Многочлены Шуберта: флаги и водопроводные сети

В.А. Кириченко*

*Факультет математики и Лаборатория алгебраической геометрии и её приложений,
Национальный исследовательский университет Высшая Школа Экономики
и
Институт проблем передачи информации им. Харкевича РАН

3 февраля 2013 г.

Задача Шуберта

Сколько прямых проходит через четыре заданные прямые в 3-хмерном пространстве?

Ответ

2

Задача Шуберта

Сколько прямых проходит через четыре заданные прямые в 3-хмерном пространстве?

Ответ

2

Исчислительная геометрия

Цель

Нас интересуют только те конфигурации, для которых ответ — максимальный конечный. Его и нужно найти.

Мотивировка

В задачах *комплексной* исчислительной геометрии *почти все* конфигурации дают максимальный конечный ответ.

Исчислительная геометрия

Цель

Нас интересуют только те конфигурации, для которых ответ — максимальный конечный. Его и нужно найти.

Мотивировка

В задачах *комплексной* исчислительной геометрии *почти все* конфигурации дают максимальный конечный ответ.

Исчислительная геометрия

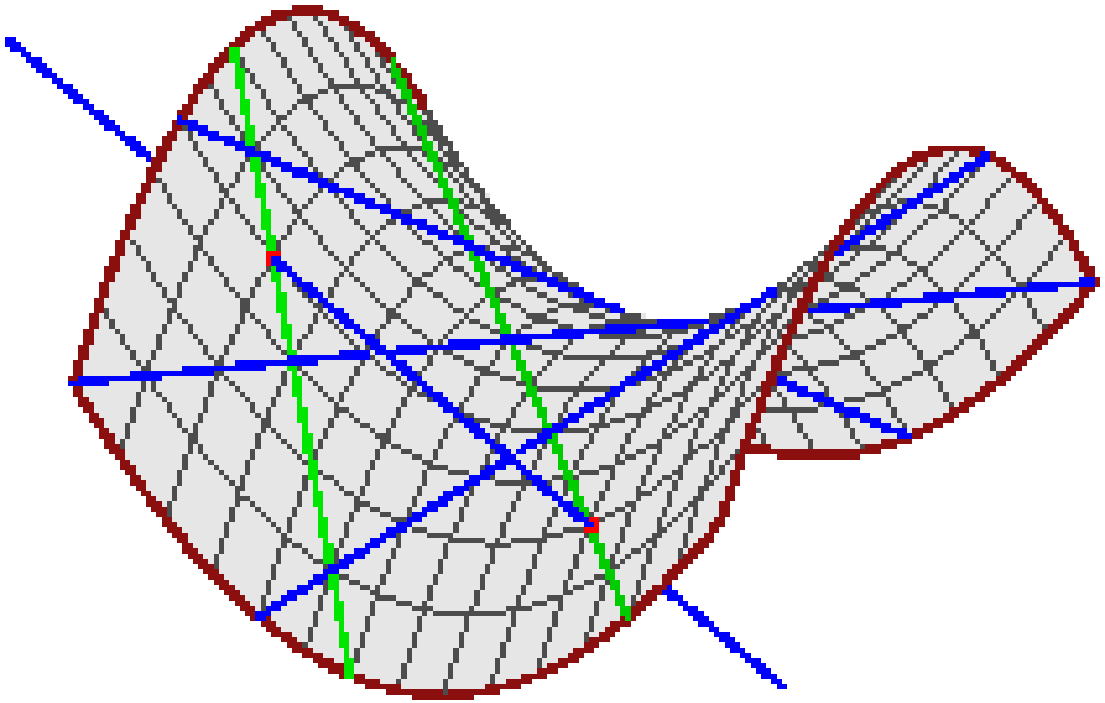


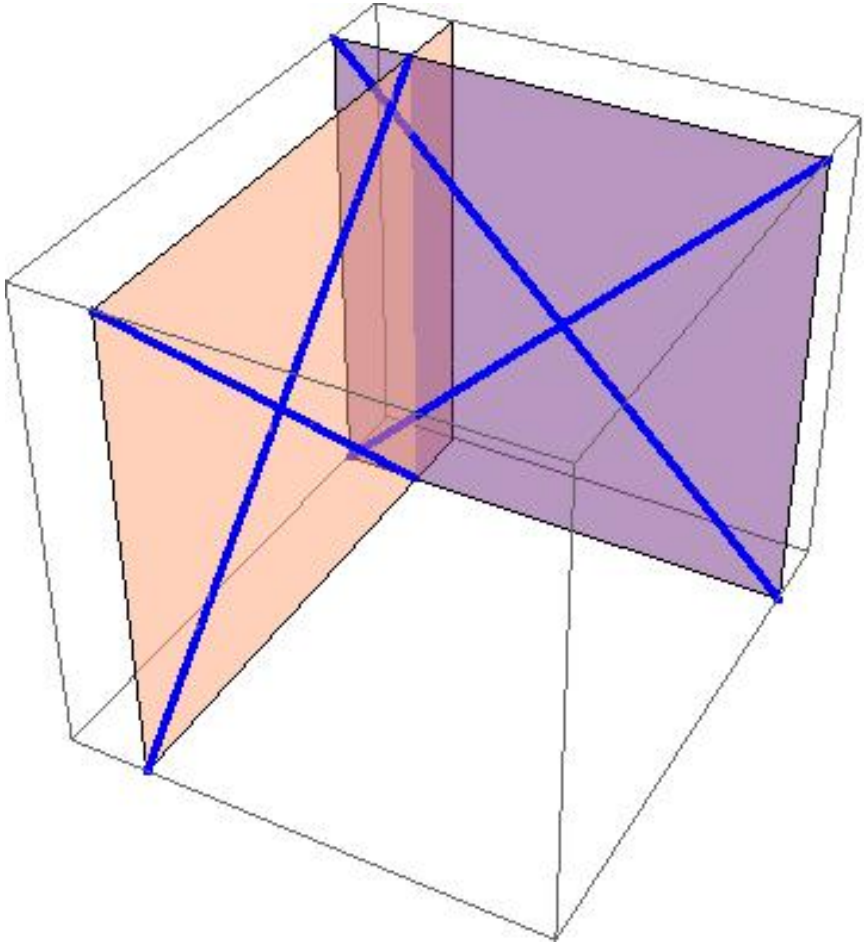
Рисунок Frank Sottile

http://www.math.tamu.edu/ sottile/research/stories/connections.html

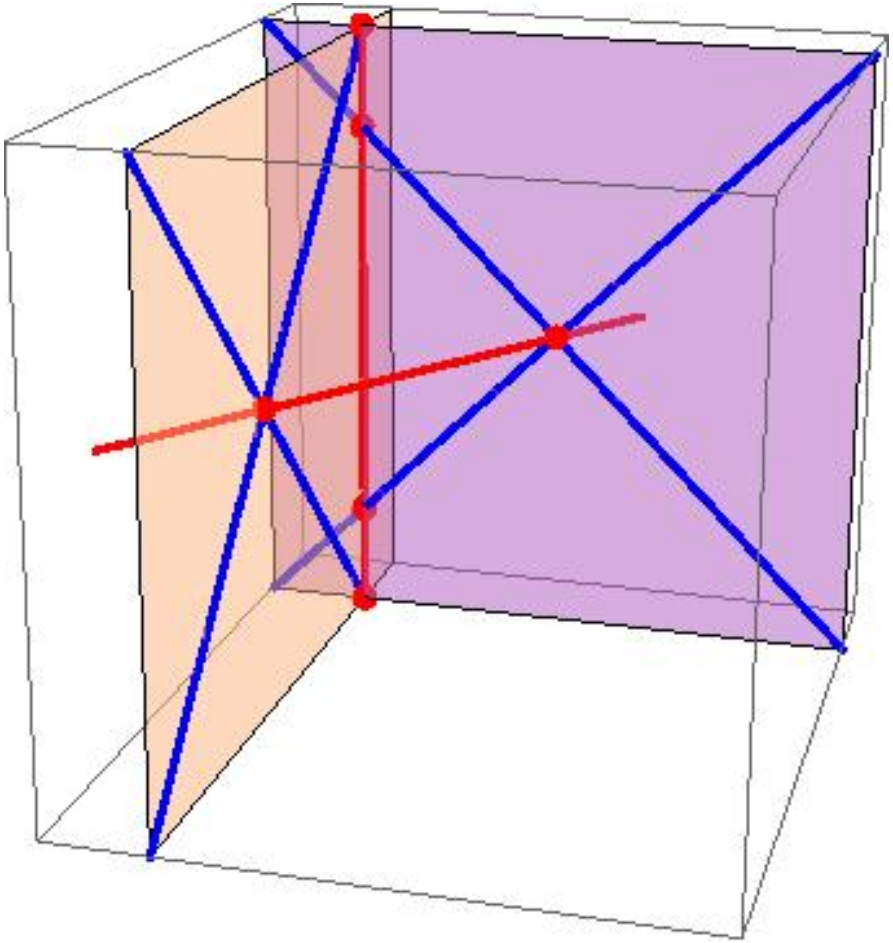
Исчислительная геометрия

Герман Шуберт (1848-1911),
немецкий математик

Исчислительная геометрия



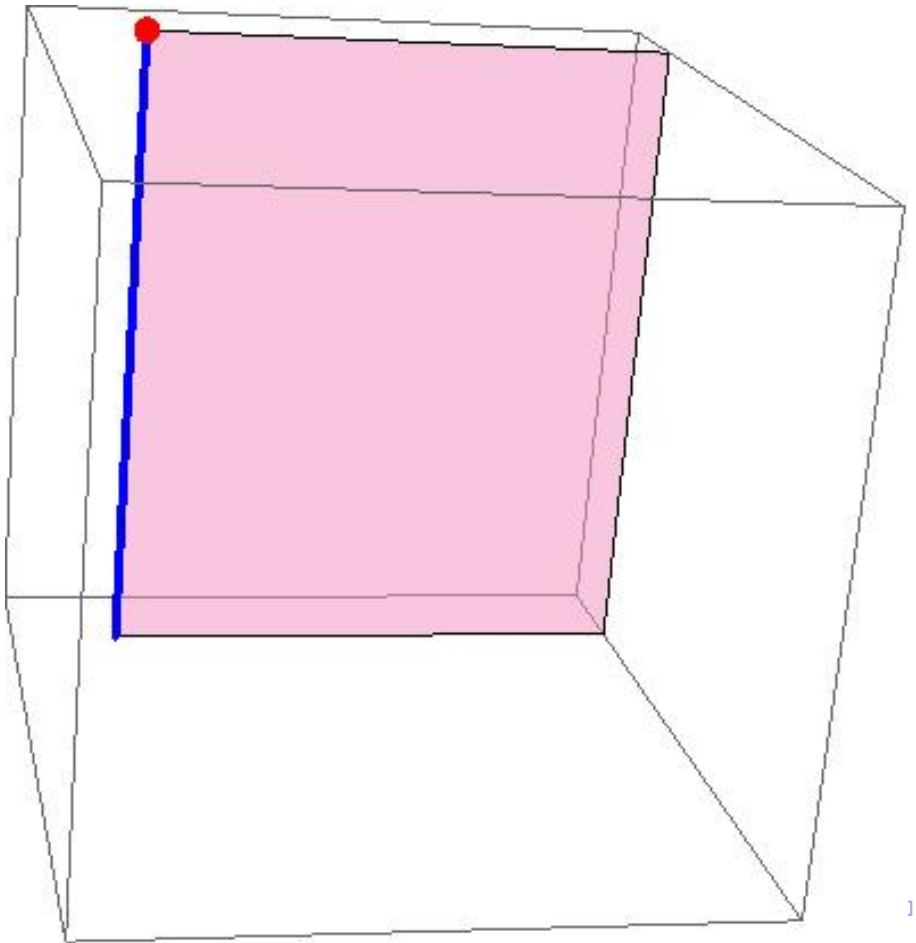
Исчислительная геометрия



Исчислительная геометрия

Обобщение

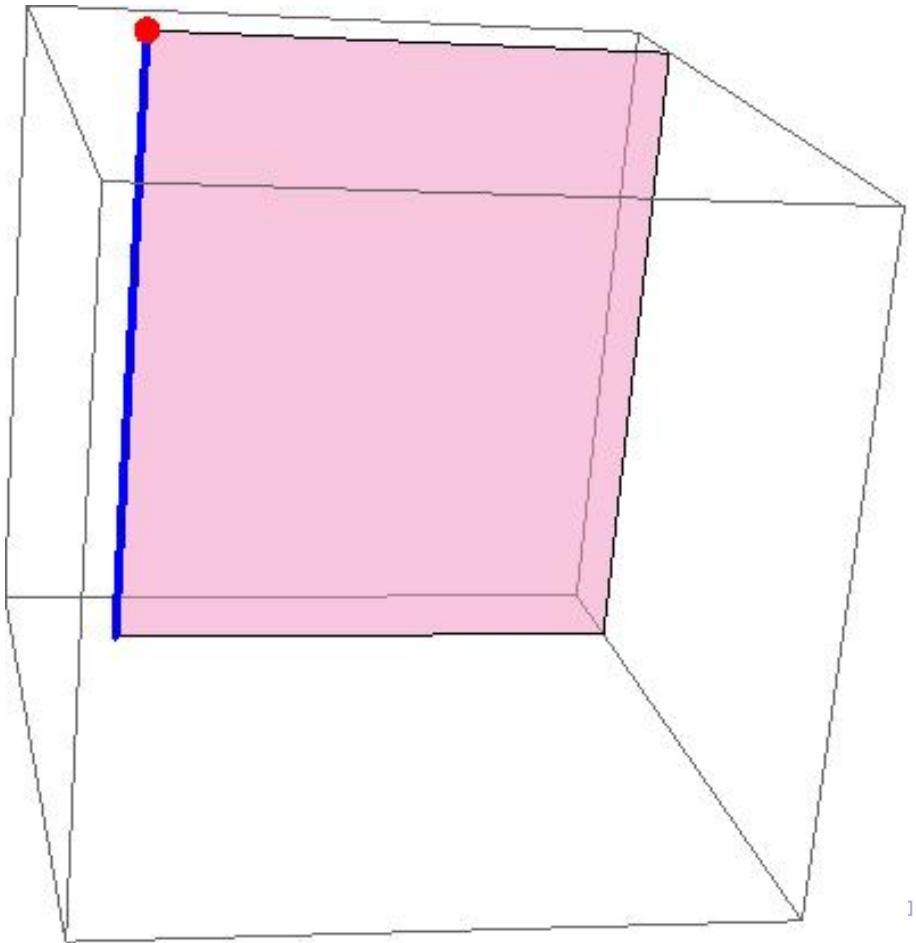
Вместо прямых (или подпространств) можно рассматривать *флаги*: точка $\in$ прямая $\subset$ плоскость $\subset \ldots$



Исчислительная геометрия

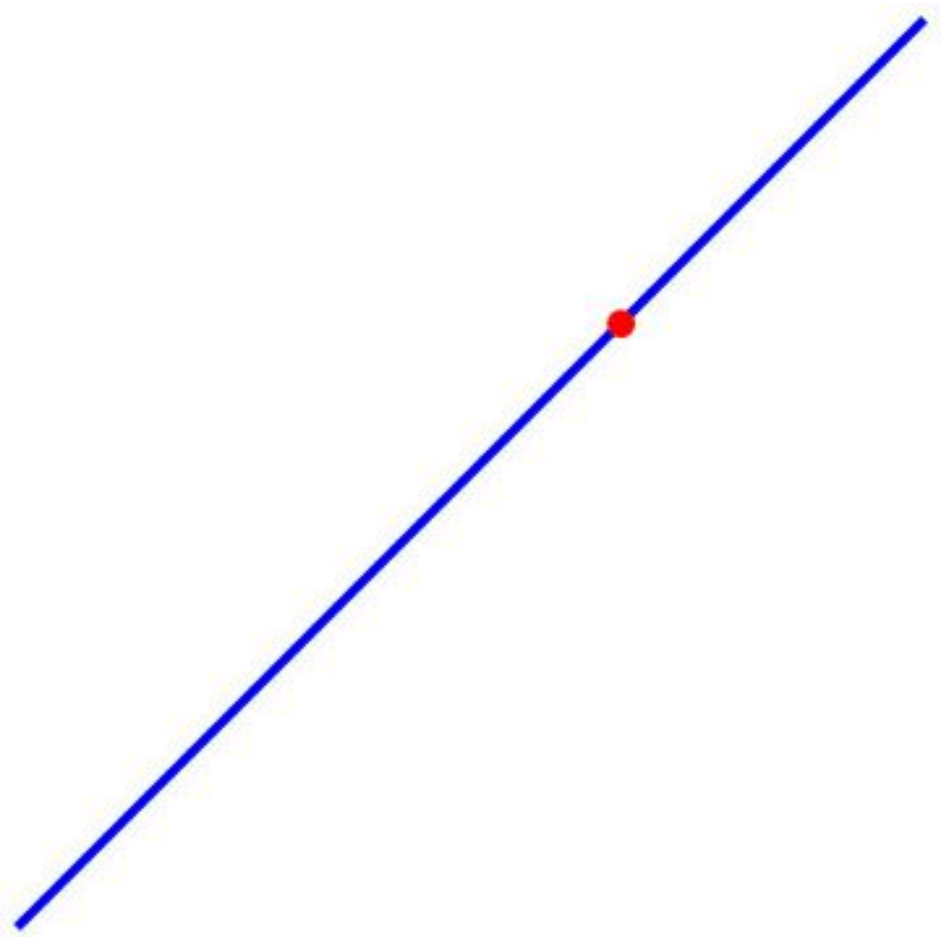
Обобщение

Вместо прямых (или подпространств) можно рассматривать *флаги*: точка $\in$ прямая $\subset$ плоскость $\subset \ldots$



