$ $\mathfrak{S}_{s_1} = x_1 x_2$ $\quad$ $\mathfrak{S}_{s_2} = x_1^2$

$\mathfrak{S}_{s_1 s_2} = x_1$ $\quad$ $\mathfrak{S}_{s_2 s_1} = x_1 + x_2$ $\quad$ $\mathfrak{S}_{s_1 s_2 s_1} = 1$

Пример $n = 4$, $w = s_3 s_2 s_1$

$$\mathfrak{S}_w = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_2 x_3 + x_2^2 x_3$$

Многочлены Шуберта

Пример $n = 3$

$\mathfrak{S}_{id} = x_1^2 x_2$ $\quad$ $\mathfrak{S}_{s_1} = x_1 x_2$ $\quad$ $\mathfrak{S}_{s_2} = x_1^2$

$\mathfrak{S}_{s_1 s_2} = x_1$ $\quad$ $\mathfrak{S}_{s_2 s_1} = x_1 + x_2$ $\quad$ $\mathfrak{S}_{s_1 s_2 s_1} = 1$

Пример $n = 4$, $w = s_3 s_2 s_1$

$$\mathfrak{S}_w = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_2 x_3 + x_2^2 x_3$$

Многочлены Шуберта

Пример $n = 3$

$$\mathfrak{S}_{id} = x_1^2 x_2 \qquad \mathfrak{S}_{s_1} = x_1 x_2 \qquad \mathfrak{S}_{s_2} = x_1^2$$

$$\mathfrak{S}_{s_1 s_2} = x_1 \qquad \mathfrak{S}_{s_2 s_1} = x_1 + x_2 \qquad \mathfrak{S}_{s_1 s_2 s_1} = 1$$

Пример $n = 4$, $w = s_3 s_2 s_1$

$$\mathfrak{S}_w = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_2 x_3 + x_2^2 x_3$$

Многочлены Шуберта

Пример $n = 3$

$$\mathfrak{S}_{id} = x_1^2 x_2 \qquad \mathfrak{S}_{s_1} = x_1 x_2 \qquad \mathfrak{S}_{s_2} = x_1^2$$

$$\mathfrak{S}_{s_1 s_2} = x_1 \qquad \mathfrak{S}_{s_2 s_1} = x_1 + x_2 \qquad \mathfrak{S}_{s_1 s_2 s_1} = 1$$

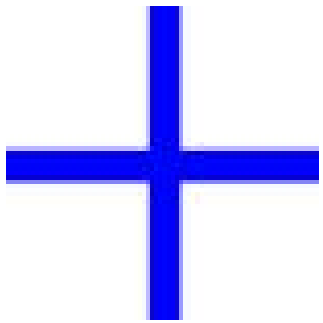
Пример $n = 4,\ w = s_3 s_2 s_1$

$$\mathfrak{S}_w = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_2 x_3 + x_2^2 x_3$$

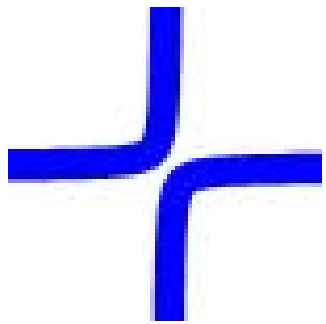
Водопроводные сети (pipe-dreams)

Конструкция

В каждую клетку $n \times n$ таблицы, лежащую над диагональю $i + j = n$, вставляется фрагмент водопровода одного из двух типов:

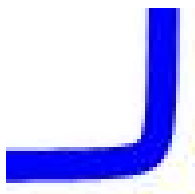


Пересечение



Расхождение

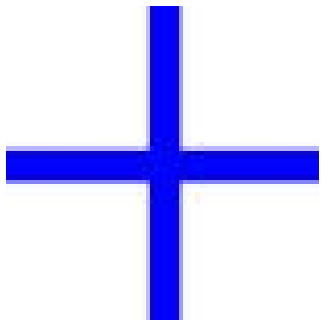
Во все клетки на диагонали $i + j = n$ вставляются фрагменты

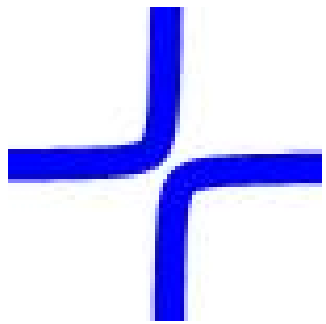


Водопроводные сети (pipe-dreams)

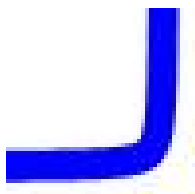
Конструкция

В каждую клетку $n \times n$ таблицы, лежащую над диагональю $i + j = n$, вставляется фрагмент водопровода одного из двух типов:

Пересечение 

Расхождение 

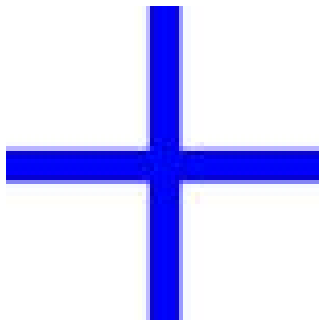
Во все клетки на диагонали $i + j = n$ вставляются фрагменты

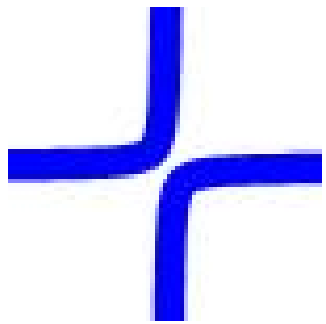


Водопроводные сети (pipe-dreams)

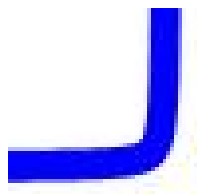
Конструкция

В каждую клетку $n \times n$ таблицы, лежащую над диагональю $i + j = n$, вставляется фрагмент водопровода одного из двух типов:

Пересечение 

Расхождение 

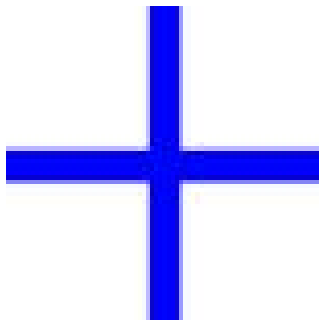
Во все клетки на диагонали $i + j = n$ вставляются фрагменты

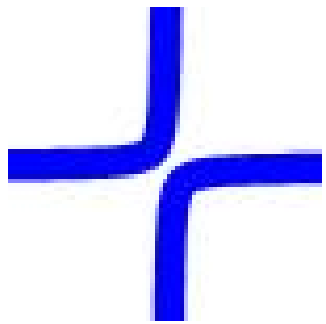


Водопроводные сети (pipe-dreams)

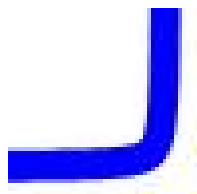
Конструкция

В каждую клетку $n \times n$ таблицы, лежащую над диагональю $i + j = n$, вставляется фрагмент водопровода одного из двух типов:

Пересечение 

Расхождение 

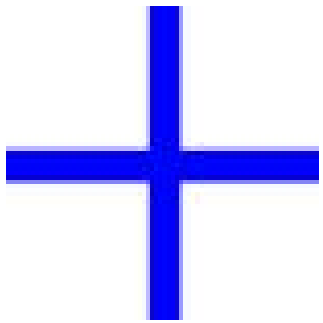
Во все клетки на диагонали $i + j = n$ вставляются фрагменты

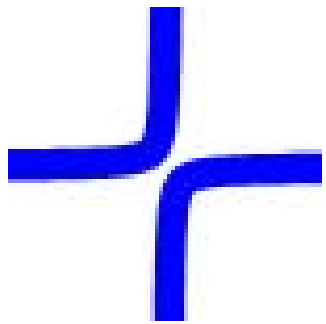


Водопроводные сети (pipe-dreams)

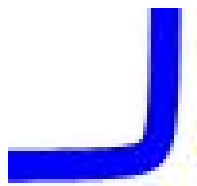
Конструкция

В каждую клетку $n \times n$ таблицы, лежащую над диагональю $i + j = n$, вставляется фрагмент водопровода одного из двух типов:

Пересечение 

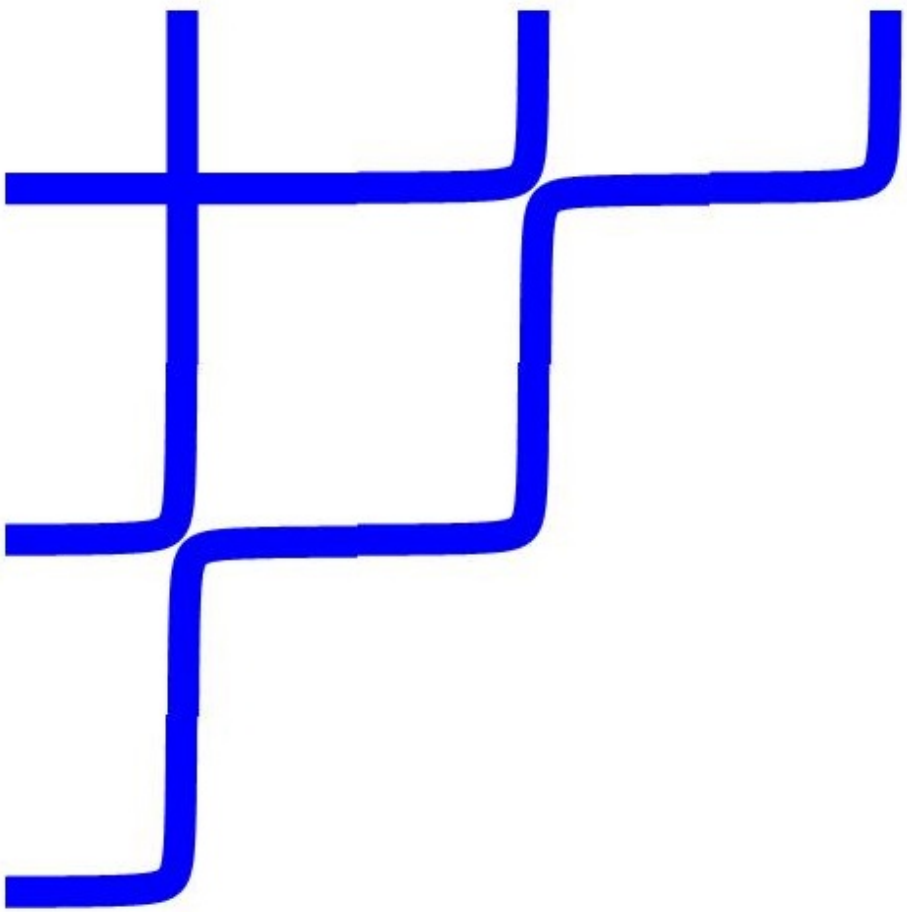
Расхождение 

Во все клетки на диагонали $i + j = n$ вставляются фрагменты



Водопроводные сети

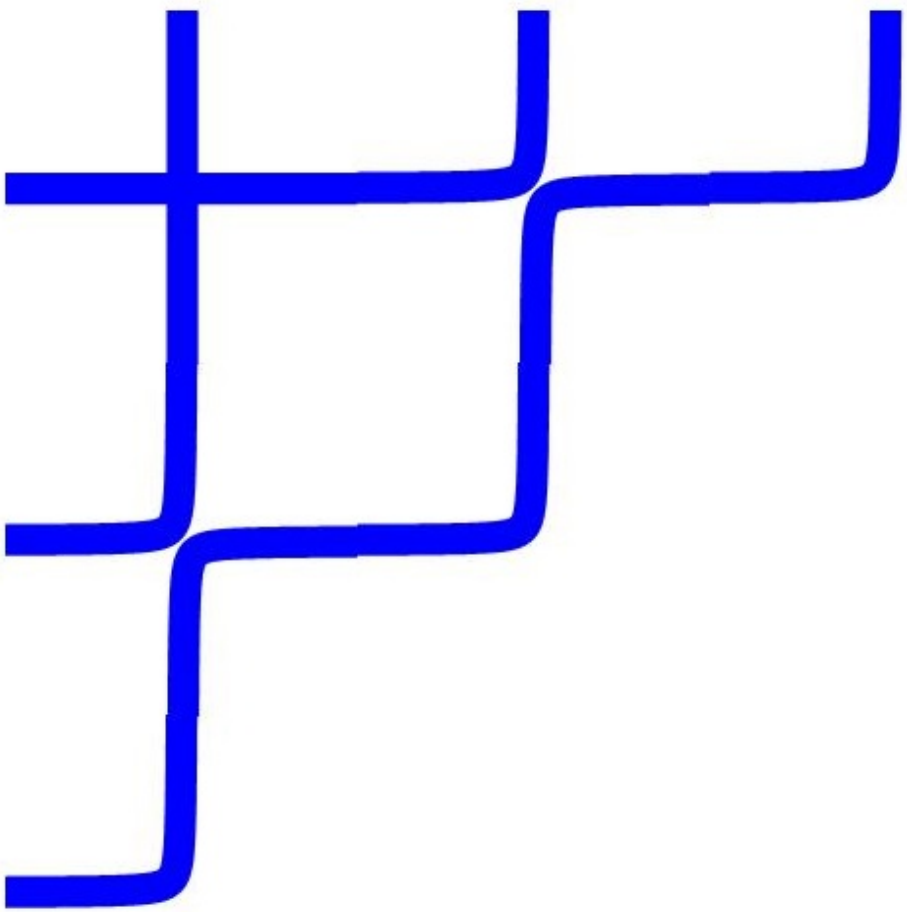
Пример n=3



Водопроводная сеть, реализующая элементарную транспозицию $(1\ 2) \in S_3$.

Водопроводные сети

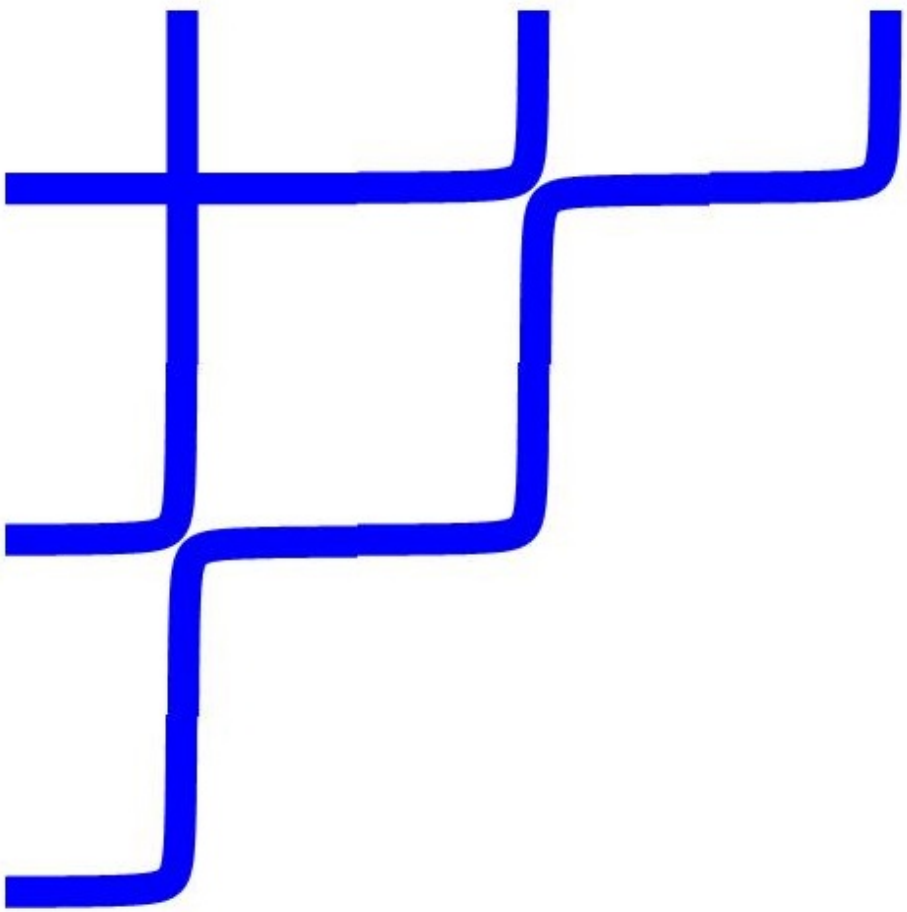
Пример n=3



Водопроводная сеть, реализующая элементарную транспозицию $(1\ 2) \in S_3$.

Водопроводные сети

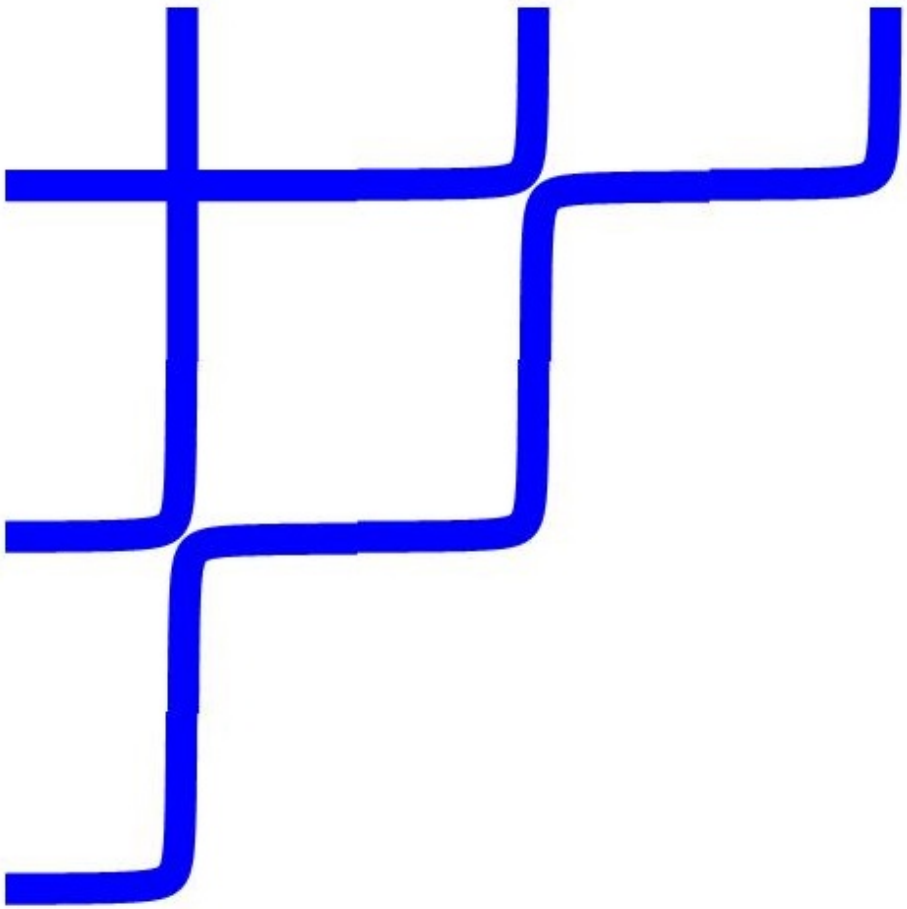
Пример n=3



Водопроводная сеть, реализующая элементарную транспозицию $(1\ 2) \in S_3$.

Водопроводные сети

Пример n=3



Водопроводная сеть, реализующая элементарную транспозицию $(1\ 2) \in S_3$.

Водопроводные сети

Каждой водопроводной сети D можно поставить в соответствие перестановку $w(D) \in S_n$ и моном $x(D) \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$

Определение перестановки

Труба, входящая в столбце i, выходит в строке $w(i)$.

Определение монома

$$x(D) = x_1^{\text{число + в 1-ом столбце}} \cdot x_2^{\text{число + во 2-ом столбце}} \cdot \ldots \cdot x_{n-1}^{\text{число + в } (n-1)\text{-ом столбце}}$$

Водопроводные сети

Каждой водопроводной сети D можно поставить в соответствие перестановку $w(D) \in S_n$ и моном $x(D) \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$

Определение перестановки

Труба, входящая в столбце i, выходит в строке $w(i)$.

Определение монома

$$x(D) = x_1^{\text{число + в 1-ом столбце}} \cdot x_2^{\text{число + во 2-ом столбце}} \cdot \ldots \cdot x_{n-1}^{\text{число + в } (n-1)\text{-ом столбце}}$$

Водопроводные сети

Каждой водопроводной сети D можно поставить в соответствие перестановку $w(D) \in S_n$ и моном $x(D) \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$

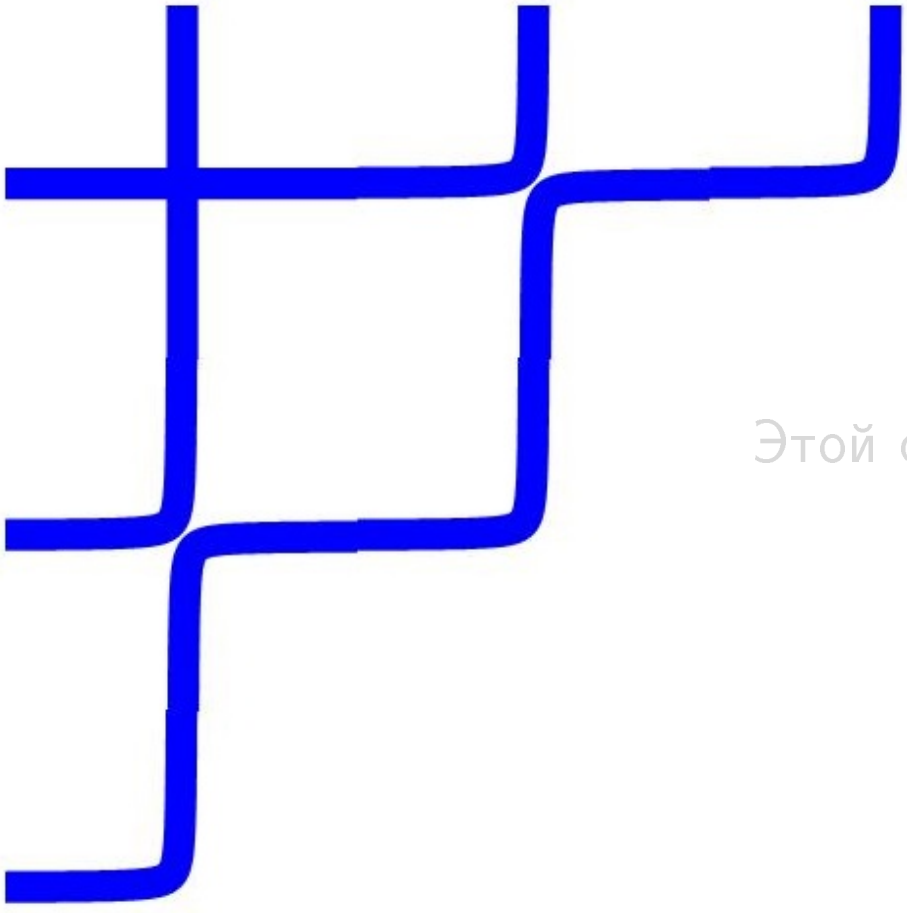
Определение перестановки

Труба, входящая в столбце i, выходит в строке $w(i)$.

Определение монома

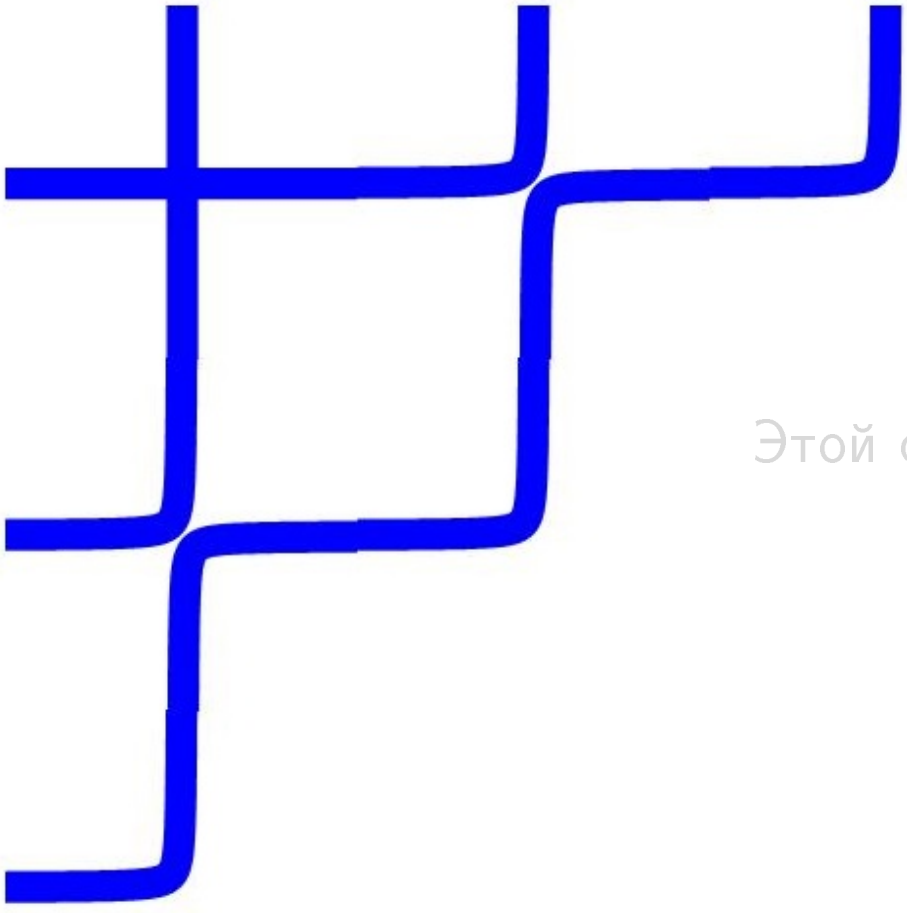
$x(D) = x_1^{\text{число + в 1-ом столбце}} \cdot x_2^{\text{число + во 2-ом столбце}} \cdot \ldots \cdot x_{n-1}^{\text{число + в } (n-1)\text{-ом столбце}}$

Водопроводные сети



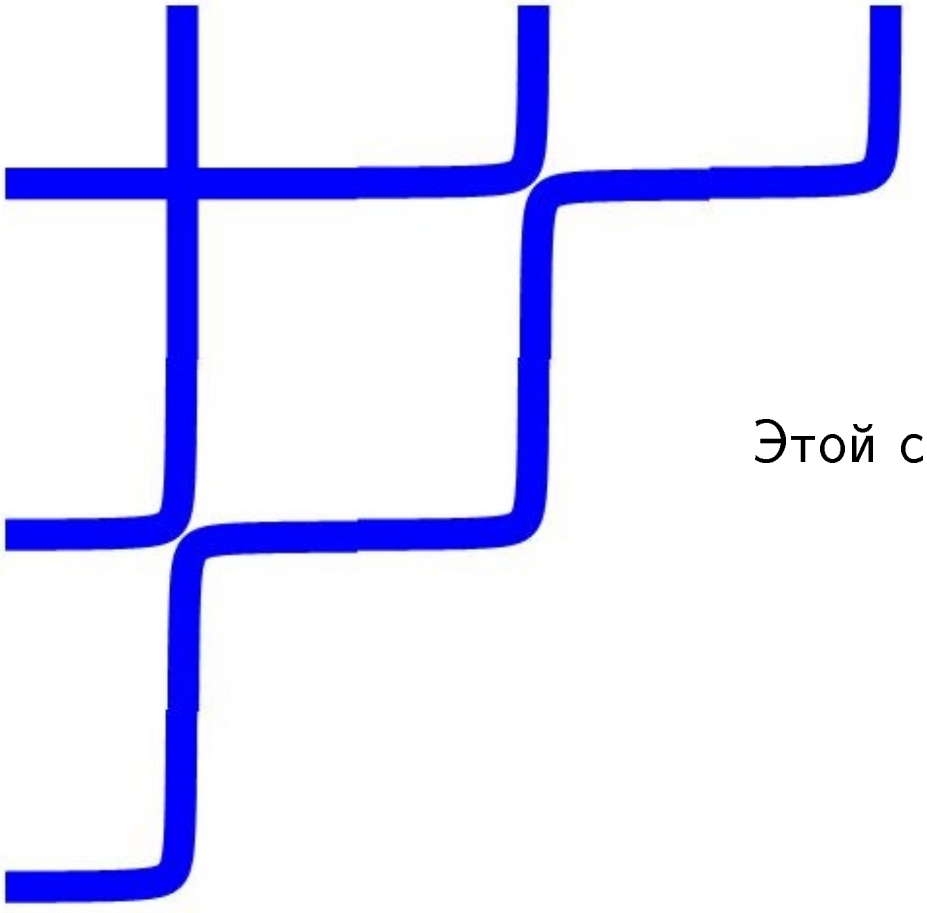
Этой сети соответствует моном x_1.

Водопроводные сети



Этой сети соответствует моном x_1.

Водопроводные сети



Этой сети соответствует моном x_1.

Теорема Кириллова–Фомина

Определение

Водопроводная сеть называется *приведённой*, если никакие две трубы не пересекаются больше одного раза.

Обозначение

$$w_0 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n & (n-1) & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Теорема

$$\mathfrak{S}_w = \sum_{w(D)=w_0 w} x(D),$$

где сумма идёт по приведённым водопроводным сетям D.

Теорема Кириллова–Фомина

Определение

Водопроводная сеть называется *приведённой*, если никакие две трубы не пересекаются больше одного раза.

Обозначение

$$w_0 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n & (n-1) & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Теорема

$$\mathfrak{S}_w = \sum_{w(D)=w_0 w} x(D),$$

где сумма идёт по приведённым водопроводным сетям D.

Теорема Кириллова–Фомина

Определение

Водопроводная сеть называется *приведённой*, если никакие две трубы не пересекаются больше одного раза.

Обозначение

$$w_0 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n & (n-1) & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Теорема

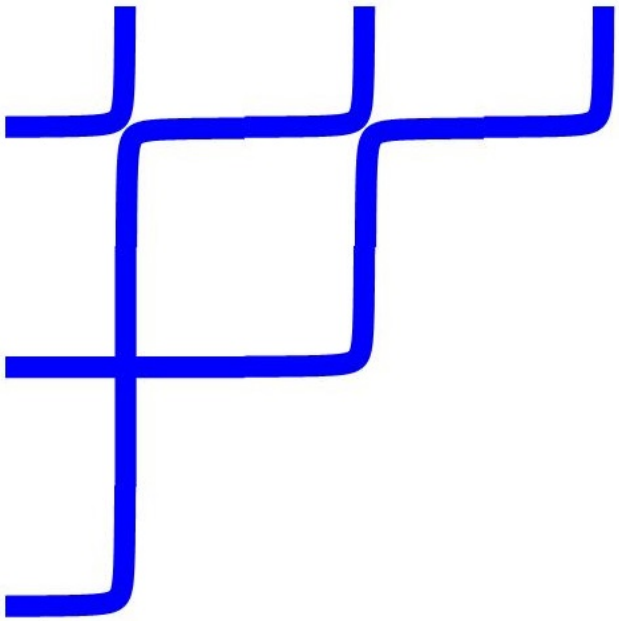
$$\mathfrak{S}_w = \sum_{w(D)=w_0 w} x(D),$$

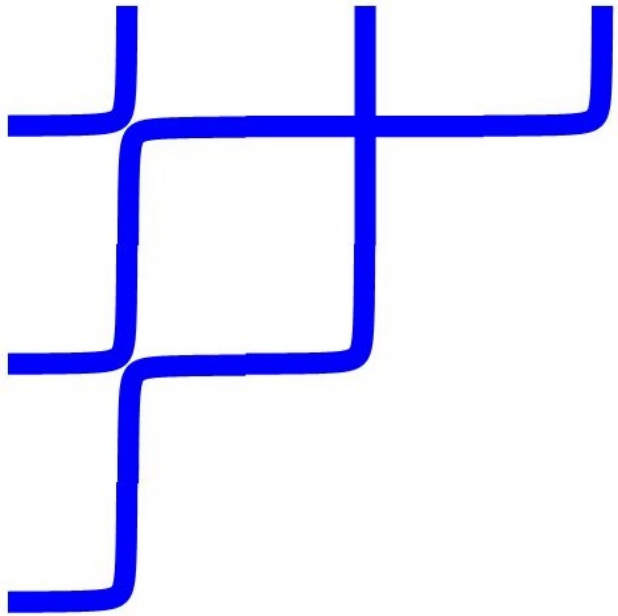
где сумма идёт по приведённым водопроводным сетям D.

Теорема Кириллова–Фомина

Пример $n = 3$, $w = s_2 s_1$

Приведённые водопроводные сети, реализующие перестановку $w_0 w = s_2$. Им соответствуют мономы x_1 и x_2.





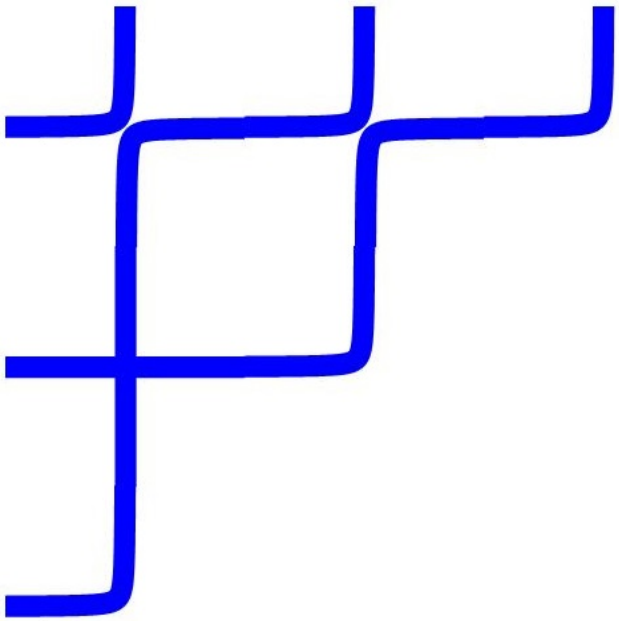
По теореме Кириллова–Фомина получаем, что

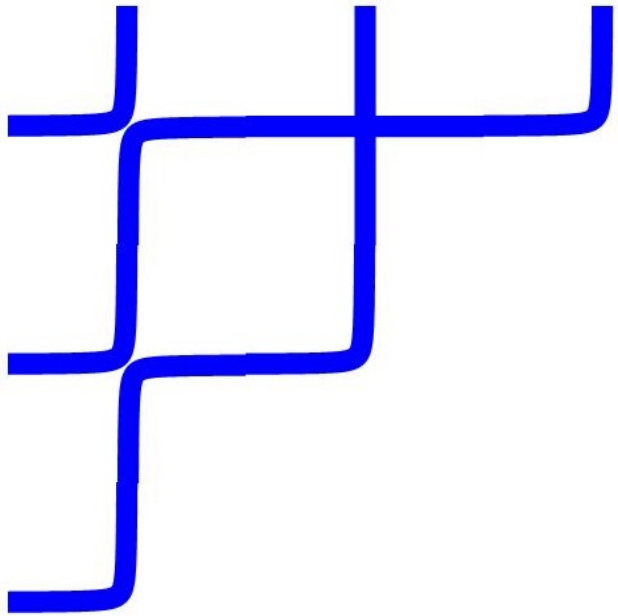
$$\mathfrak{S}_{s_2 s_1} = x_1 + x_2.$$

Теорема Кириллова–Фомина

Пример $n = 3$, $w = s_2 s_1$

Приведённые водопроводные сети, реализующие перестановку $w_0 w = s_2$. Им соответствуют мономы x_1 и x_2.





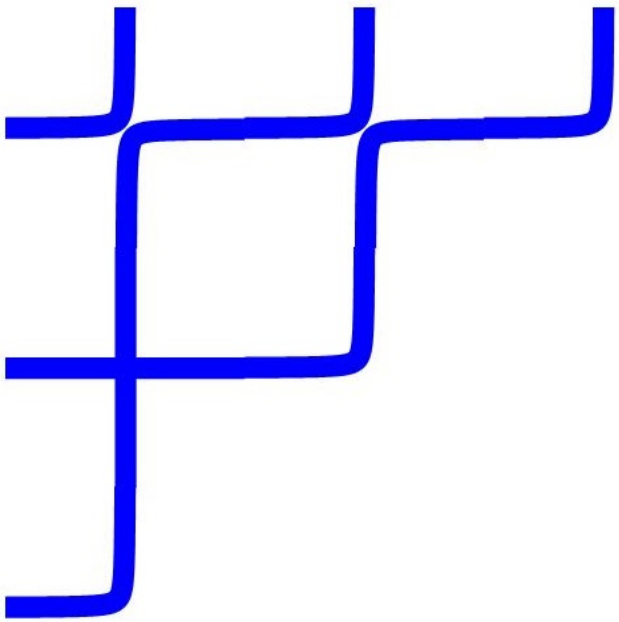
По теореме Кириллова–Фомина получаем, что

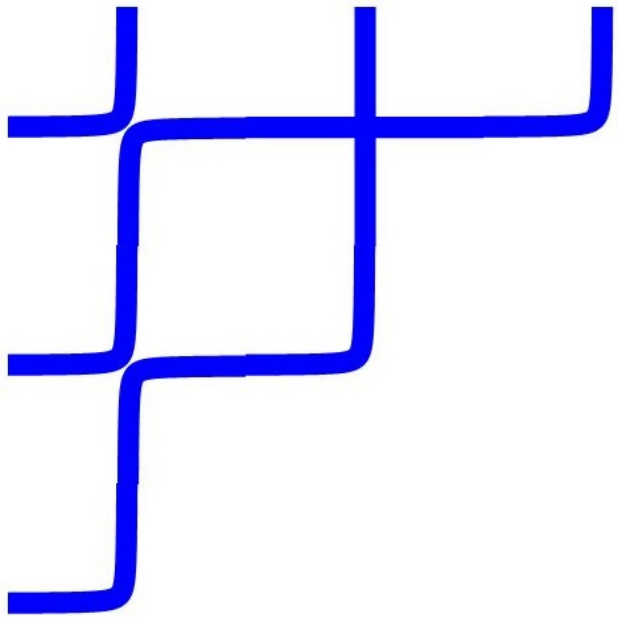
$$\mathfrak{S}_{s_2 s_1} = x_1 + x_2.$$

Теорема Кириллова–Фомина

Пример $n = 3$, $w = s_2 s_1$

Приведённые водопроводные сети, реализующие перестановку $w_0 w = s_2$. Им соответствуют мономы x_1 и x_2.