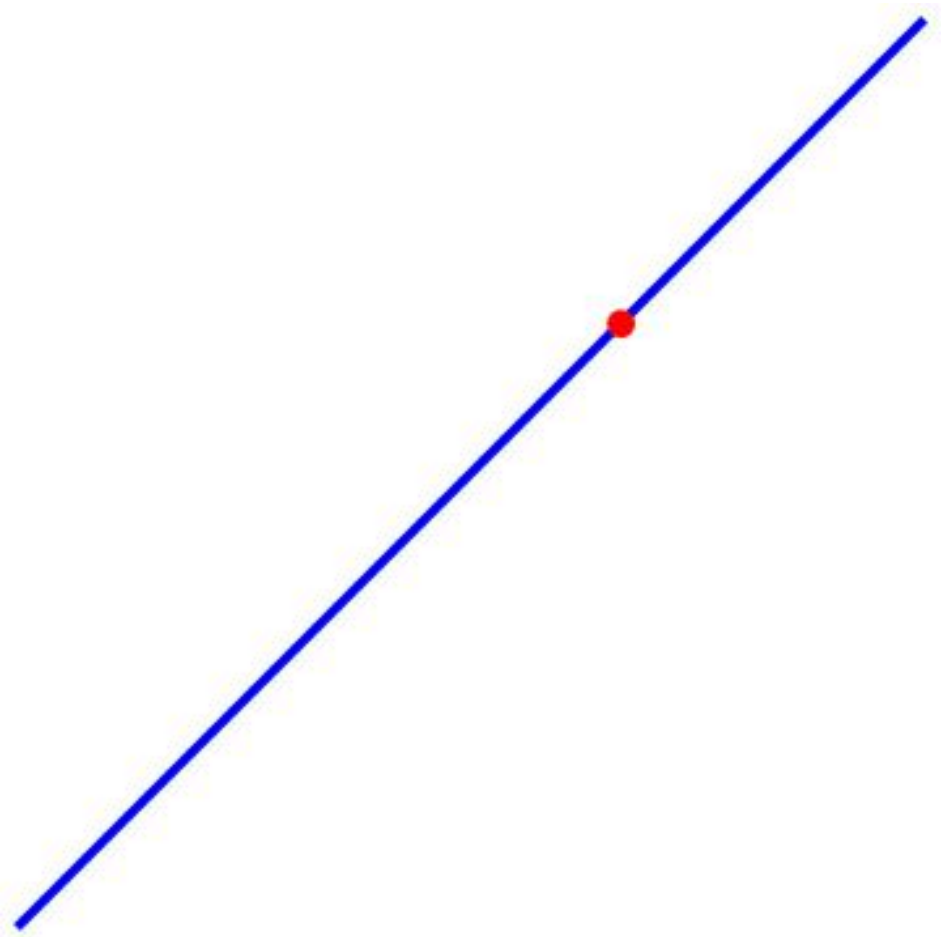
Пример

Флаги на плоскости: точка $\in$ прямая.

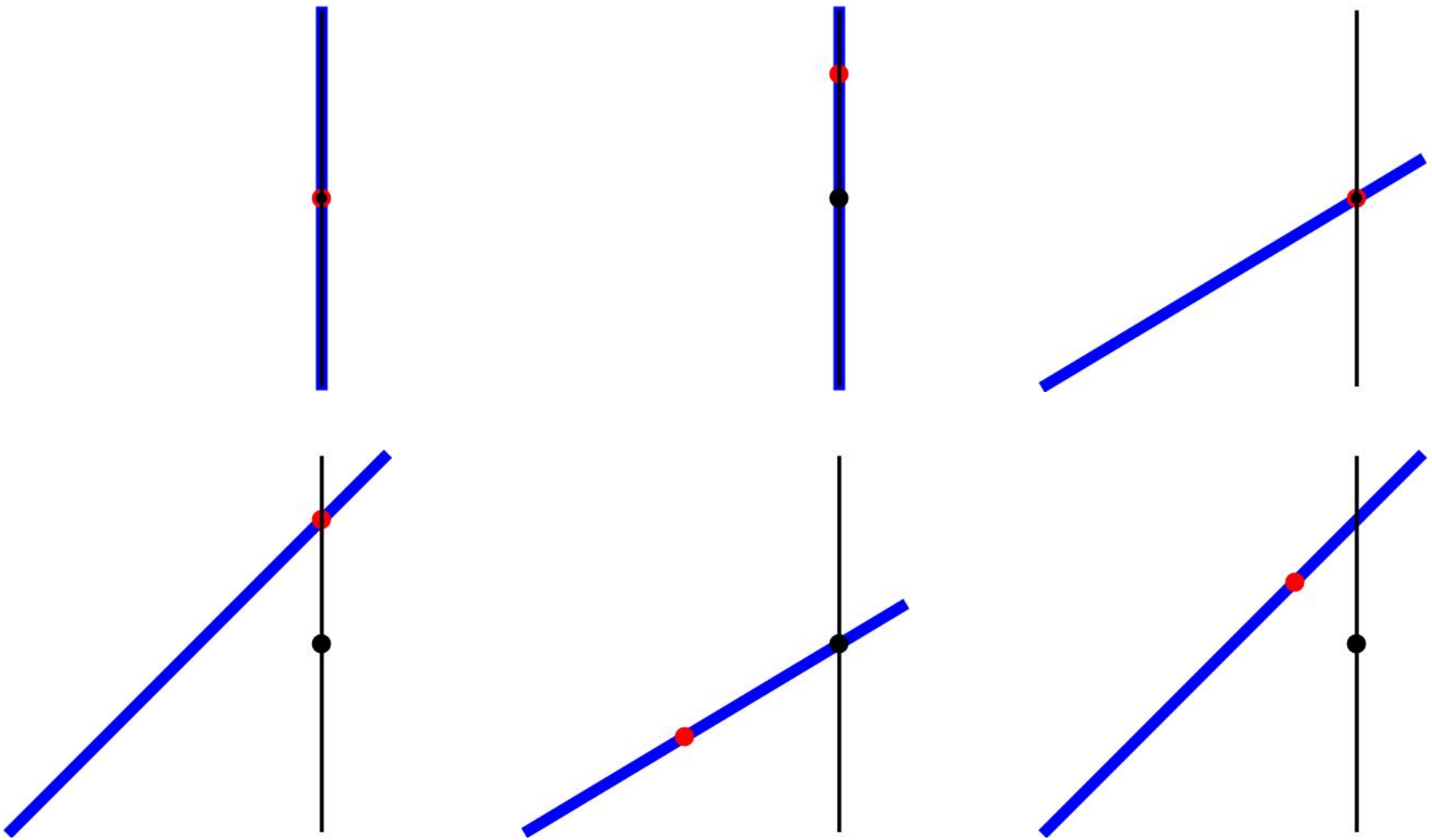


Пример

Флаги на плоскости: точка $\in$ прямая.



Условия на флаги



Разложение Брюа

Упражнение

Группа линейных операторов, оставляющих на месте данный флаг, изоморфна группа верхнетреугольных матриц в GL_n.

Обозначение

B — группа верхнетреугольных матриц GL_n

Теорема

$$GL_n = \bigsqcup_{w \in S_n} BwB$$

Пример $n = 2$

$$GL_2 = B \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} B \sqcup B$$

Разложение Брюа

Упражнение

Группа линейных операторов, оставляющих на месте данный флаг, изоморфна группа верхнетреугольных матриц в GL_n.

Обозначение

B — группа верхнетреугольных матриц GL_n

Теорема

$$GL_n = \bigsqcup_{w \in S_n} BwB$$

Пример $n = 2$

$$GL_2 = B \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} B \sqcup B$$

Разложение Брюа

Упражнение

Группа линейных операторов, оставляющих на месте данный флаг, изоморфна группа верхнетреугольных матриц в GL_n.

Обозначение

B — группа верхнетреугольных матриц GL_n

Теорема

$$GL_n = \bigsqcup_{w \in S_n} BwB$$

Пример $n = 2$

$$GL_2 = B \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} B \sqcup B$$

Разложение Брюа

Упражнение

Группа линейных операторов, оставляющих на месте данный флаг, изоморфна группа верхнетреугольных матриц в GL_n.