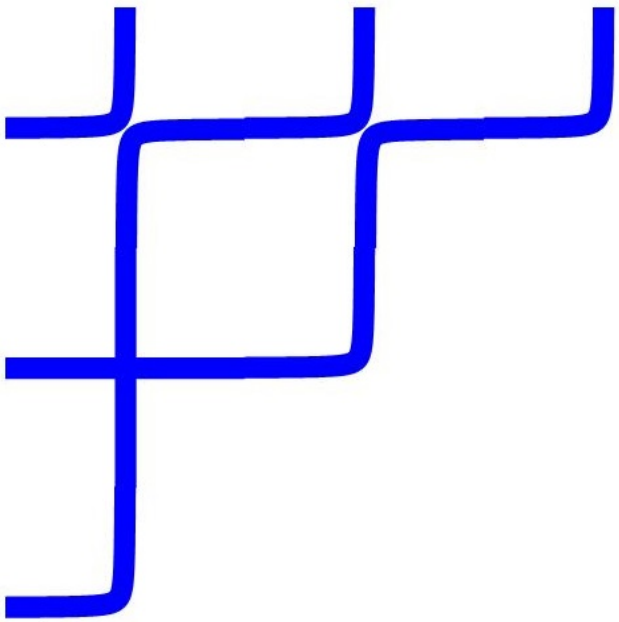
По теореме Кириллова–Фомина получаем, что

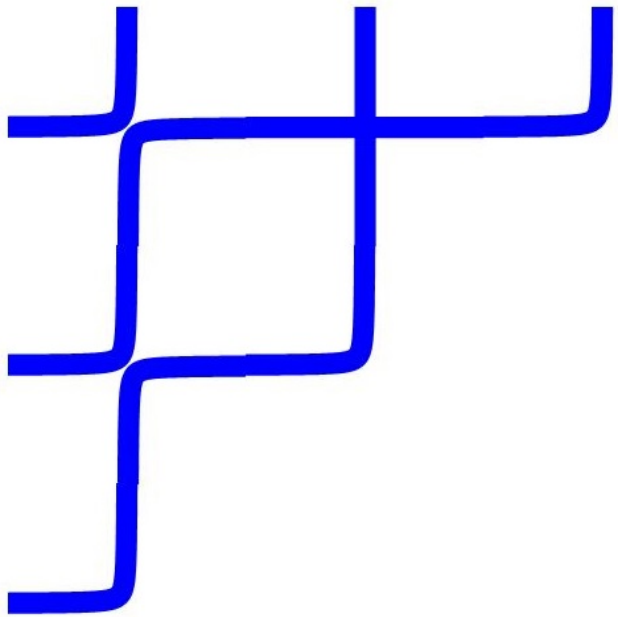
$$\mathfrak{S}_{s_2 s_1} = x_1 + x_2.$$

Теорема Кириллова–Фомина

Пример $n = 3$, $w = s_2 s_1$

Приведённые водопроводные сети, реализующие перестановку $w_0 w = s_2$. Им соответствуют мономы x_1 и x_2.





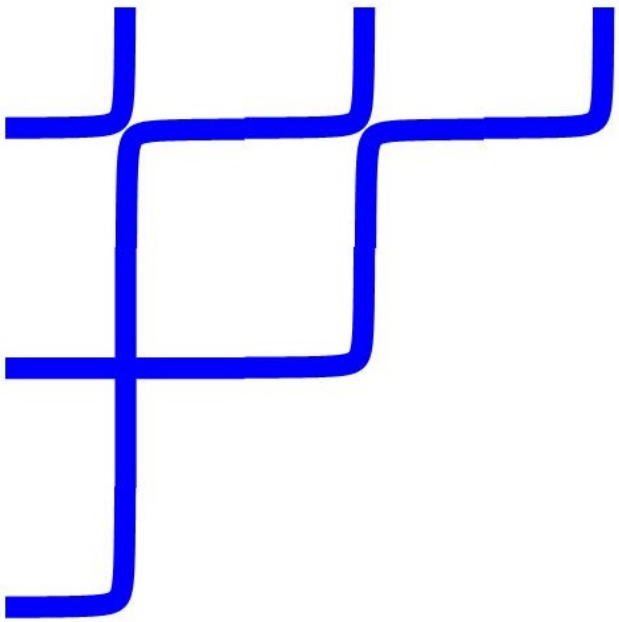
По теореме Кириллова–Фомина получаем, что

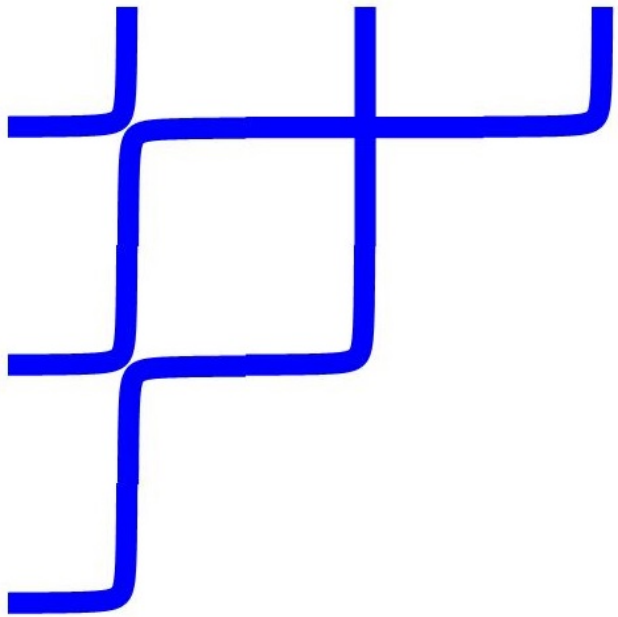
$$\mathfrak{S}_{s_2 s_1} = x_1 + x_2.$$

Теорема Кириллова–Фомина

Пример $n = 3$, $w = s_2 s_1$

Приведённые водопроводные сети, реализующие перестановку $w_0 w = s_2$. Им соответствуют мономы x_1 и x_2.



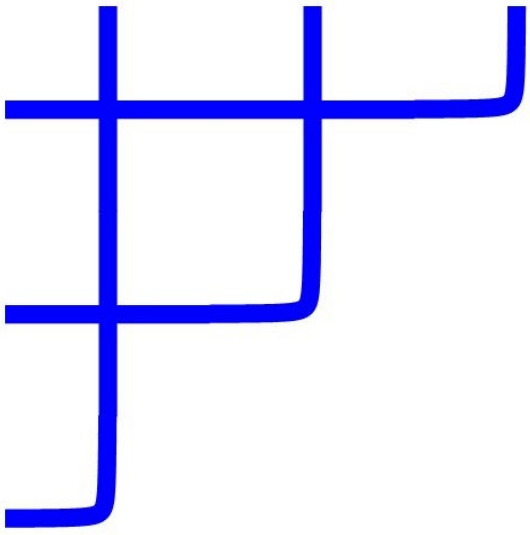


По теореме Кириллова–Фомина получаем, что

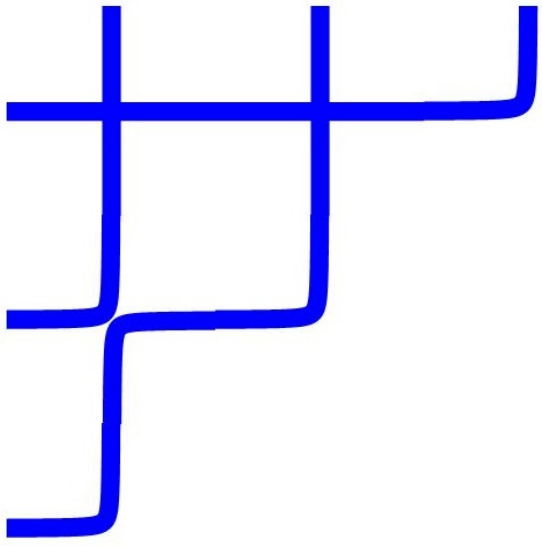
$$\mathfrak{S}_{s_2 s_1} = x_1 + x_2.$$

Теорема Кириллова–Фомина

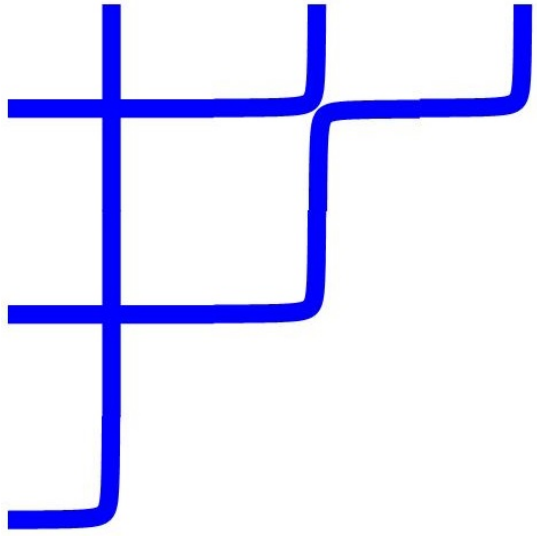
id



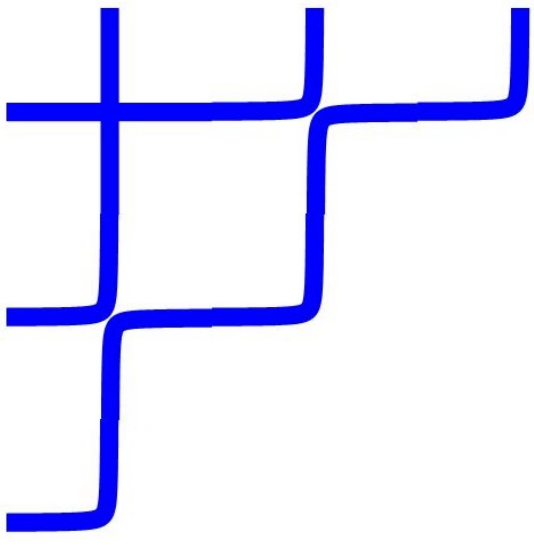
s_1



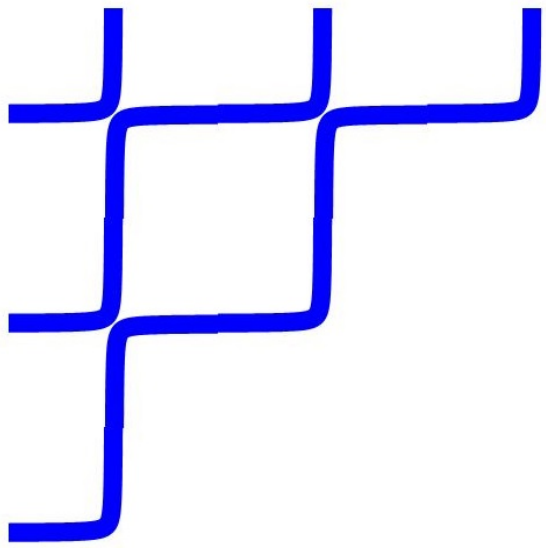
s_2



$s_1 s_2$

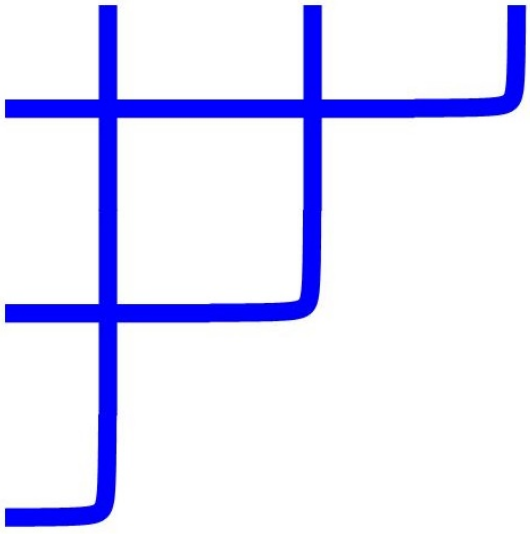


$s_1 s_2 s_1$

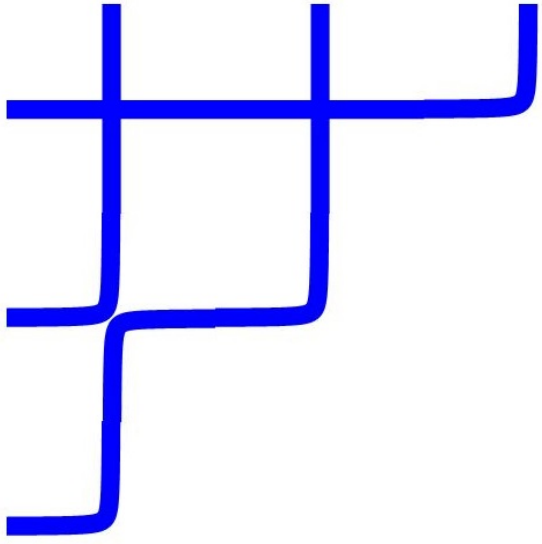


Теорема Кириллова–Фомина

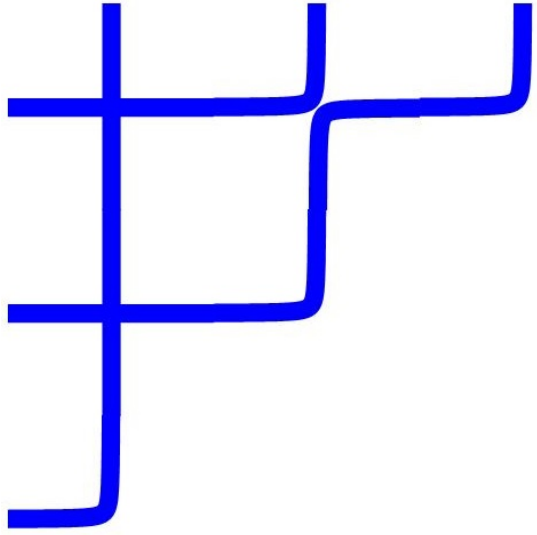
id



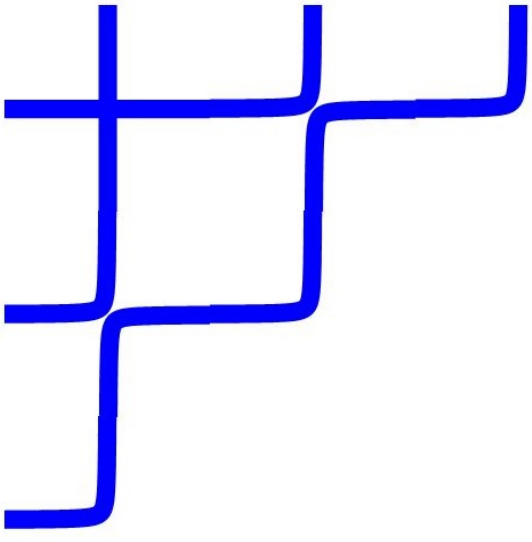
s_1



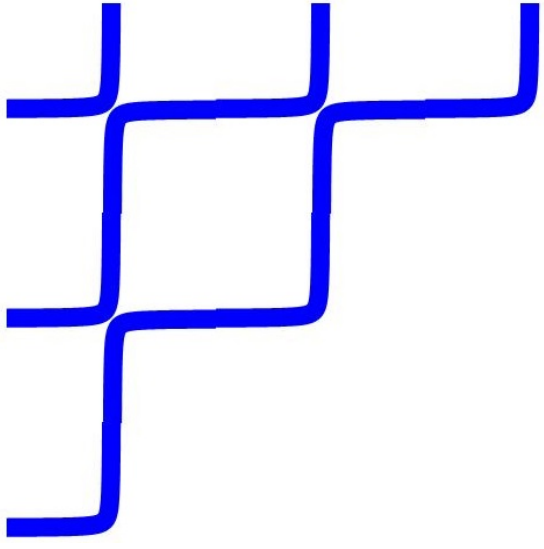
s_2



$s_1 s_2$

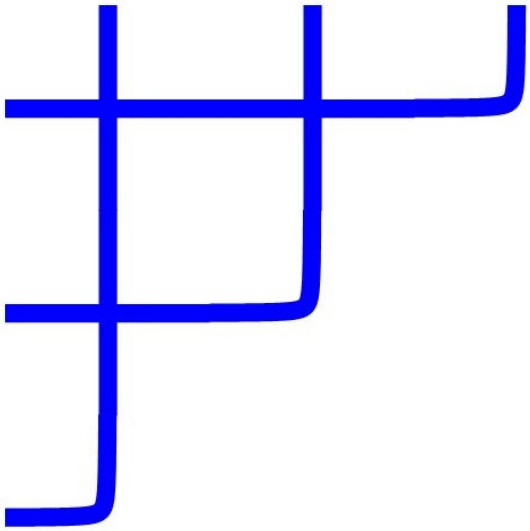


$s_1 s_2 s_1$

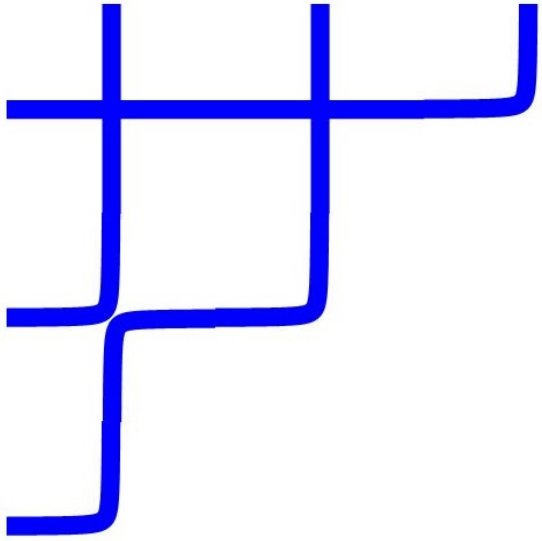


Теорема Кириллова–Фомина

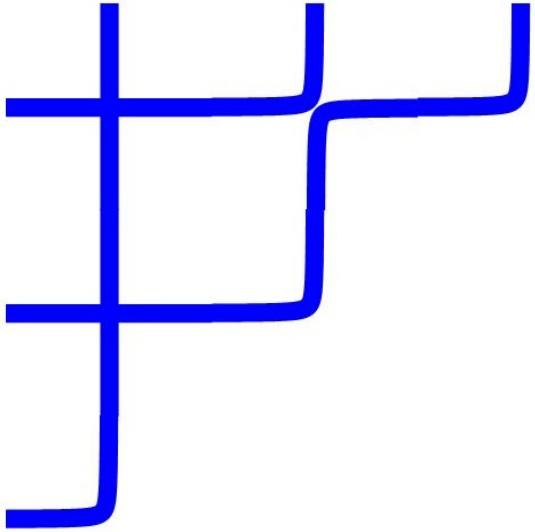
id



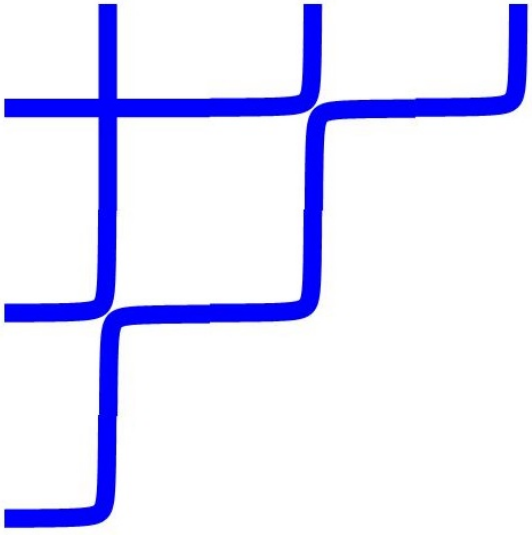
s_1



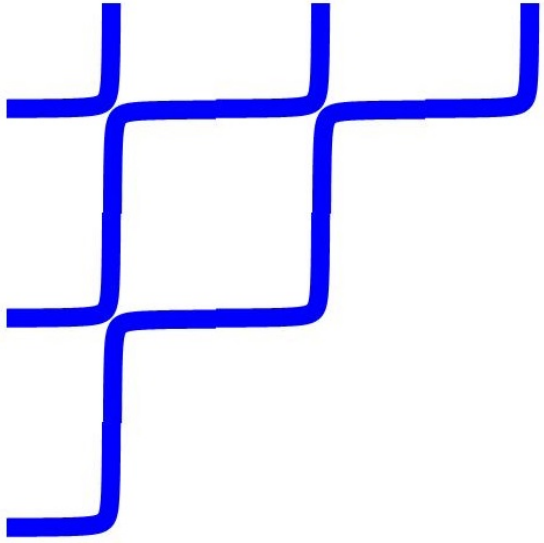
s_2



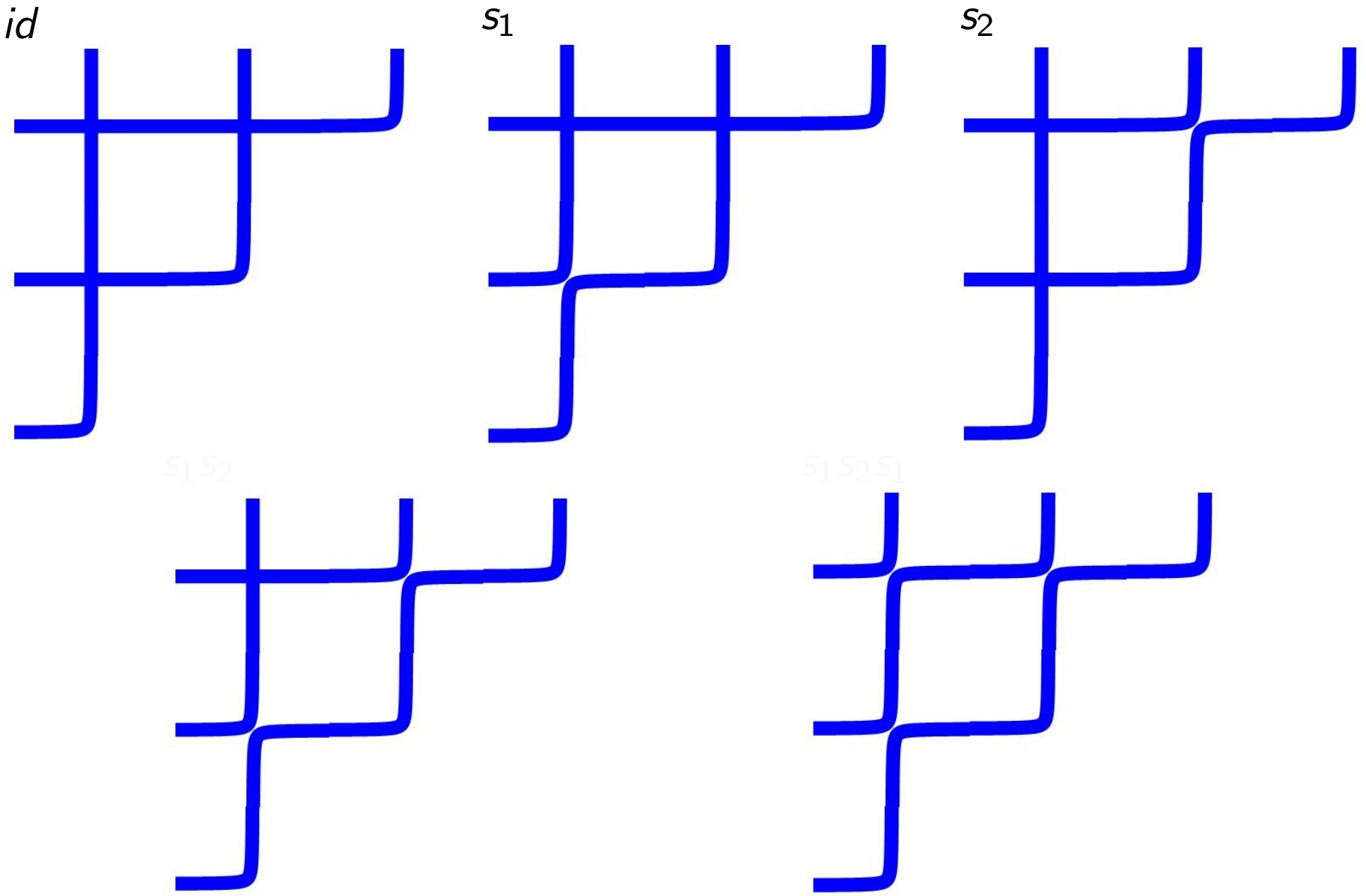
$s_1 s_2$



$s_1 s_2 s_1$

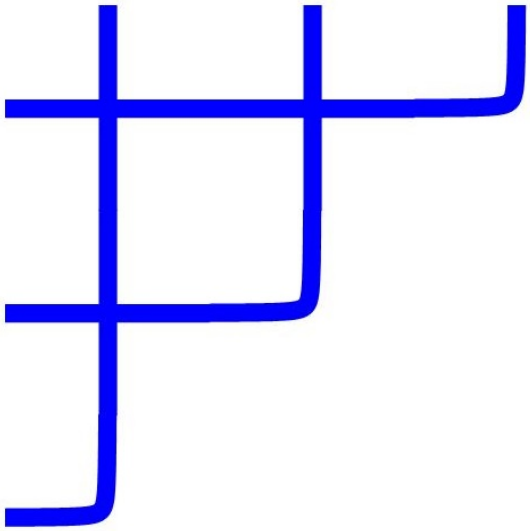


Теорема Кириллова–Фомина

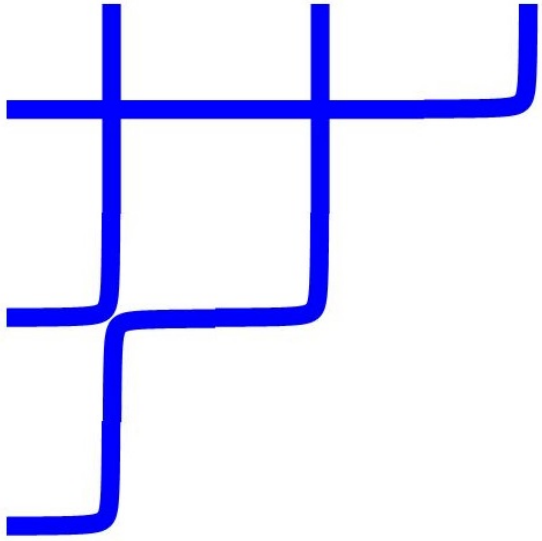


Теорема Кириллова–Фомина

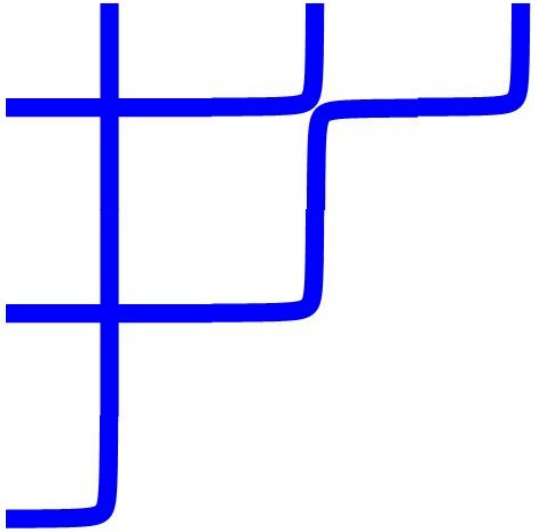
id



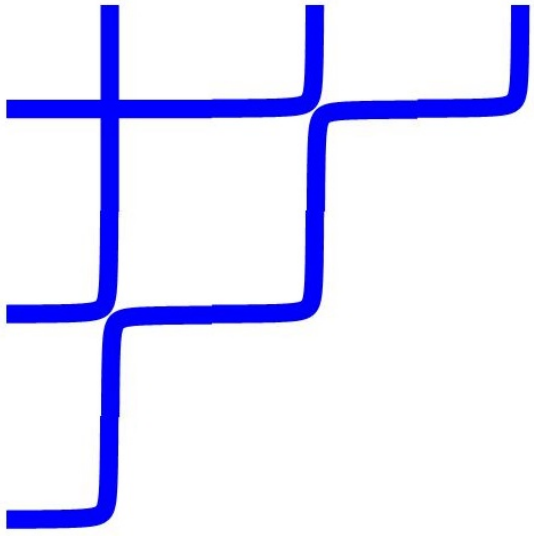
s_1



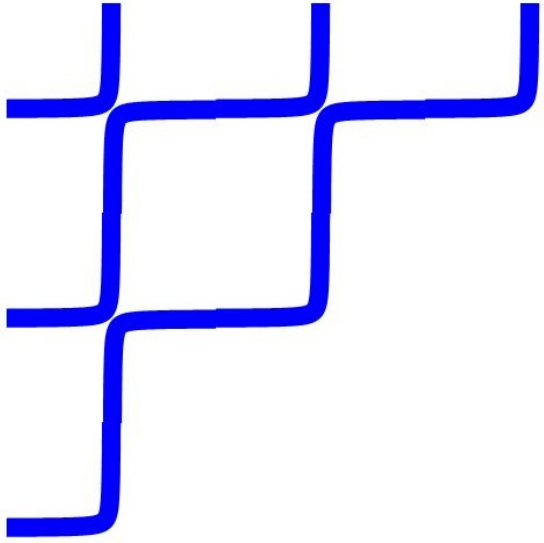
s_2



$s_1 s_2$

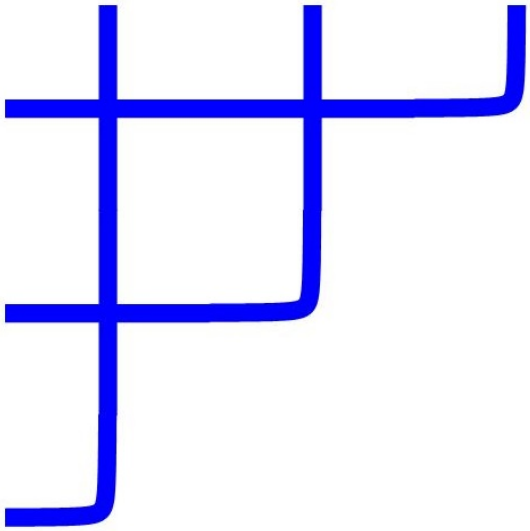


$s_1 s_2 s_1$

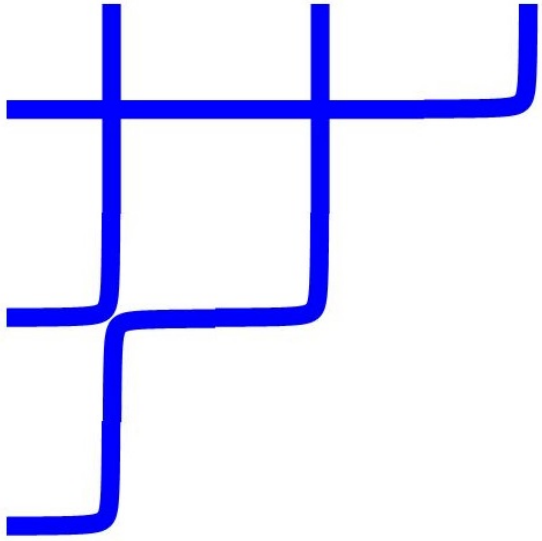


Теорема Кириллова–Фомина

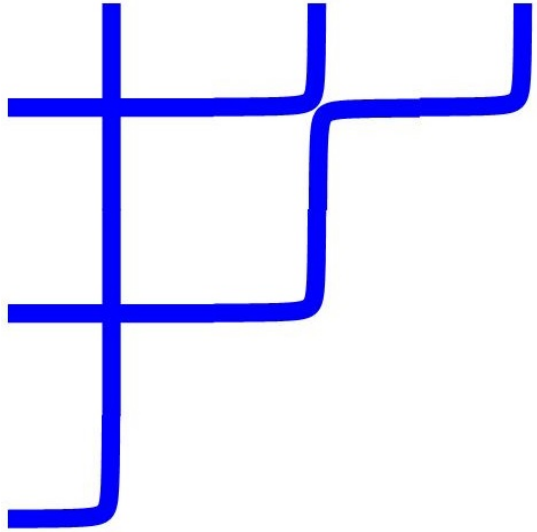
id



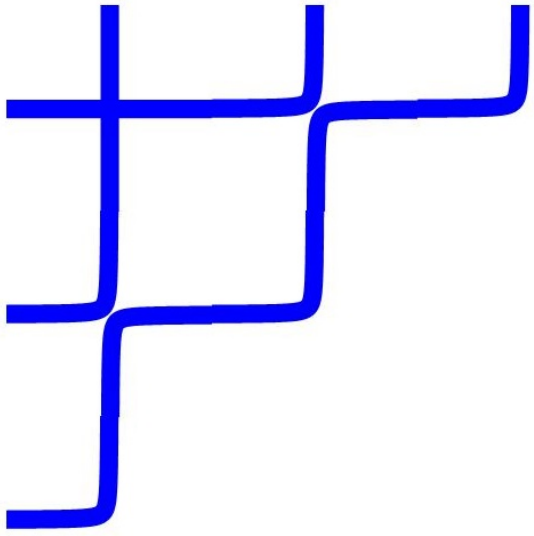
s_1



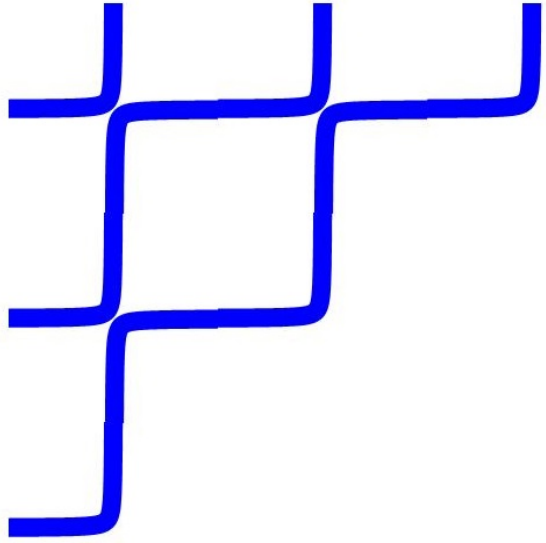
s_2



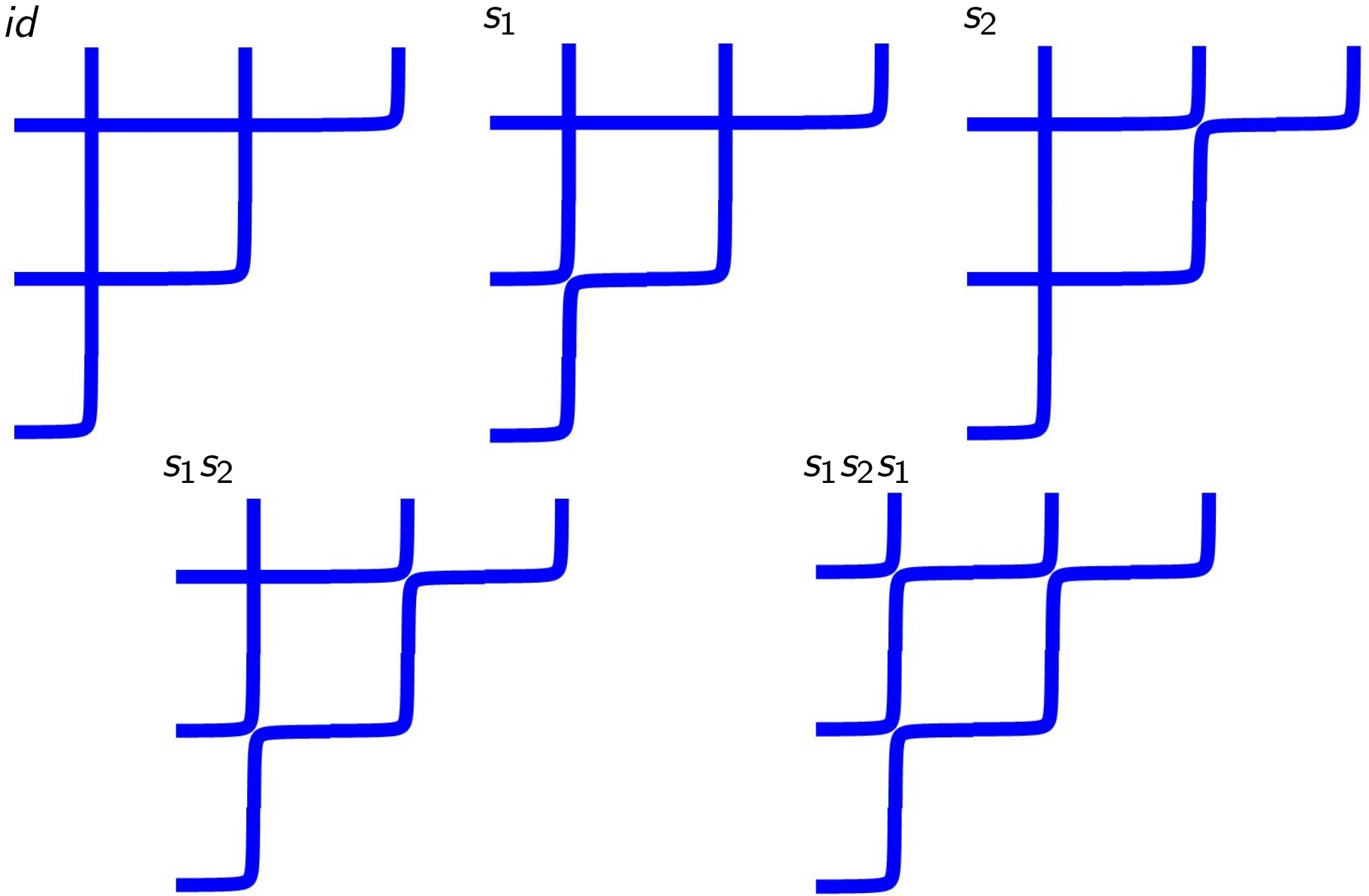
$s_1 s_2$



$s_1 s_2 s_1$



Теорема Кириллова–Фомина



Теорема Кириллова–Фомина

Пример $n = 4,\ w = s_3 s_2 s_1$

$$\mathfrak{S}_w = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_2 x_3 + x_2^2 x_3$$

Упражнение

Проверьте теорему Кириллова–Фомина для этого примера.