Обозначение

B — группа верхнетреугольных матриц GL_n

Теорема

$$GL_n = \bigsqcup_{w \in S_n} BwB$$

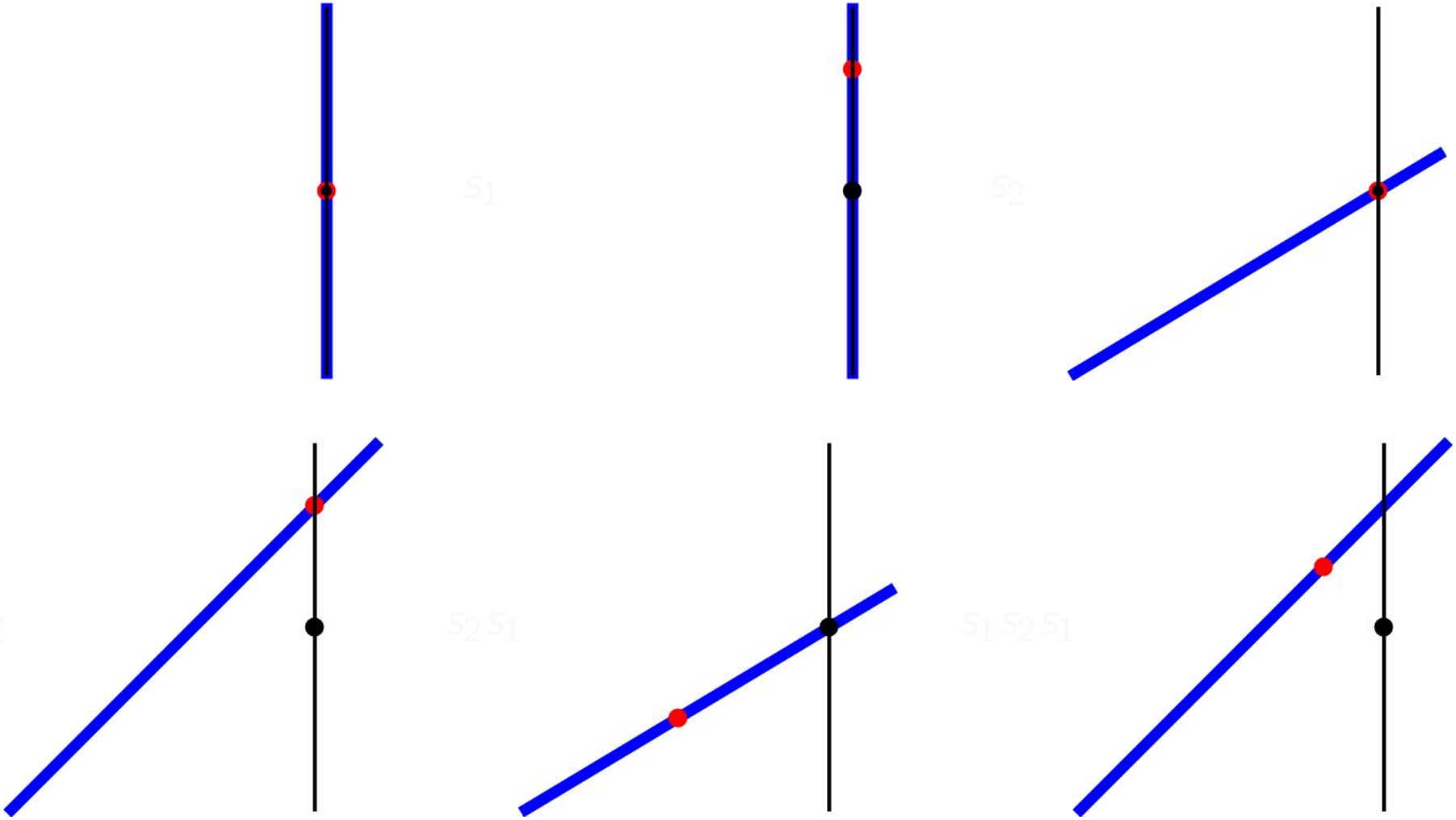
Пример $n = 2$

$$GL_2 = B \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} B \sqcup B$$

Флаги и симметрическая группа

Взаимные расположения двух флагов $\leftrightarrow$ перестановки в S_3

$s_1 := (1\ 2)$, $s_2 := (2\ 3)$

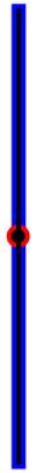


Флаги и симметрическая группа

Взаимные расположения двух флагов $\leftrightarrow$ перестановки в S_3

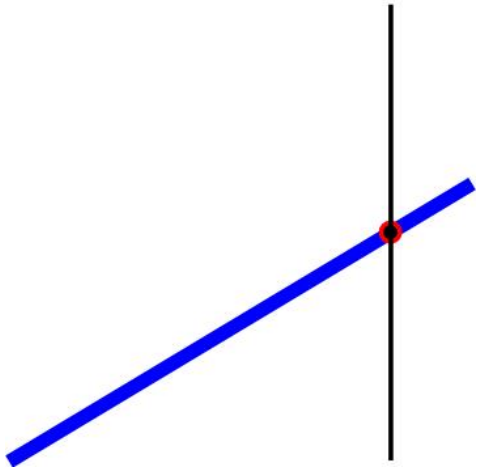
$s_1 := (1\ 2)$, $s_2 := (2\ 3)$

id

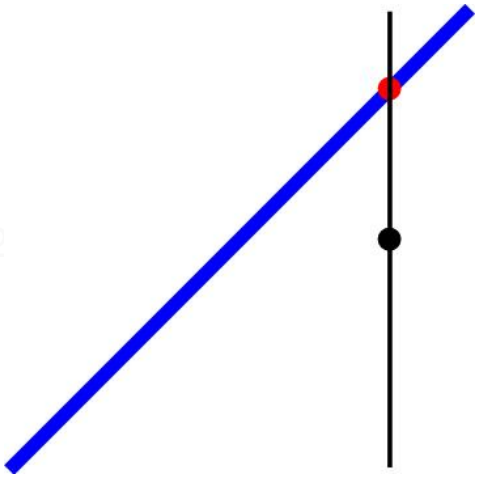


s_1

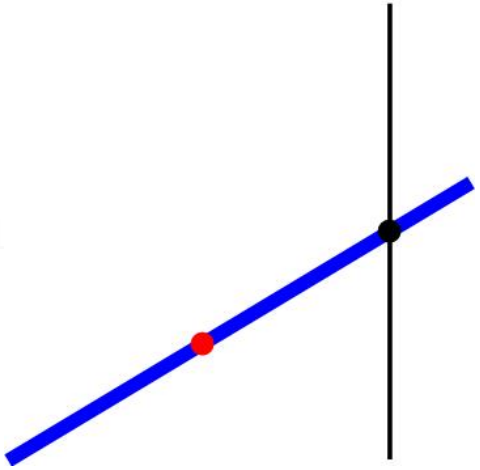
s_2



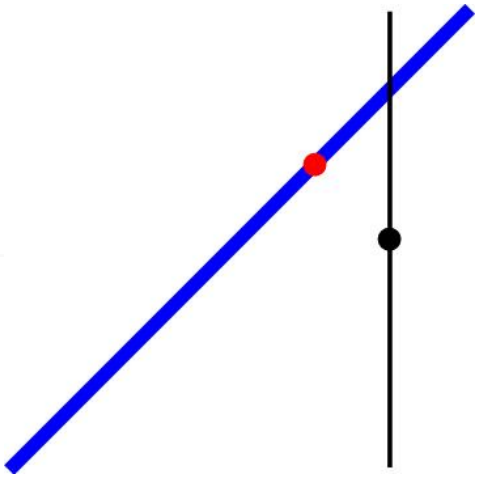
$s_1 s_2$



$s_2 s_1$



$s_1 s_2 s_1$

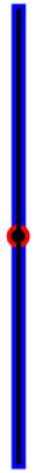


Флаги и симметрическая группа

Взаимные расположения двух флагов $\leftrightarrow$ перестановки в S_3

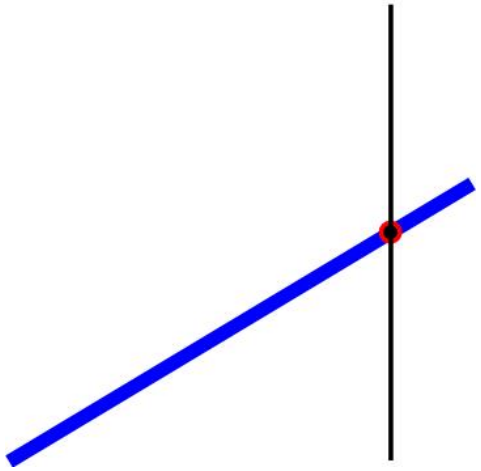
$s_1 := (1\ 2)$, $s_2 := (2\ 3)$

id