Теорема Кириллова–Фомина

Пример $n = 4,\ w = s_3 s_2 s_1$

$$\mathfrak{S}_w = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_2 x_3 + x_2^2 x_3$$

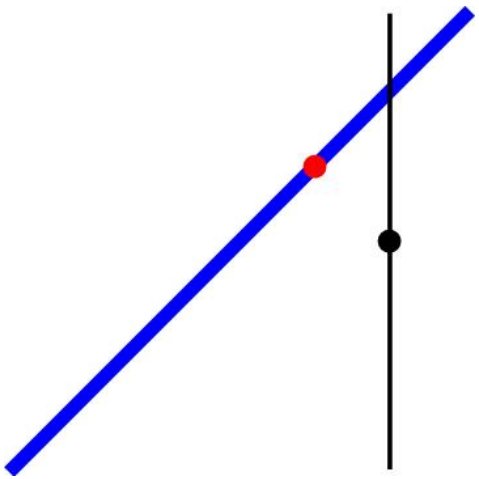
Упражнение

Проверьте теорему Кириллова–Фомина для этого примера.

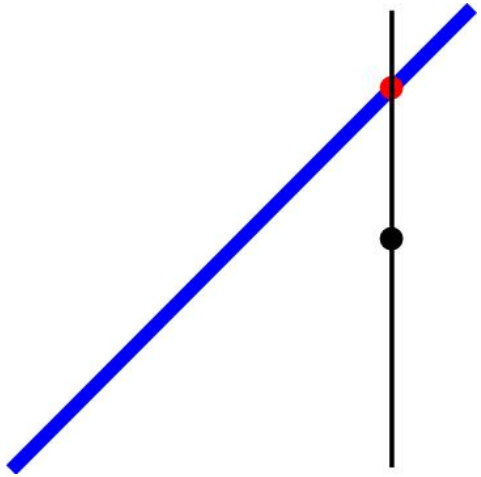
Исчислительная геометрия

Задача о флагах

Сколько флагов на плоскости находятся в необщем положении с тремя данными флагами?



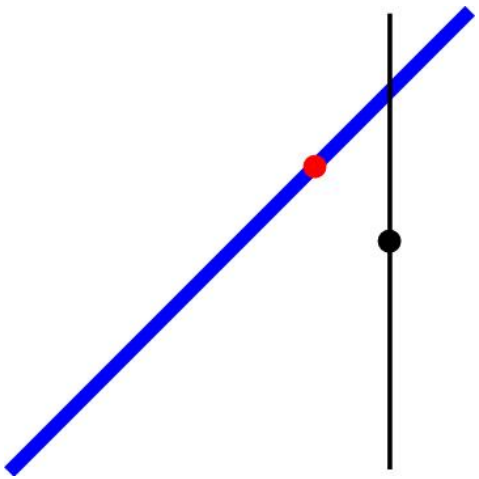
Два флага в общем положении.



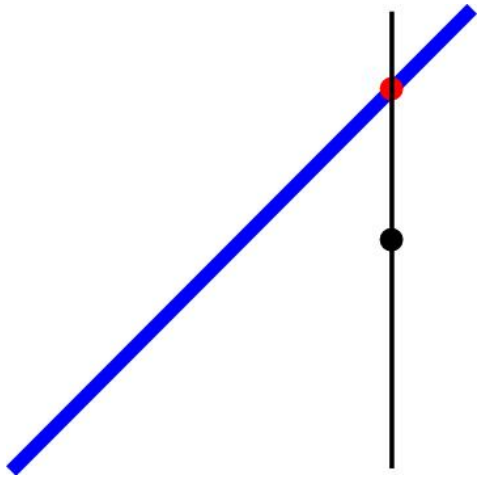
Два флага в необщем положении.

Задача о флагах

Сколько флагов на плоскости находятся в необщем положении с тремя данными флагами?



Два флага в общем положении.

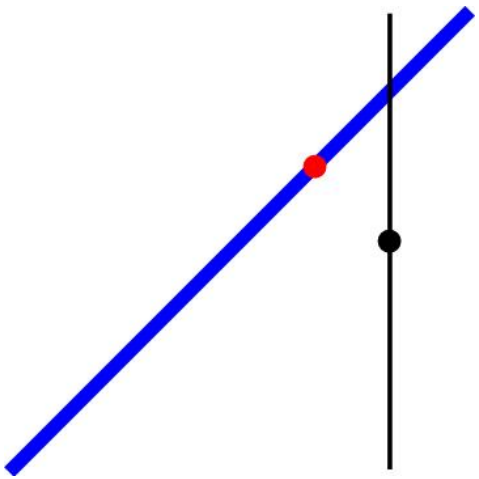


Два флага в необщем положении.

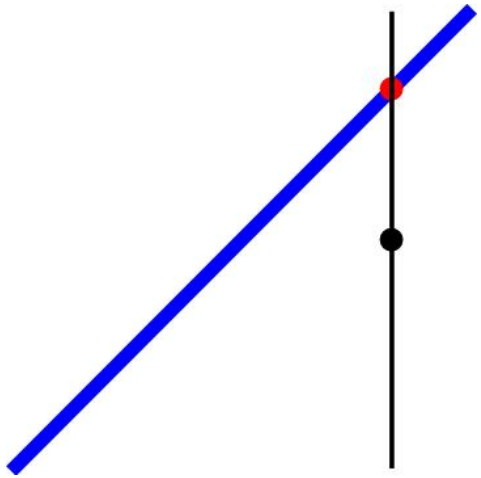
Исчислительная геометрия

Задача о флагах

Сколько флагов на плоскости находятся в необщем положении с тремя данными флагами?



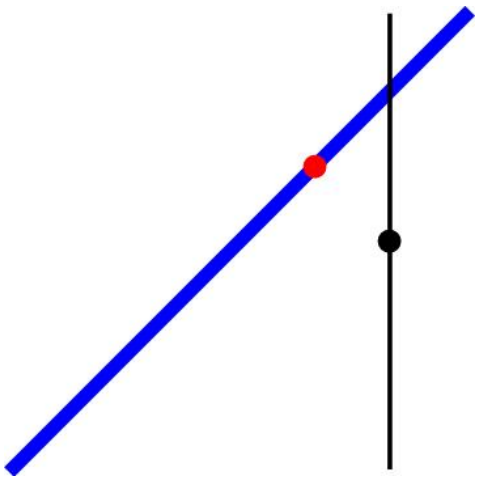
Два флага в общем положении.



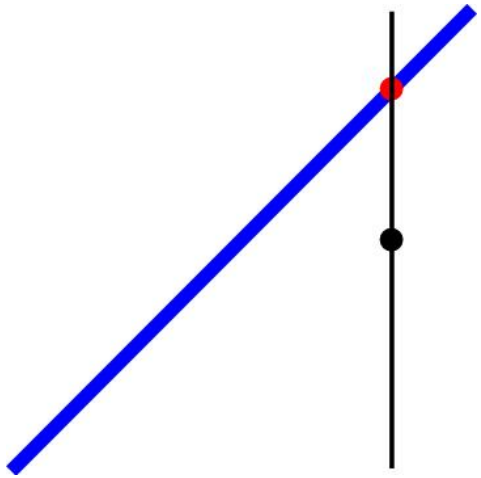
Два флага в необщем положении.

Задача о флагах

Сколько флагов на плоскости находятся в необщем положении с тремя данными флагами?

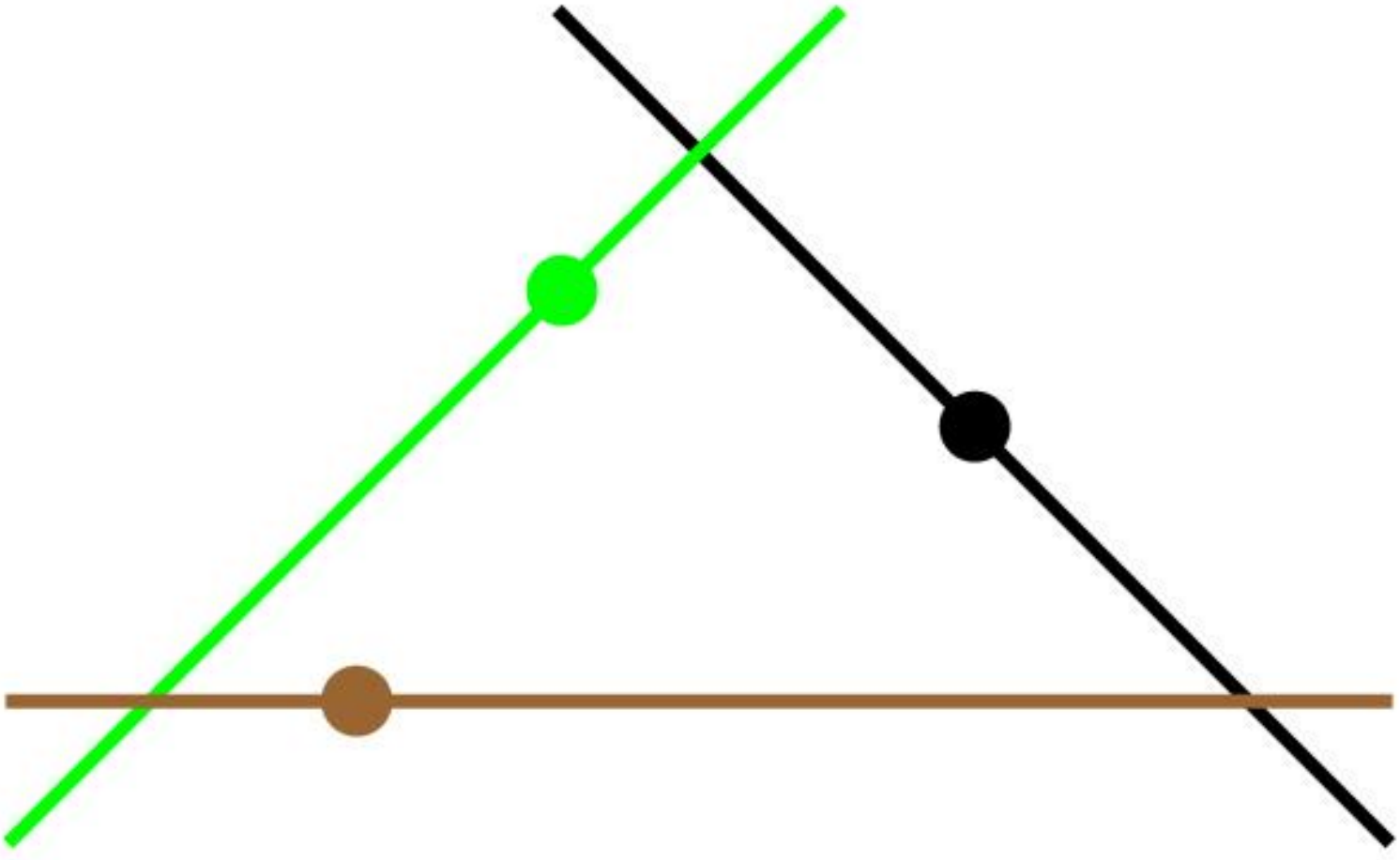


Два флага в общем положении.

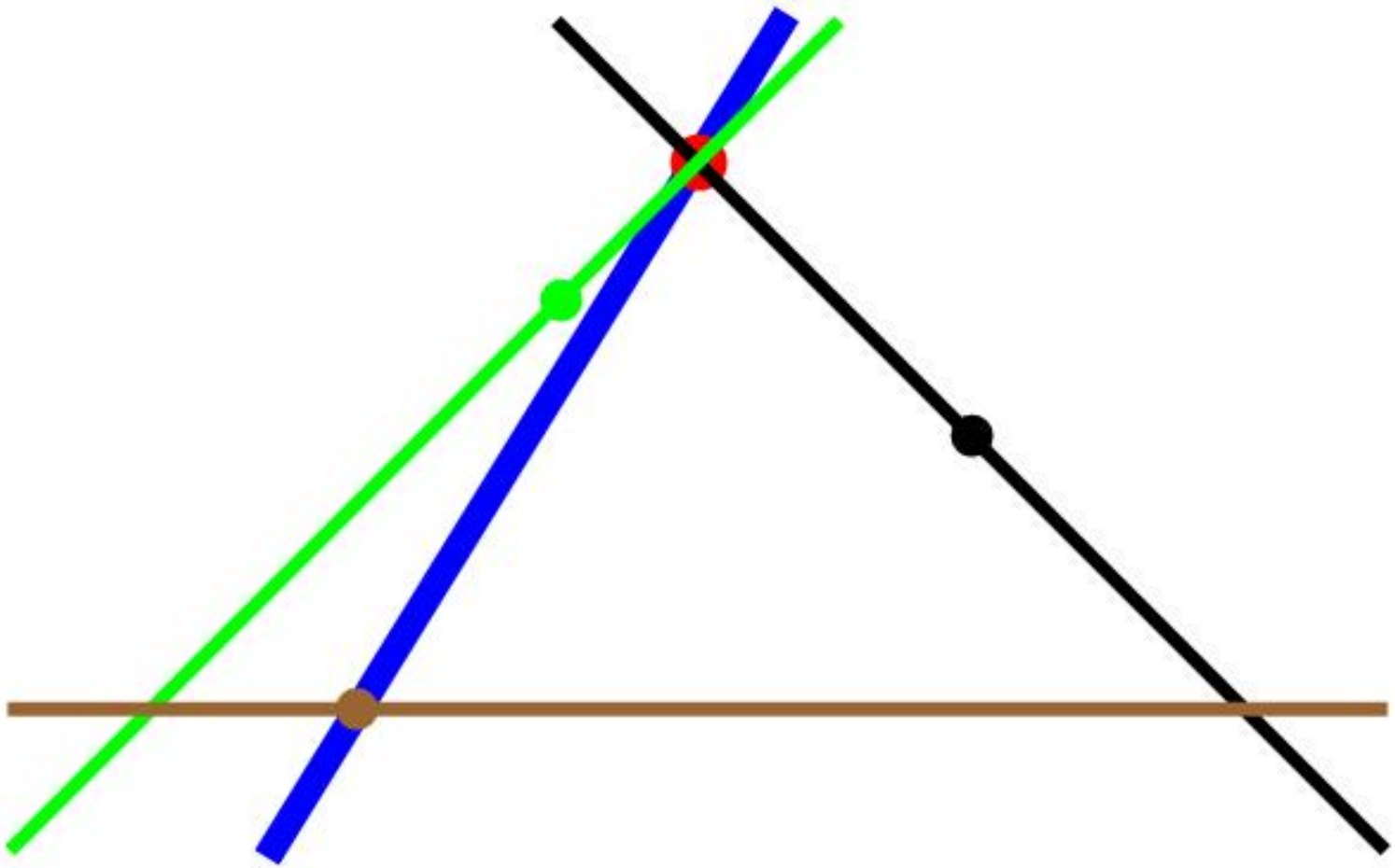


Два флага в необщем положении.

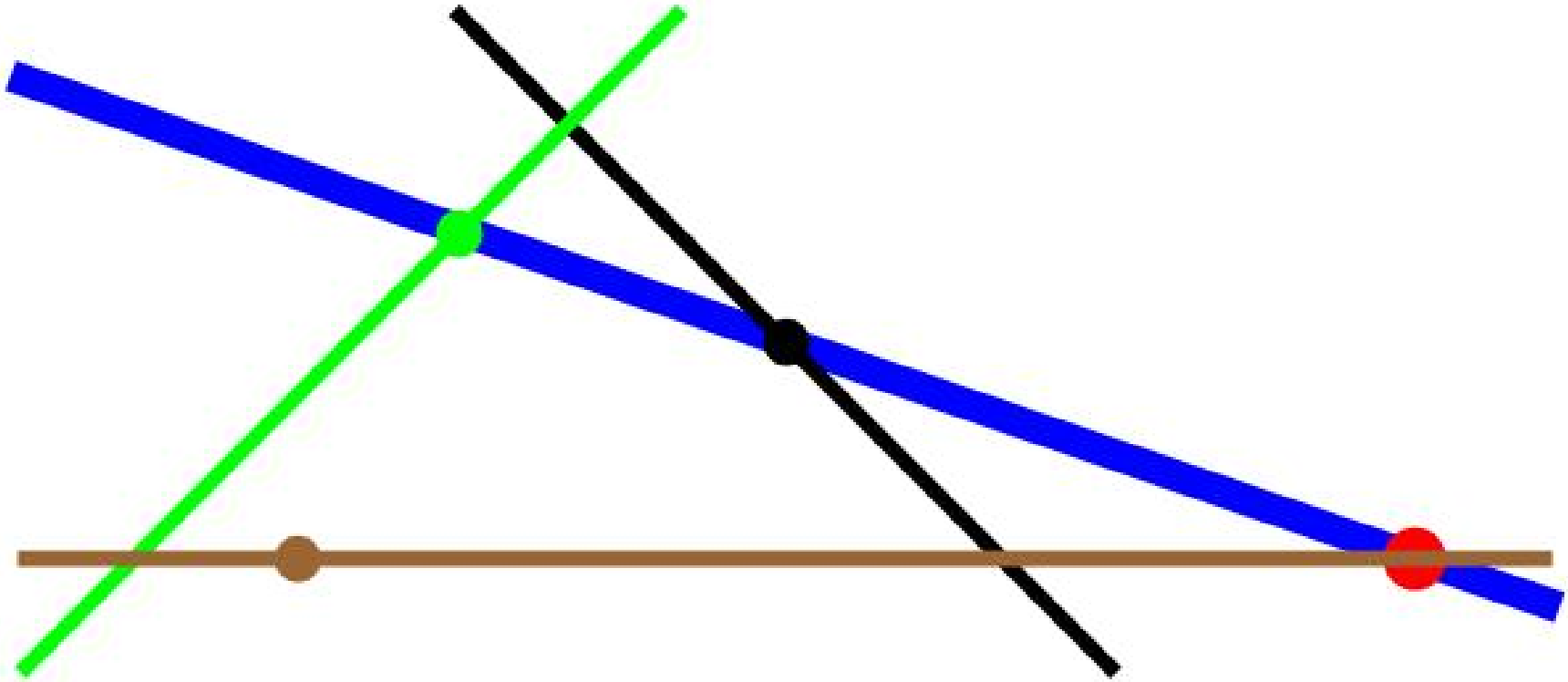
Исчислительная геометрия



Три флага на плоскости

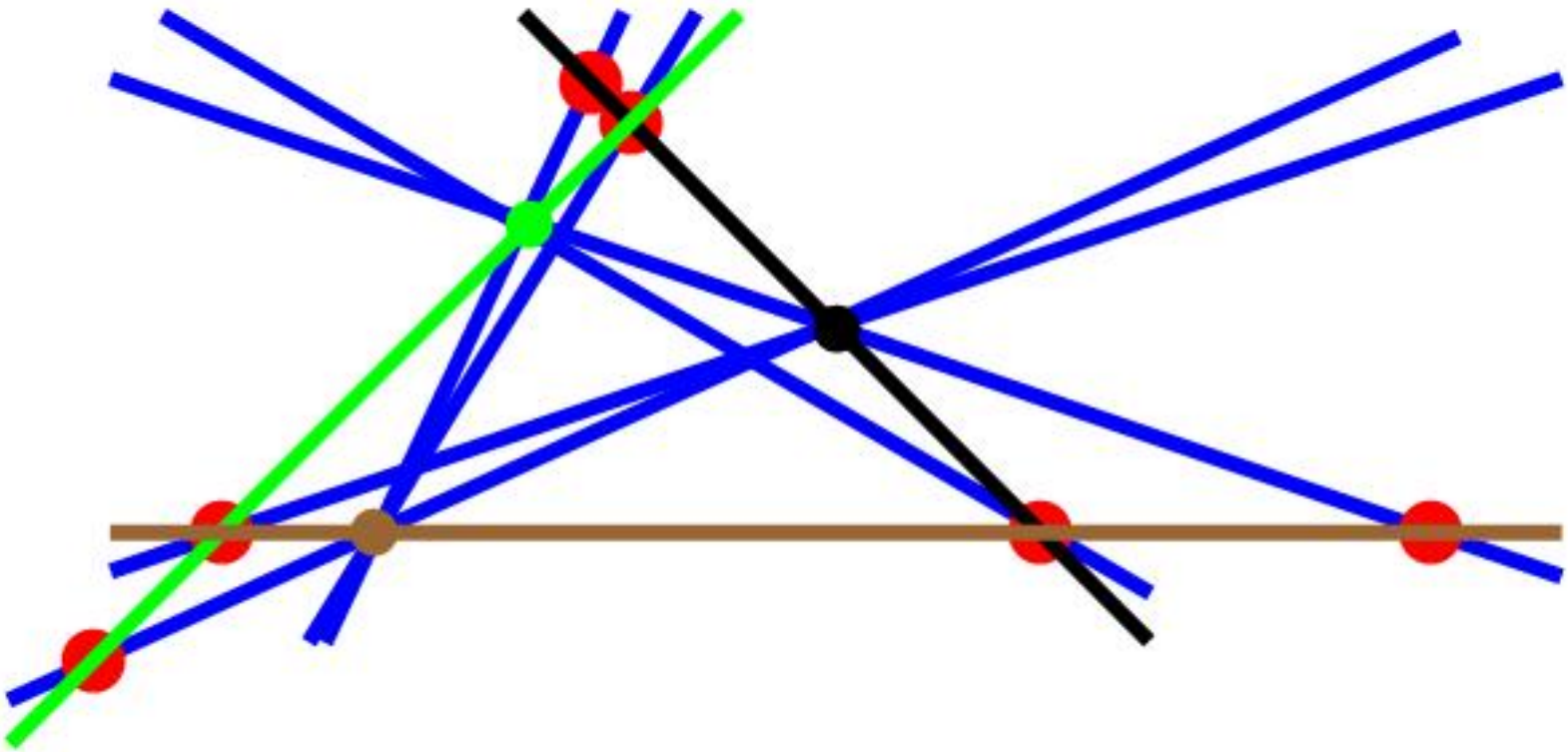


Флаг в необщем положении с тремя данными: первый вариант.



Флаг в необщем положении с тремя данными: второй вариант.

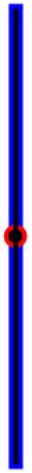
Исчислительная геометрия



Все флаги в необщем положении с тремя данными. Ответ: 6.

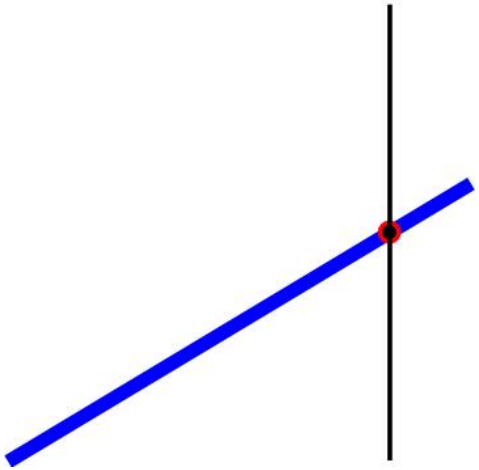
Многочлены Шуберта и исчислительная геометрия

$x_1^2 x_2$

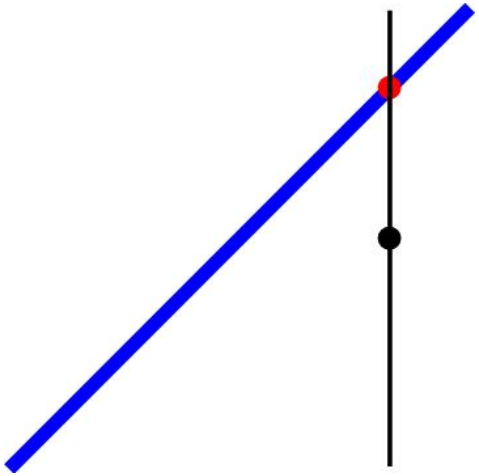


$x_1 x_2$

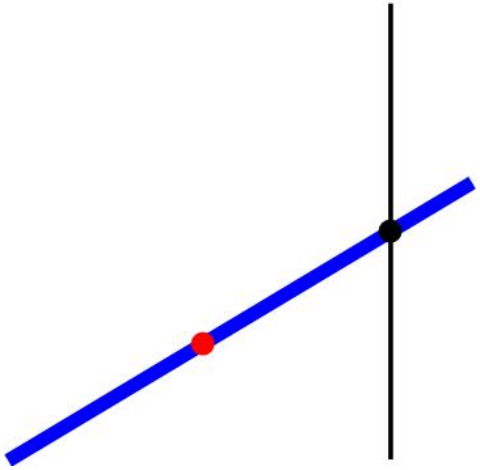
x_1^2



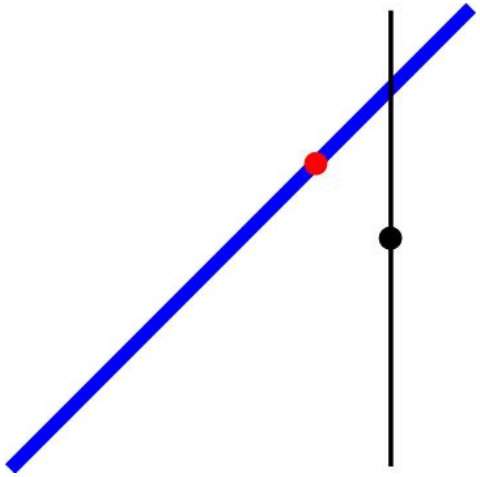
x_1



$x_1 + x_2$

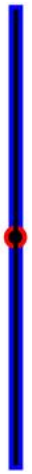


1



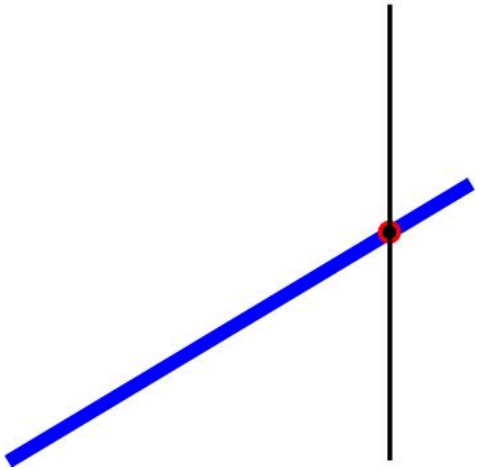
Многочлены Шуберта и исчислительная геометрия

$x_1^2 x_2$

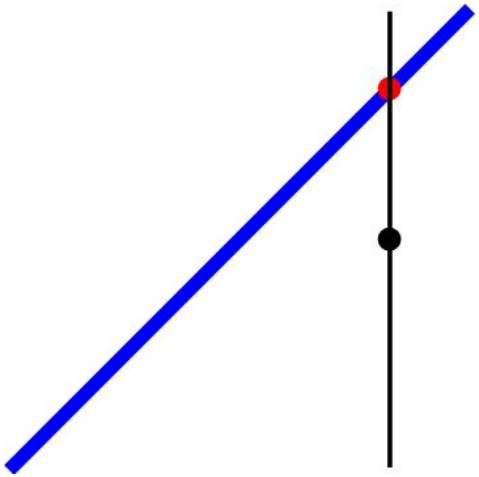


$x_1 x_2$

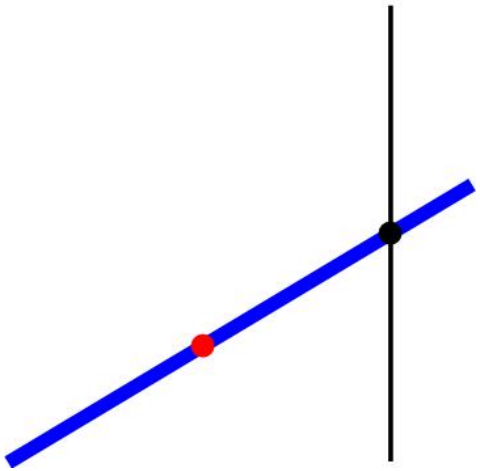
x_1^2



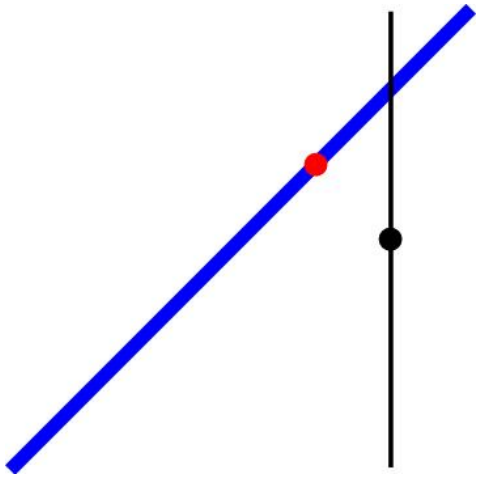
x_1



$x_1 + x_2$

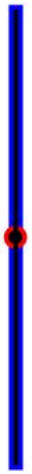


1



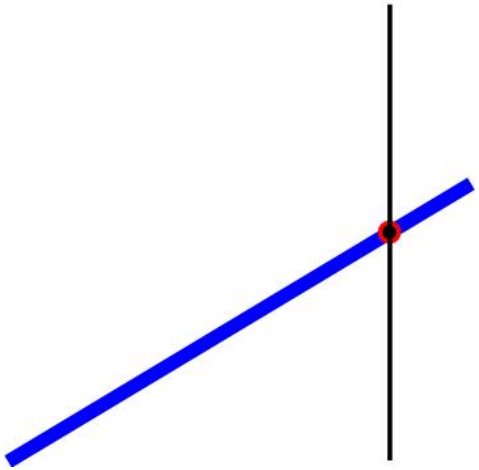
Многочлены Шуберта и исчислительная геометрия

$x_1^2 x_2$

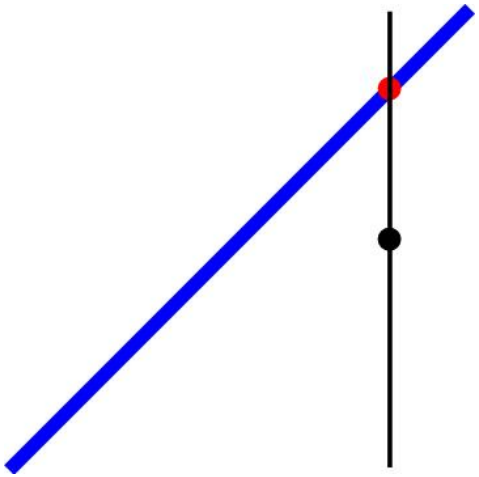


$x_1 x_2$

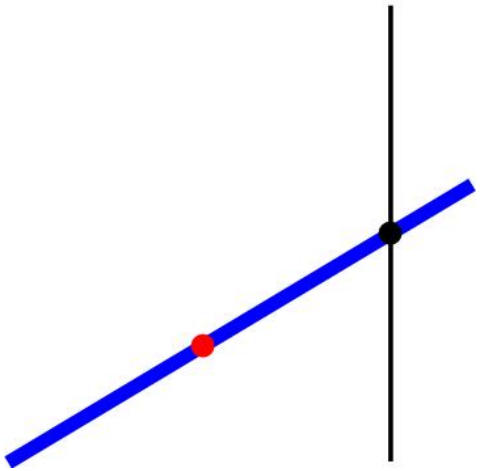
x_1^2



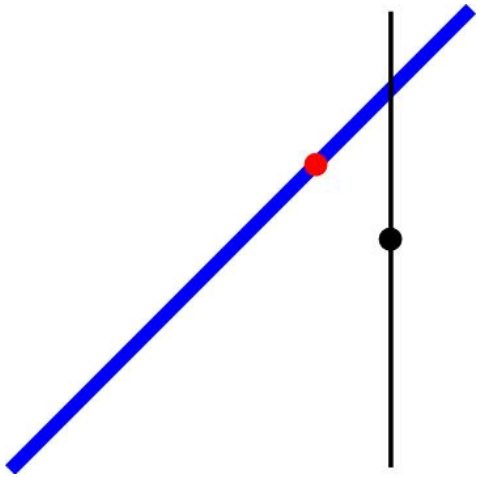
x_1



$x_1 + x_2$

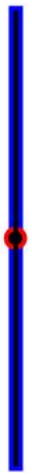


1



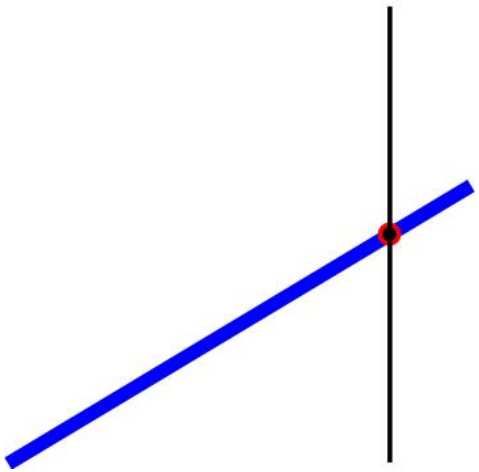
Многочлены Шуберта и исчислительная геометрия

$x_1^2 x_2$

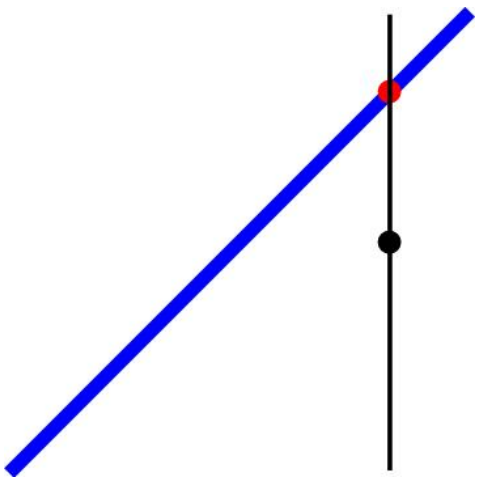


$x_1 x_2$

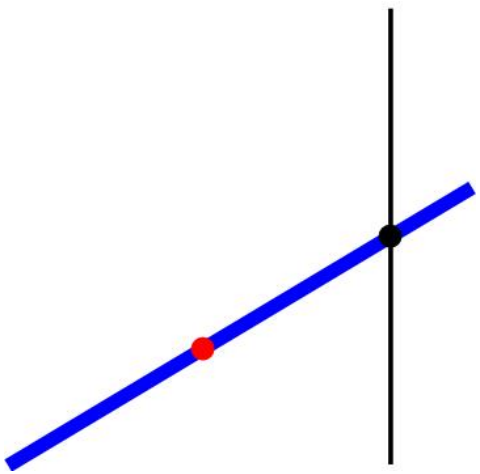
x_1^2



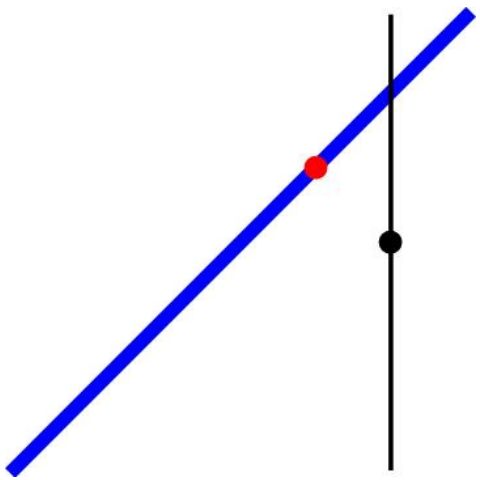
x_1



$x_1 + x_2$

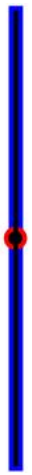


1



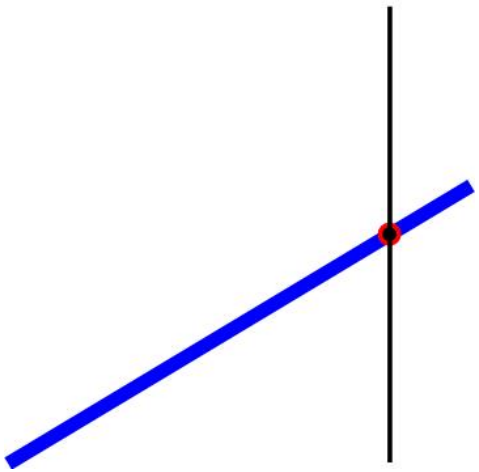
Многочлены Шуберта и исчислительная геометрия