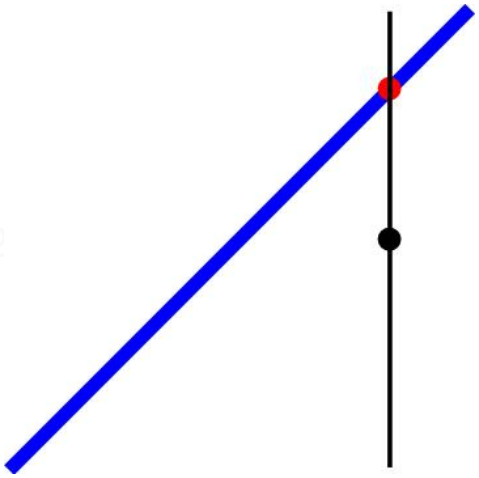


s_1

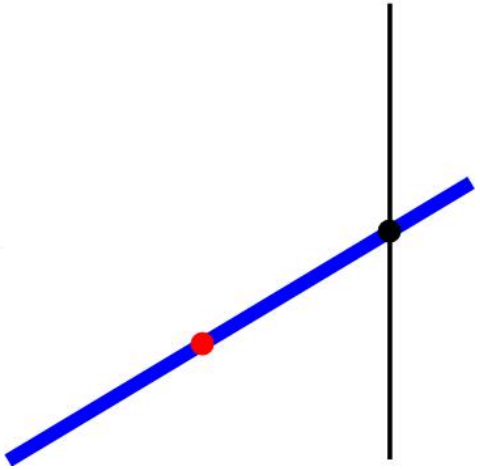
s_2



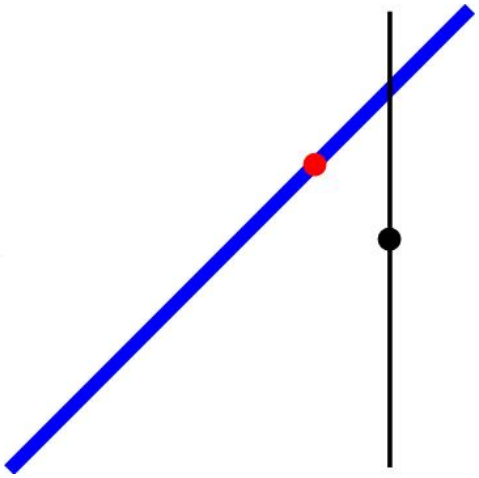
$s_1 s_2$



$s_2 s_1$



$s_1 s_2 s_1$

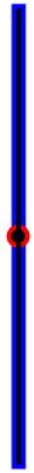


Флаги и симметрическая группа

Взаимные расположения двух флагов $\leftrightarrow$ перестановки в S_3

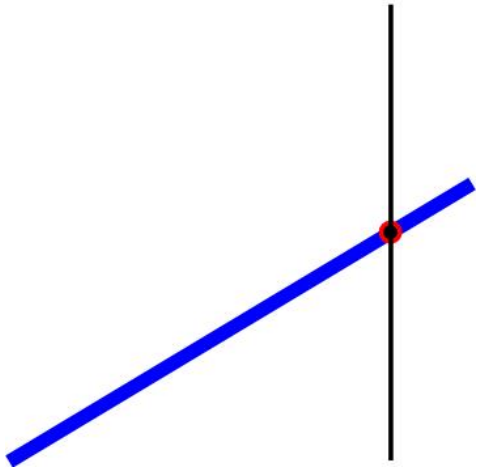
$s_1 := (1\ 2)$, $s_2 := (2\ 3)$

id

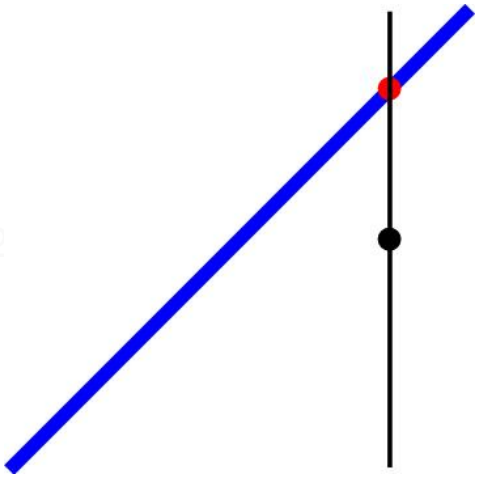


s_1

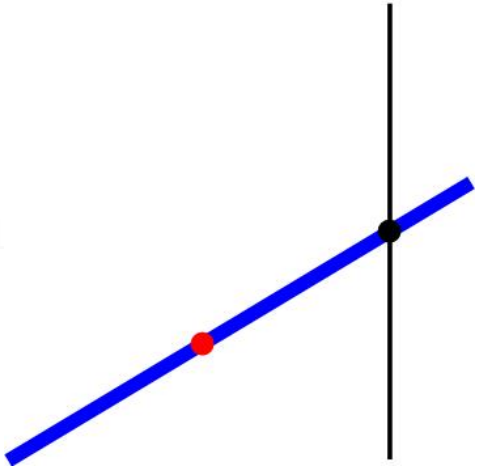
s_2



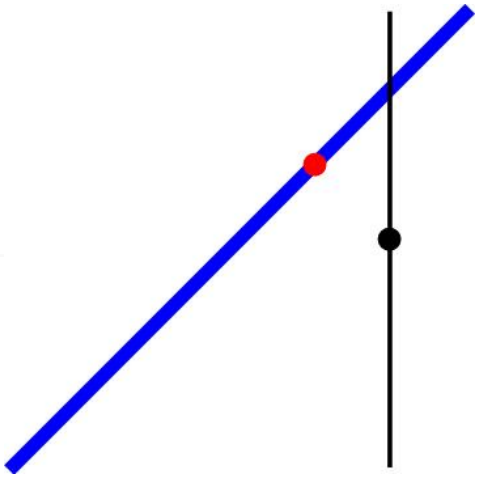
$s_1 s_2$



$s_2 s_1$



$s_1 s_2 s_1$

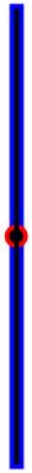


Флаги и симметрическая группа

Взаимные расположения двух флагов $\leftrightarrow$ перестановки в S_3

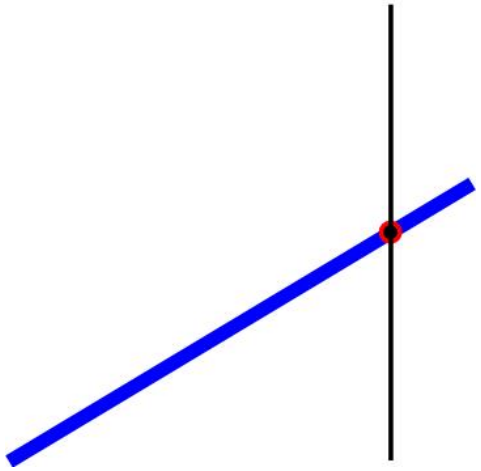
$s_1 := (1\ 2)$, $s_2 := (2\ 3)$

id

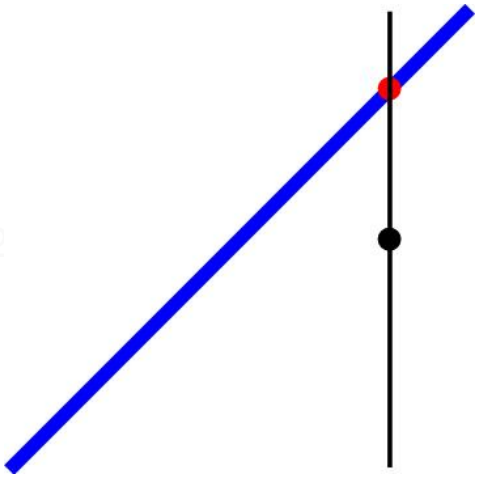


s_1

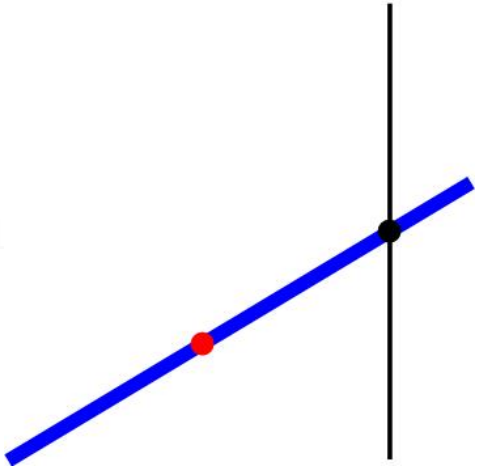
s_2



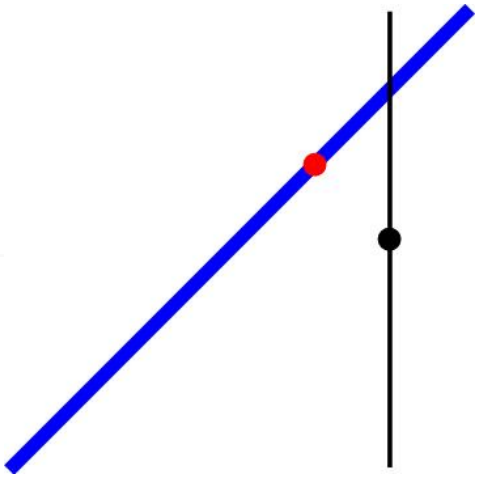
$s_1 s_2$



$s_2 s_1$



$s_1 s_2 s_1$

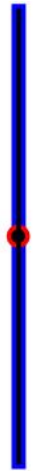