$x_1^2 x_2$

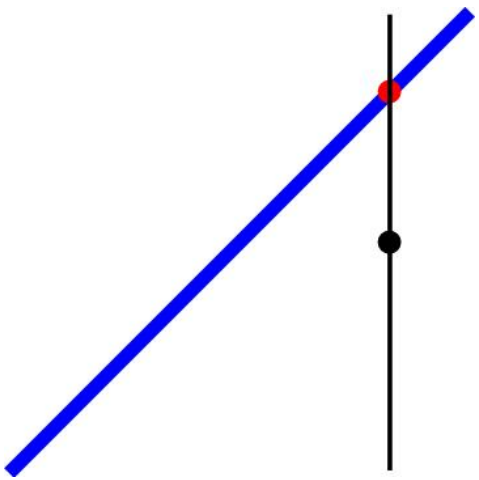


$x_1 x_2$

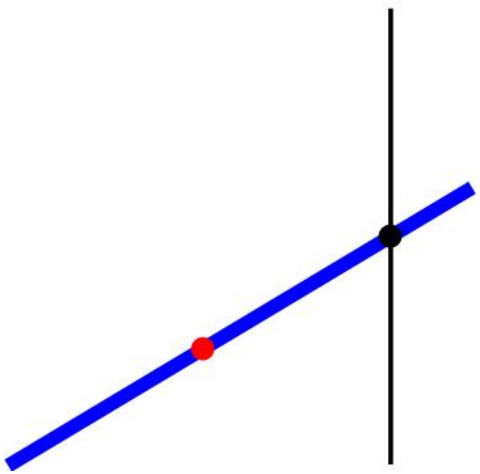
x_1^2



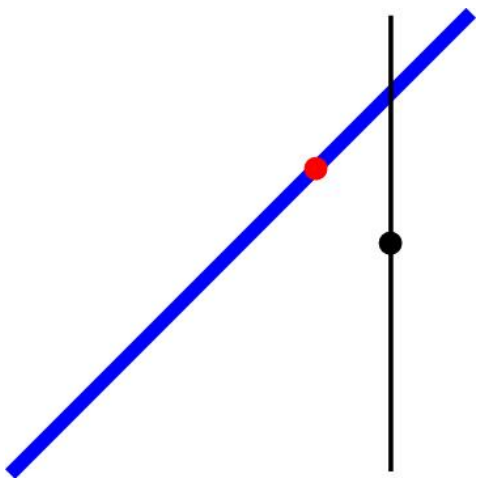
x_1



$x_1 + x_2$

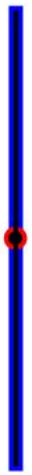


1



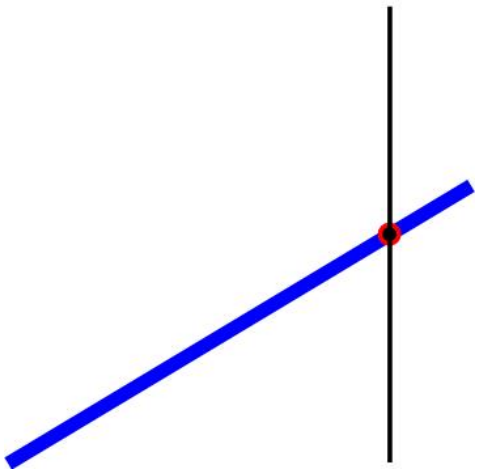
Многочлены Шуберта и исчислительная геометрия

$x_1^2 x_2$

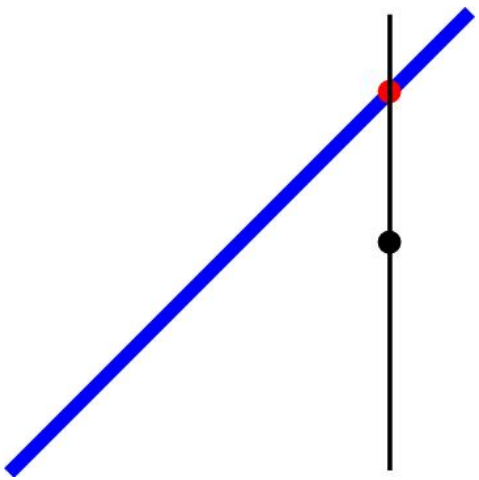


$x_1 x_2$

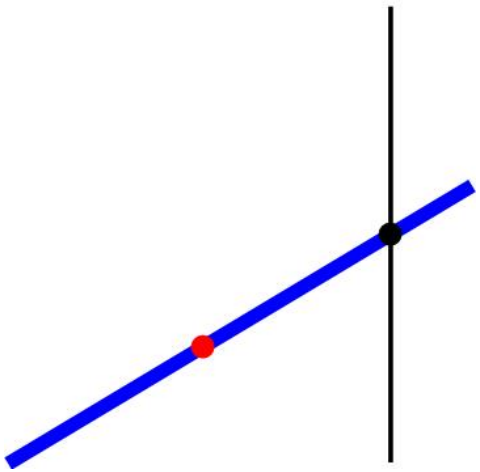
x_1^2



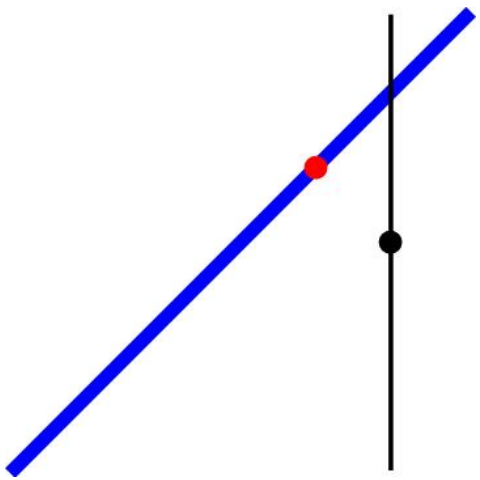
x_1



$x_1 + x_2$

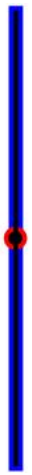


1



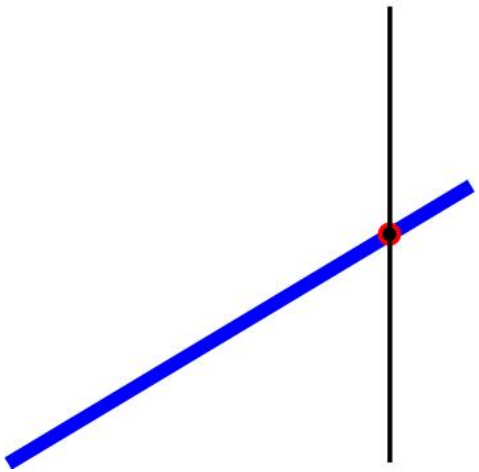
Многочлены Шуберта и исчислительная геометрия

$x_1^2 x_2$

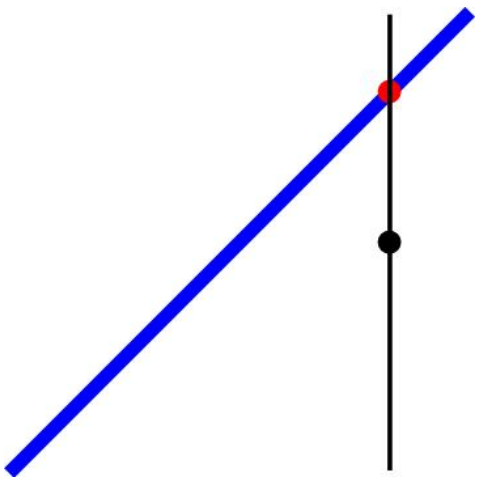


$x_1 x_2$

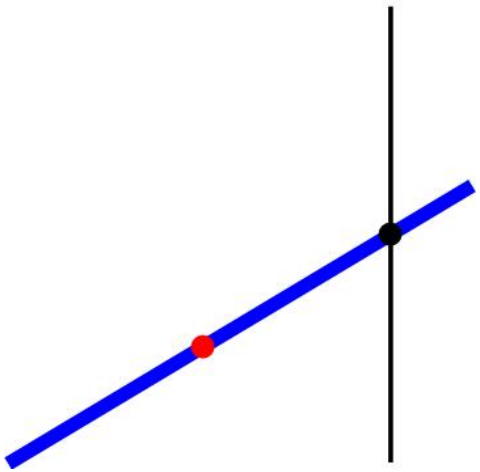
x_1^2



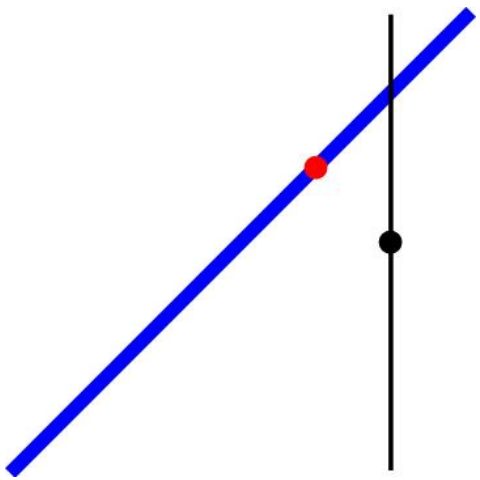
x_1



$x_1 + x_2$

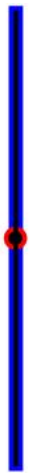


1



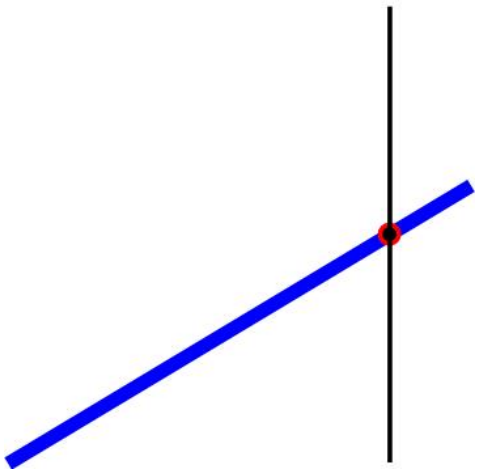
Многочлены Шуберта и исчислительная геометрия

$x_1^2 x_2$

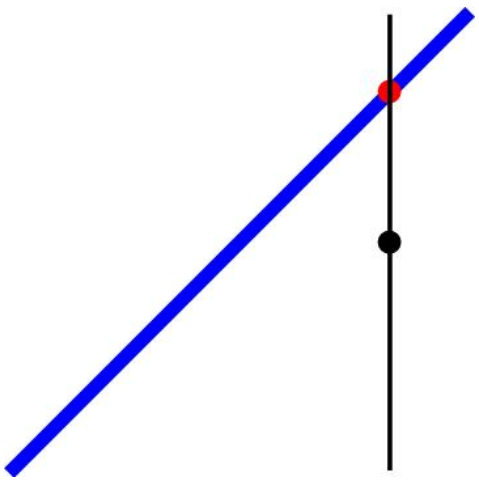


$x_1 x_2$

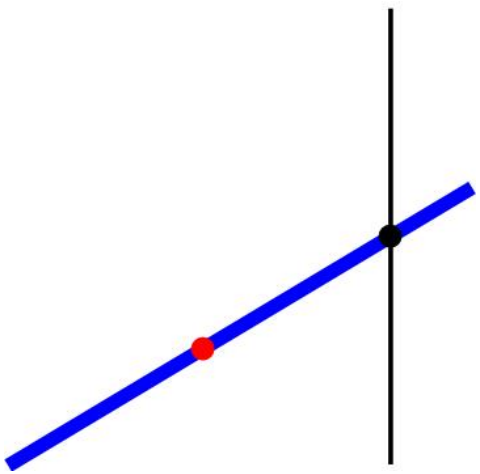
x_1^2



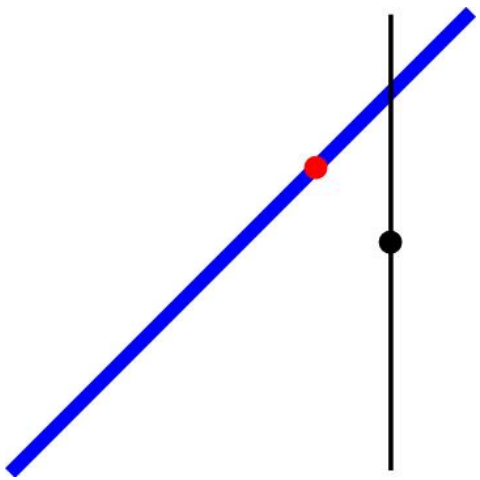
x_1



$x_1 + x_2$

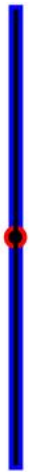


1



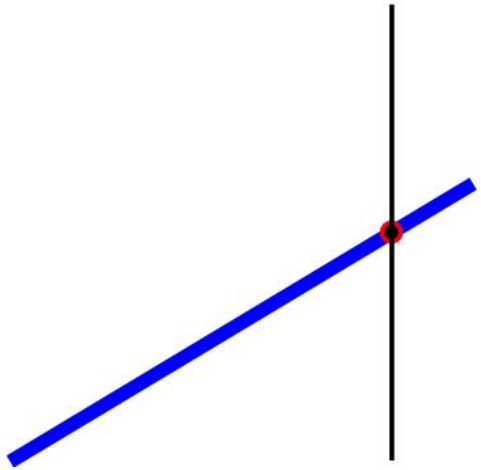
Многочлены Шуберта и исчислительная геометрия

$x_1^2 x_2$

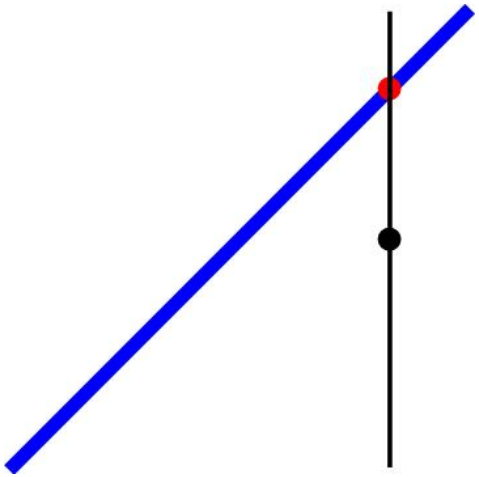


$x_1 x_2$

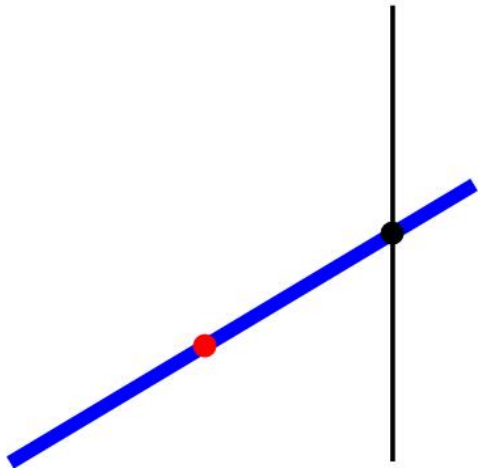
x_1^2



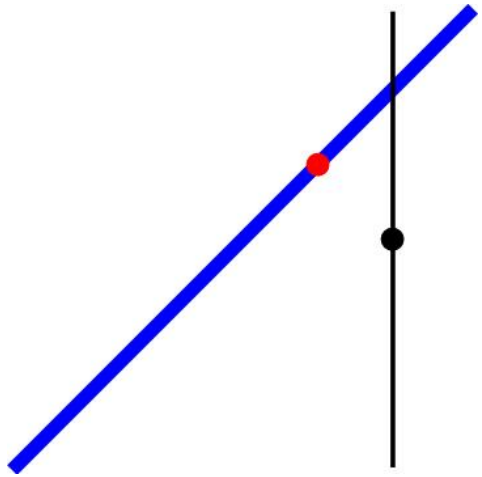
x_1



$x_1 + x_2$

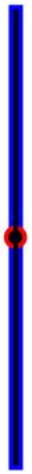


1



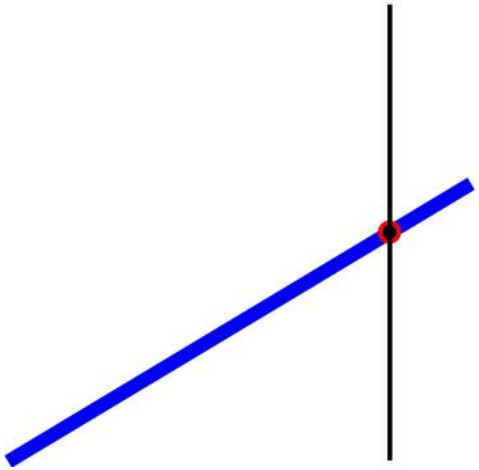
Многочлены Шуберта и исчислительная геометрия