Флаги и симметрическая группа

Взаимные расположения двух флагов $\leftrightarrow$ перестановки в S_3

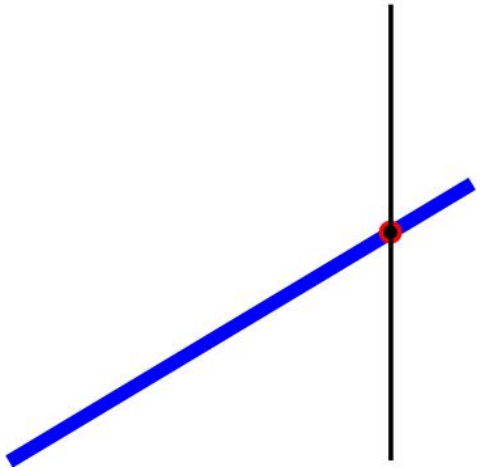
$s_1 := (1\ 2)$, $s_2 := (2\ 3)$

id

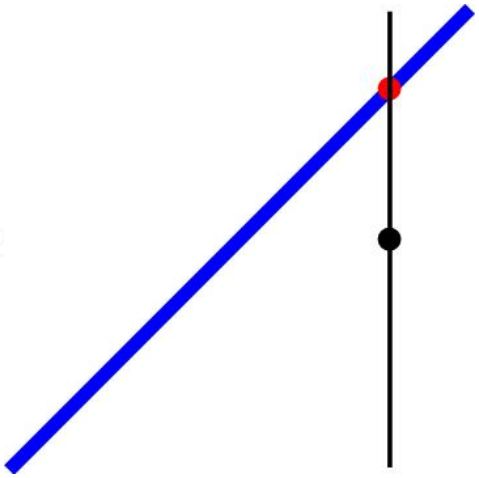


s_1

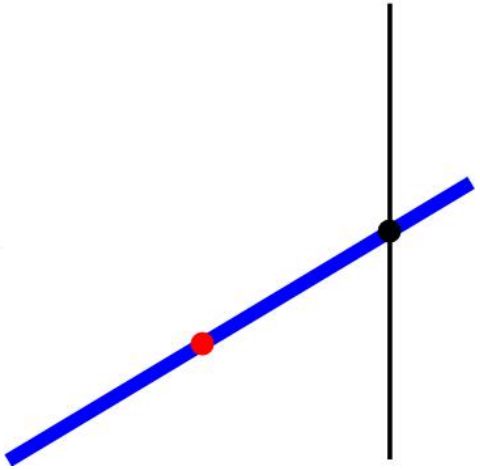
s_2



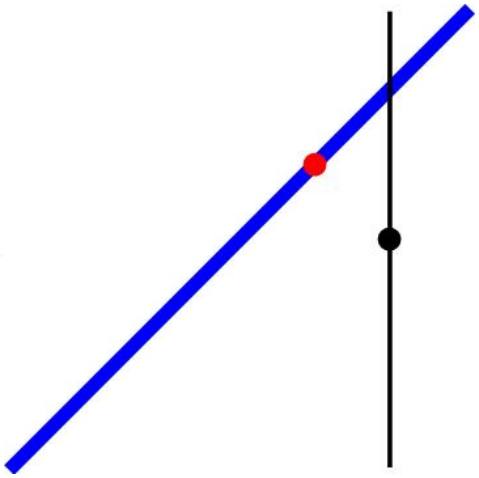
$s_1 s_2$



$s_2 s_1$



$s_1 s_2 s_1$

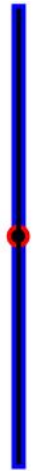


Флаги и симметрическая группа

Взаимные расположения двух флагов $\leftrightarrow$ перестановки в S_3

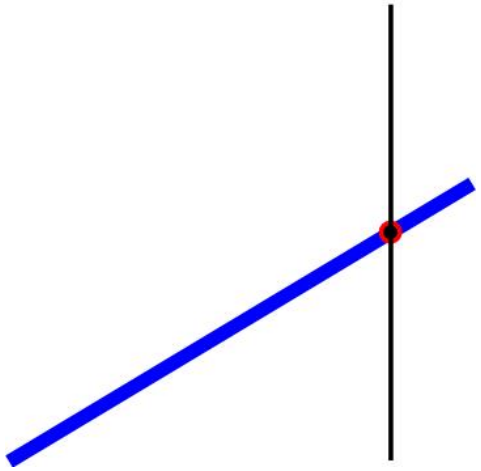
$s_1 := (1\ 2)$, $s_2 := (2\ 3)$

id

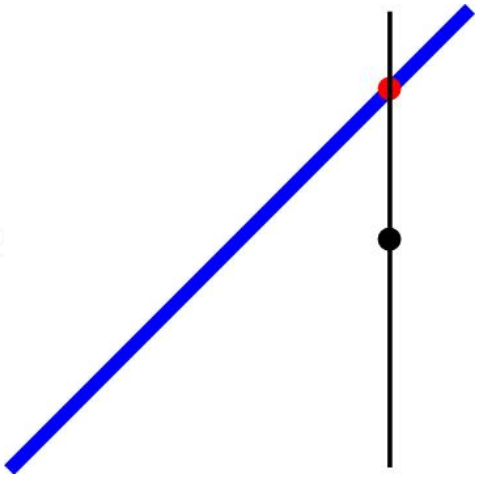


s_1

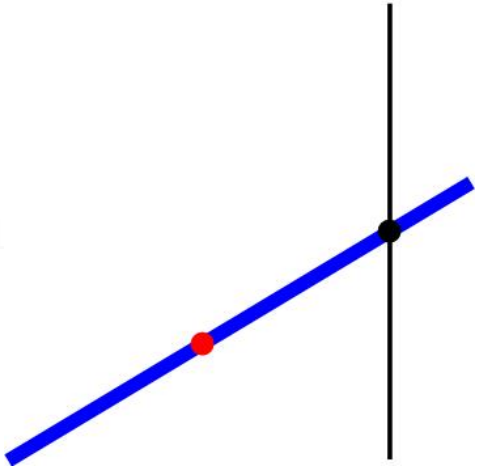
s_2



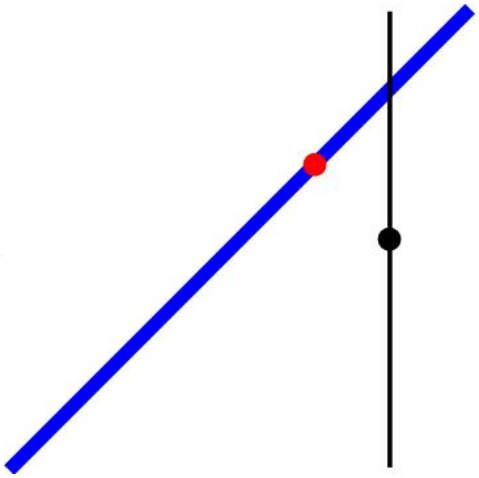
$s_1 s_2$



$s_2 s_1$



$s_1 s_2 s_1$

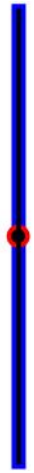


Флаги и симметрическая группа

Взаимные расположения двух флагов $\leftrightarrow$ перестановки в S_3

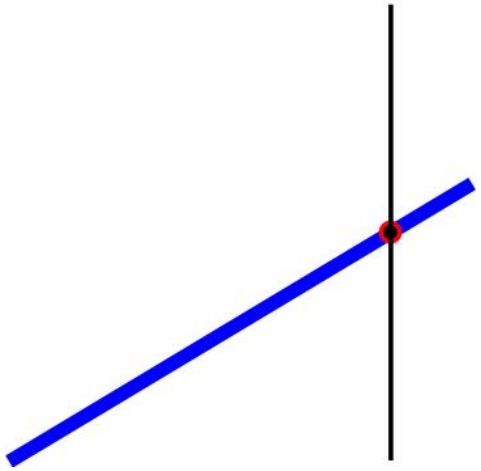
$s_1 := (1\ 2)$, $s_2 := (2\ 3)$

id

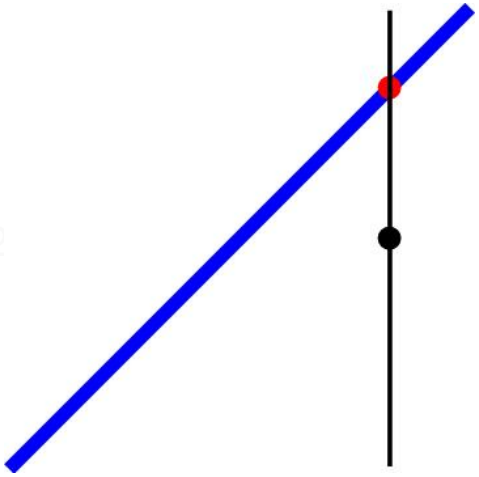


s_1

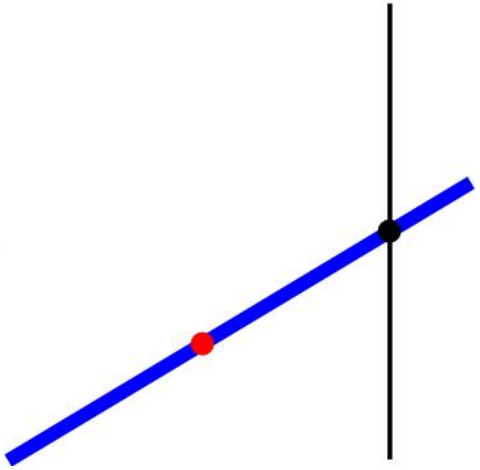
s_2



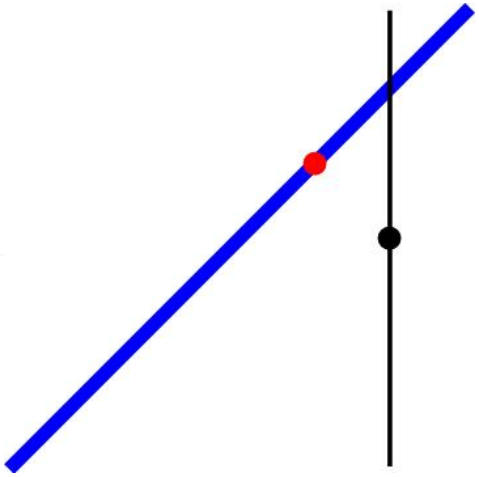
$s_1 s_2$



$s_2 s_1$



$s_1 s_2 s_1$

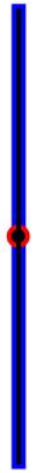


Флаги и симметрическая группа

Взаимные расположения двух флагов $\leftrightarrow$ перестановки в S_3

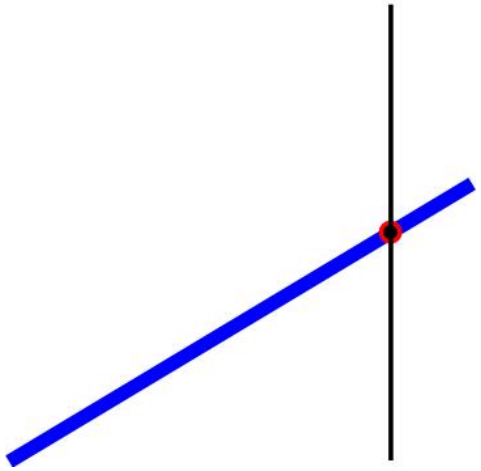
$s_1 := (1\ 2)$, $s_2 := (2\ 3)$

id

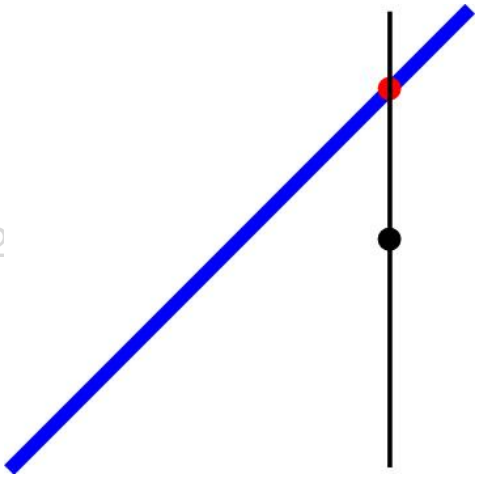


s_1

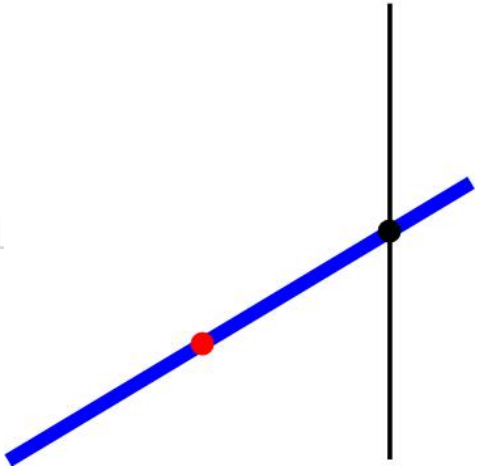
s_2



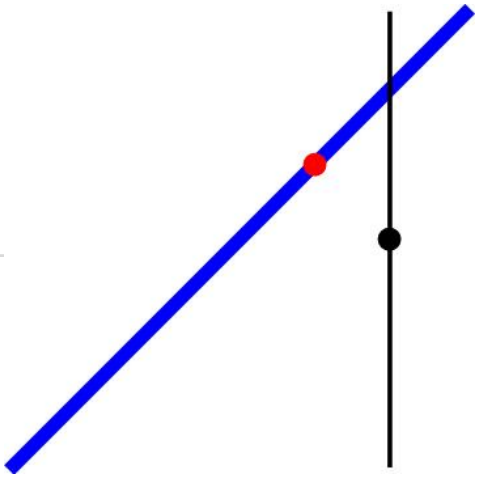
$s_1 s_2$



$s_2 s_1$



$s_1 s_2 s_1$

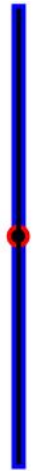


Флаги и симметрическая группа

Взаимные расположения двух флагов $\leftrightarrow$ перестановки в S_3

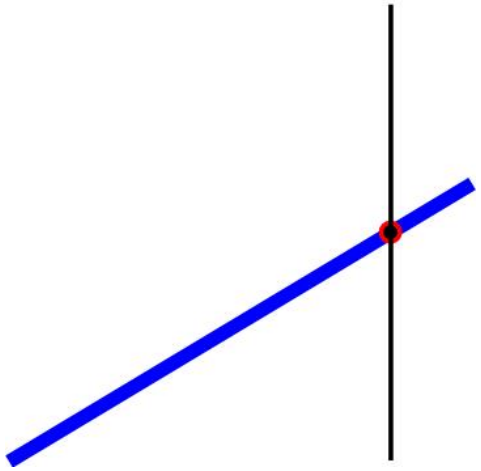
$s_1 := (1\ 2)$, $s_2 := (2\ 3)$

id

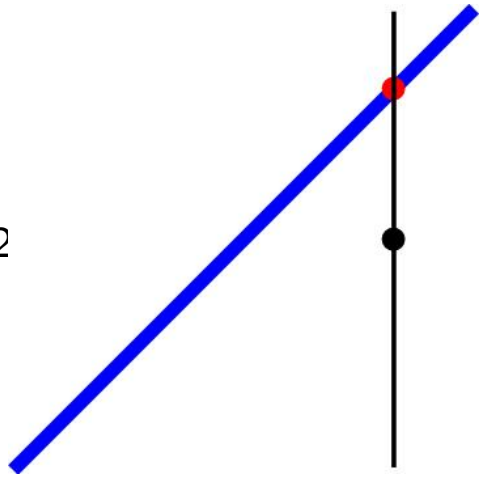


s_1

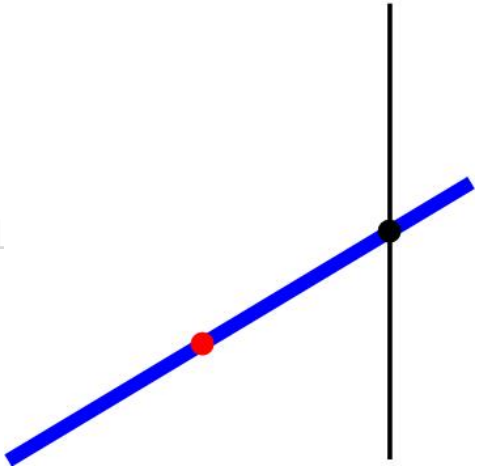
s_2



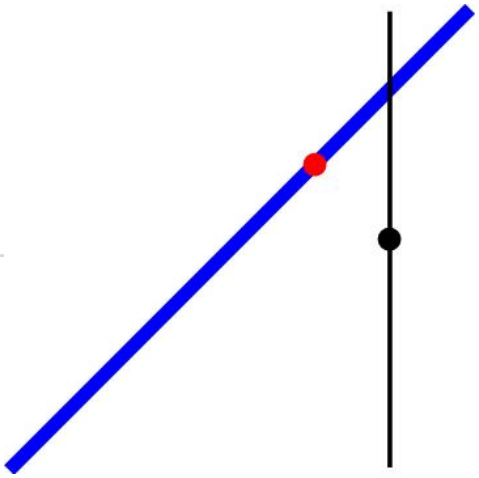
$s_1 s_2$



$s_2 s_1$



$s_1 s_2 s_1$

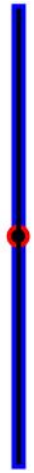