$x_1^2 x_2$

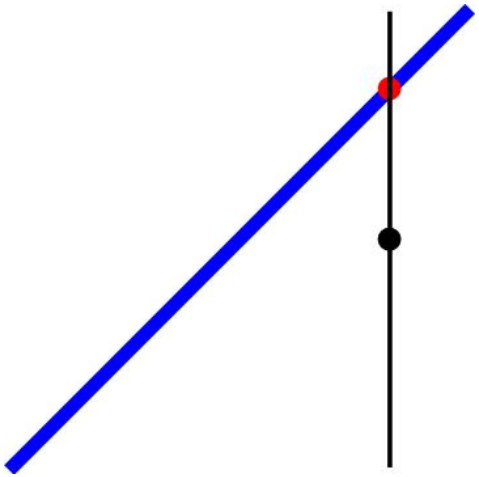


$x_1 x_2$

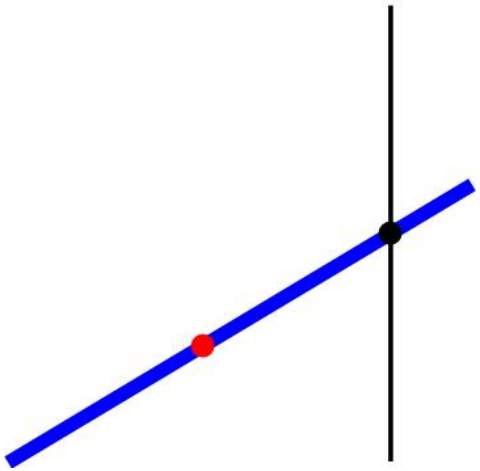
x_1^2



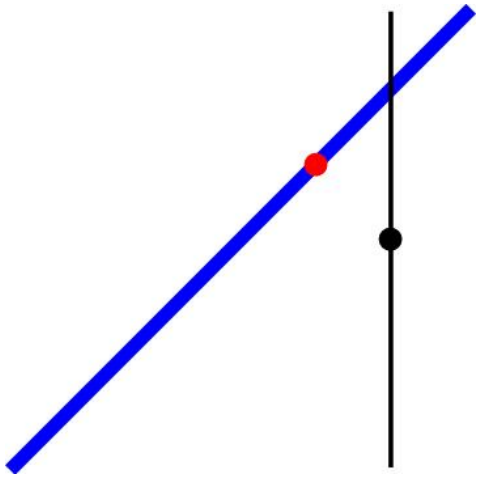
x_1



$x_1 + x_2$

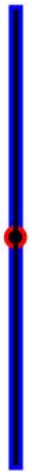


1



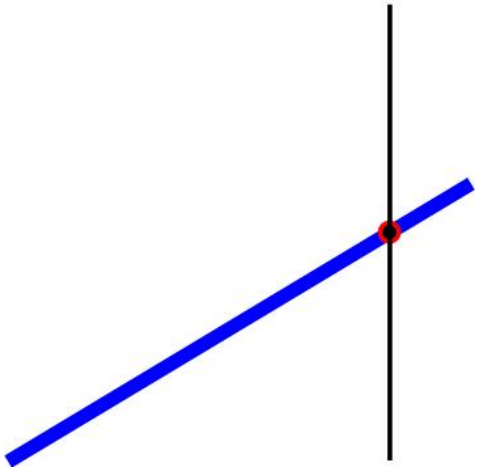
Многочлены Шуберта и исчислительная геометрия

$x_1^2 x_2$

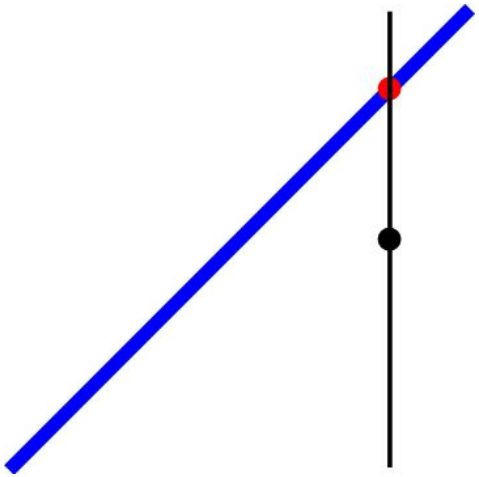


$x_1 x_2$

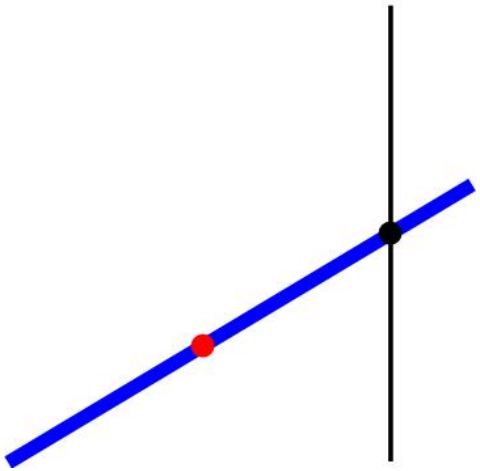
x_1^2



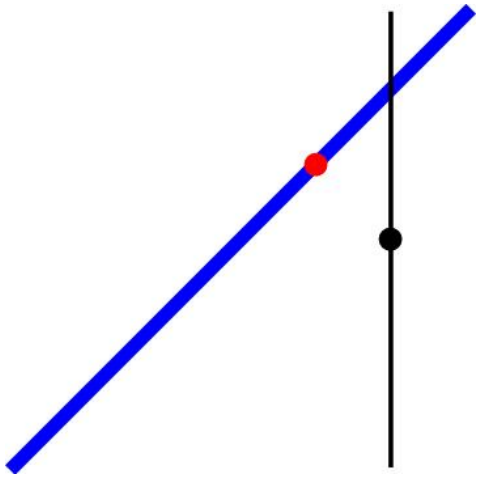
x_1



$x_1 + x_2$

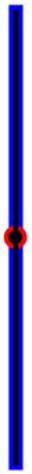


1



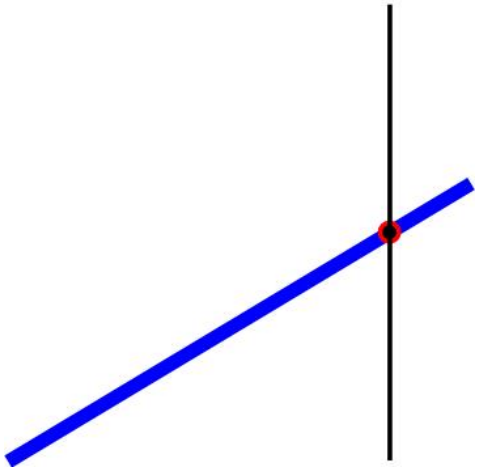
Многочлены Шуберта и исчислительная геометрия

$x_1^2 x_2$

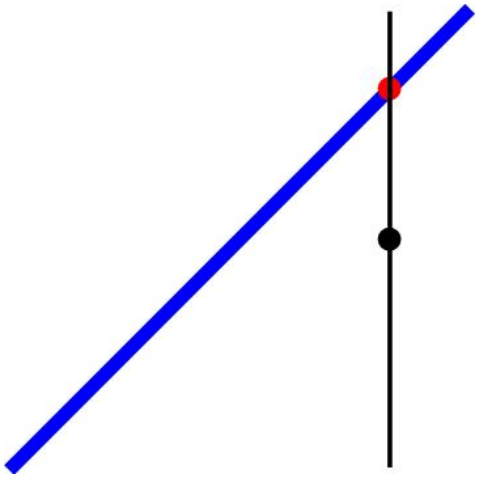


$x_1 x_2$

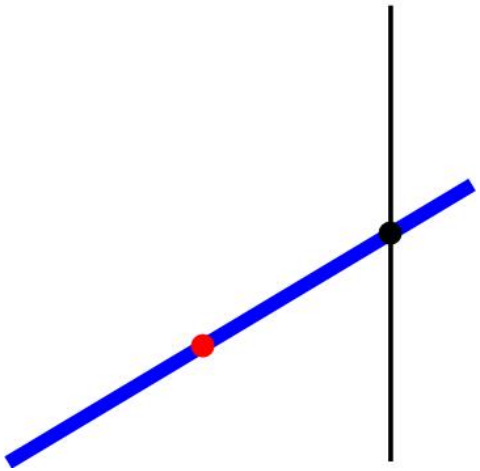
x_1^2



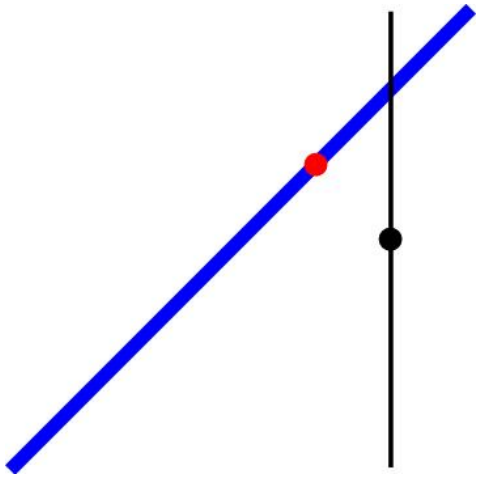
x_1



$x_1 + x_2$

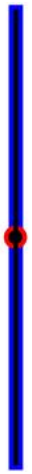


1



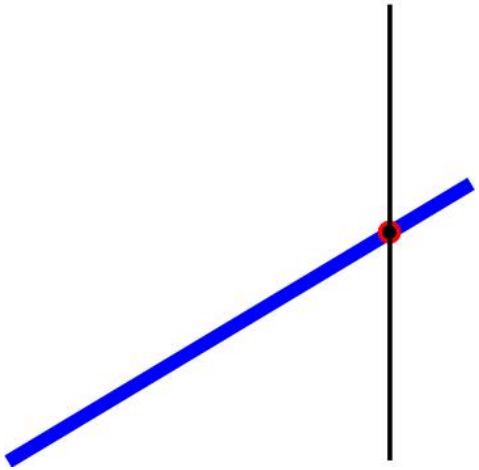
Многочлены Шуберта и исчислительная геометрия

$x_1^2 x_2$

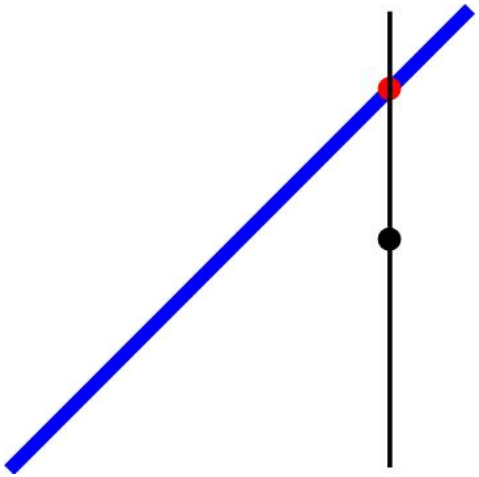


$x_1 x_2$

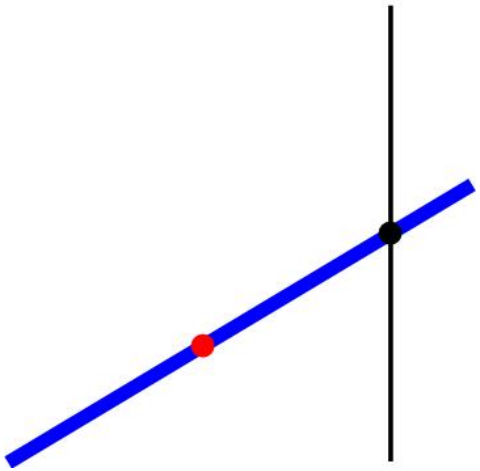
x_1^2



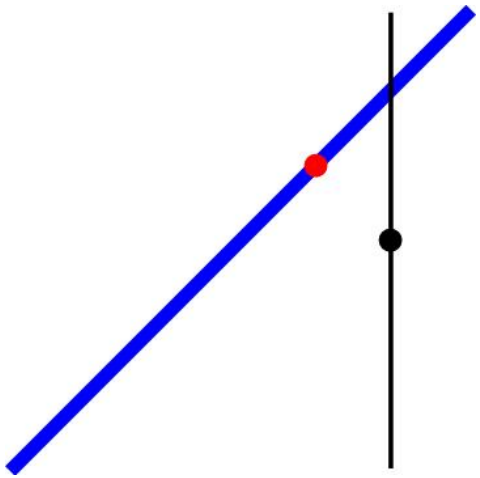
x_1



$x_1 + x_2$

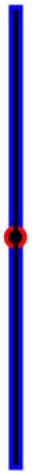


1



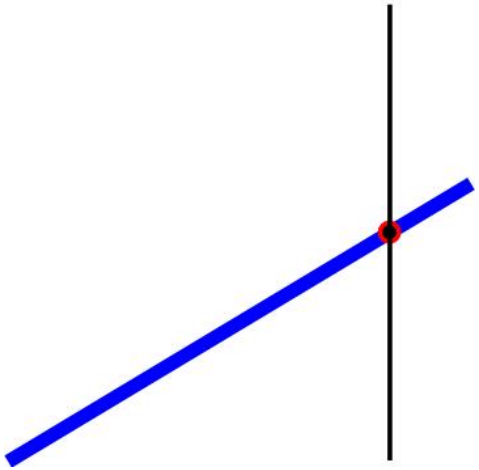
Многочлены Шуберта и исчислительная геометрия

$x_1^2 x_2$

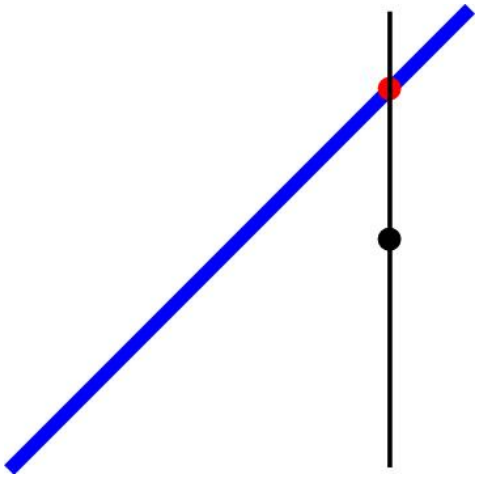


$x_1 x_2$

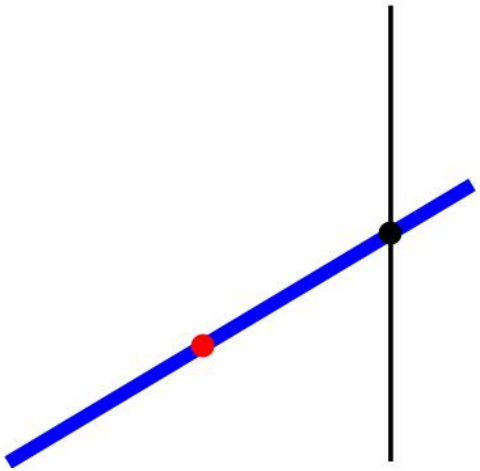
x_1^2



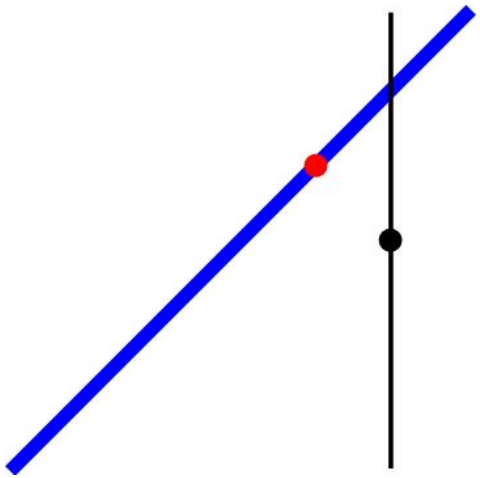
x_1



$x_1 + x_2$



1



Исчисление условий (исчисление Шуберта)

Сложение условий на флаг

$\sigma_1 + \sigma_2 = (\sigma_1$ или $\sigma_2)$ — *дизъюнкция*

Умножение условий

$\sigma_1 \cdot \sigma_2 = (\sigma_1$ и $\sigma_2)$ — *конъюнкция*

Пример

Пусть $a_0 \in l_0$ — фиксированный флаг, $a \in l$ — произвольный флаг.

$\sigma_1 = \{a \in l_0\}$

$\sigma_2 = \{a_0 \in l\}$

$\sigma_1 + \sigma_2$=условие, что флаги $a_0 \in l_0$ и $a \in l$ находятся в необщем положении

Исчисление условий (исчисление Шуберта)

Сложение условий на флаг

$\sigma_1 + \sigma_2 = (\sigma_1$ или $\sigma_2)$ — *дизъюнкция*

Умножение условий

$\sigma_1 \cdot \sigma_2 = (\sigma_1$ и $\sigma_2)$ — *конъюнкция*

Пример

Пусть $a_0 \in l_0$ — фиксированный флаг, $a \in l$ — произвольный флаг.

$\sigma_1 = \{a \in l_0\}$

$\sigma_2 = \{a_0 \in l\}$

$\sigma_1 + \sigma_2$=условие, что флаги $a_0 \in l_0$ и $a \in l$ находятся в необщем положении

Исчисление условий (исчисление Шуберта)

Сложение условий на флаг

$\sigma_1 + \sigma_2 = (\sigma_1$ или $\sigma_2)$ — *дизъюнкция*

Умножение условий

$\sigma_1 \cdot \sigma_2 = (\sigma_1$ и $\sigma_2)$ — *конъюнкция*

Пример

Пусть $a_0 \in l_0$ — фиксированный флаг, $a \in l$ — произвольный флаг.

$\sigma_1 = \{a \in l_0\}$

$\sigma_2 = \{a_0 \in l\}$

$\sigma_1 + \sigma_2$=условие, что флаги $a_0 \in l_0$ и $a \in l$ находятся в необщем положении

Многочлены Шуберта и исчислительная геометрия

Замечательный факт

Сложение и умножение условий соответствует сложению и умножению многочленов Шуберта (по модулю соотношений на многочлены).

Задача о флагах

$(x_1+(x_1+x_2))^3 = x_1^3+3x_1^2(x_1+x_2)+3x_1(x_1+x_2)^2+(x_1+x_2)^3 =$
(число флагов в необщем положении с тремя данными точками)+
+3(число флагов в необщем положении с двумя данными точками и одной прямой)+
+3(число флагов в необщем положении с одной данной точкой и двумя прямыми)+
+(число флагов в необщем положении с тремя данными прямыми)=
$= 0+3\cdot 1+3\cdot 1+0 = 6$

Многочлены Шуберта и исчислительная геометрия

Замечательный факт

Сложение и умножение условий соответствует сложению и умножению многочленов Шуберта (по модулю соотношений на многочлены).

Задача о флагах

$(x_1+(x_1+x_2))^3 = x_1^3+3x_1^2(x_1+x_2)+3x_1(x_1+x_2)^2+(x_1+x_2)^3 =$
(число флагов в необщем положении с тремя данными точками)+
+3(число флагов в необщем положении с двумя данными точками и одной прямой)+
+3(число флагов в необщем положении с одной данной точкой и двумя прямыми)+
+(число флагов в необщем положении с тремя данными прямыми)=
$= 0+3\cdot 1+3\cdot 1+0 = 6$

Многочлены Шуберта и исчислительная геометрия

Обоснование

На флагах можно ввести структуру гладкого многообразия (*многообразие флагов*, обобщение Грассманнианов). Кольцо когомологий многообразия флагов изоморфно кольцу многочленов по модулю соотношений (*представление Бореля*). При этом изоморфизме естественные условия на флаги (*циклы Шуберта*) переходят в многочлены Шуберта. Многочлены Шуберта образуют базис в кольце когомологий, поэтому любая задача исчислительной геометрии о флагах сводится к вычислению с многочленами Шуберта.

Ещё одна задача о флагах для самостоятельного решения

Сколько флагов в трёхмерном пространстве находятся в необщем положении с шестью данными флагами?

Литература

- S. L. Kleiman and Dan Laksov, *Schubert calculus*, The American Mathematical Monthly, **79**, No. 10, (1972), pp. 1061-1082
- L. Manivel, *Fonctions symétriques, polynômes de Schubert et lieux de dégénérescence,* Société Mathématique de France, Paris, 1998.
- У. Фултон, *Таблицы Юнга и их приложения к теории представлений и геометрии*, МЦНМО, Москва, 2006