Флаги и симметрическая группа

Взаимные расположения двух флагов $\leftrightarrow$ перестановки в S_3

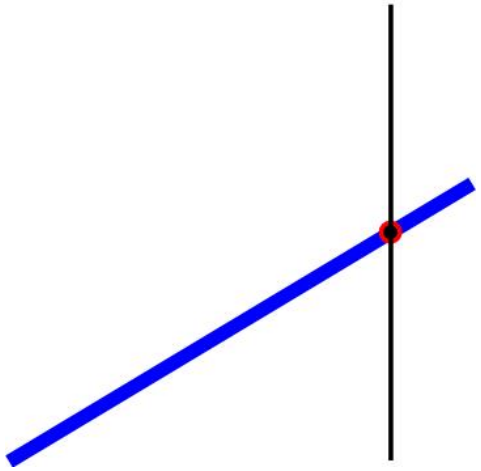
$s_1 := (1\ 2)$, $s_2 := (2\ 3)$

id

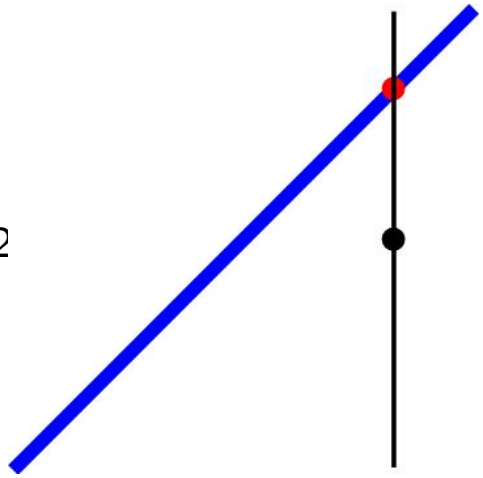


s_1

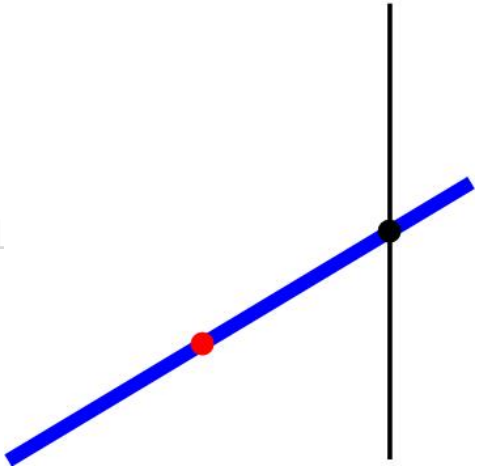
s_2



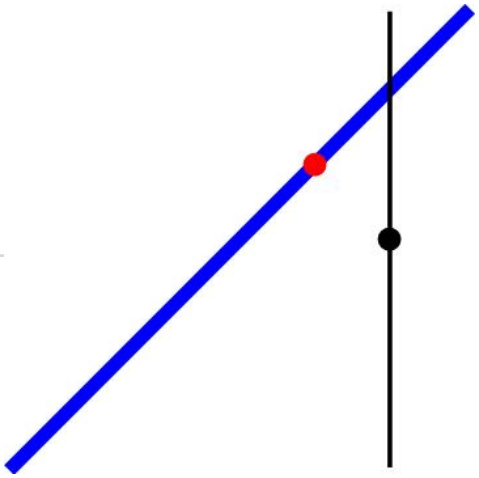
$s_1 s_2$



$s_2 s_1$



$s_1 s_2 s_1$

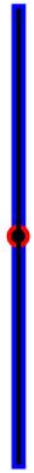


Флаги и симметрическая группа

Взаимные расположения двух флагов $\leftrightarrow$ перестановки в S_3

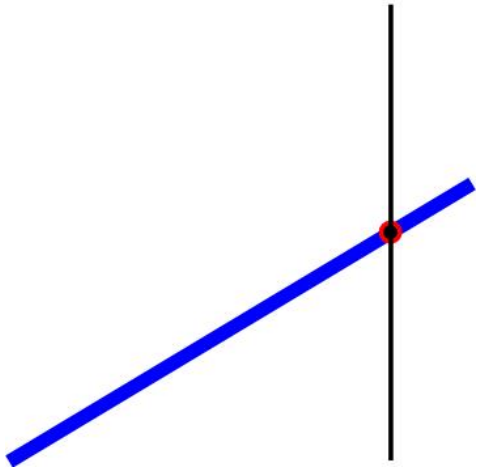
$s_1 := (1\ 2)$, $s_2 := (2\ 3)$

id

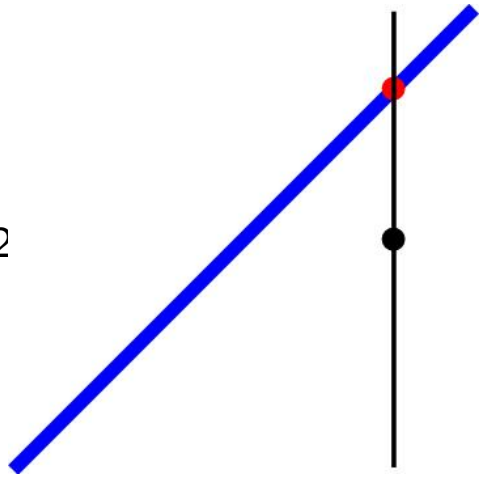


s_1

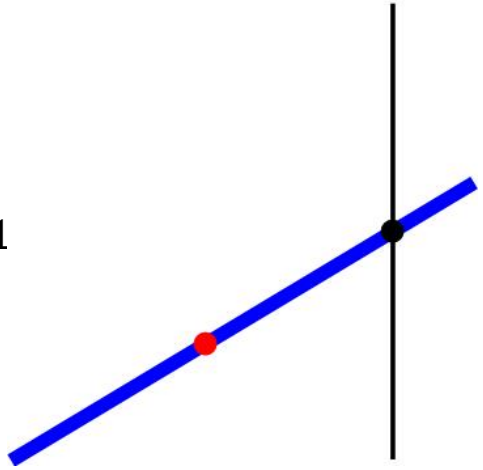
s_2



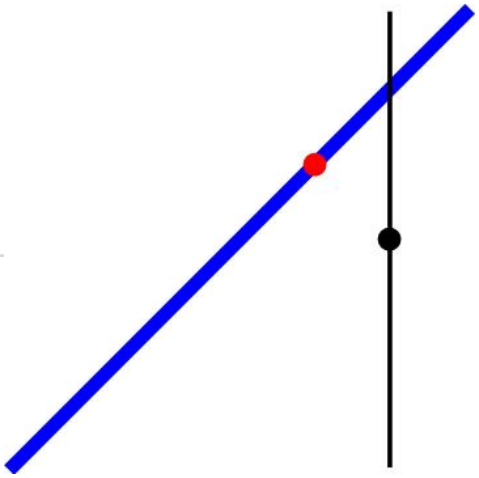
$s_1 s_2$



$s_2 s_1$



$s_1 s_2 s_1$

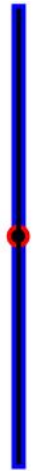


Флаги и симметрическая группа

Взаимные расположения двух флагов $\leftrightarrow$ перестановки в S_3

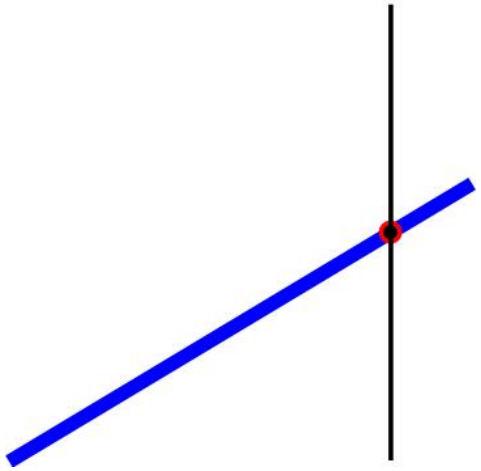
$s_1 := (1\ 2)$, $s_2 := (2\ 3)$

id

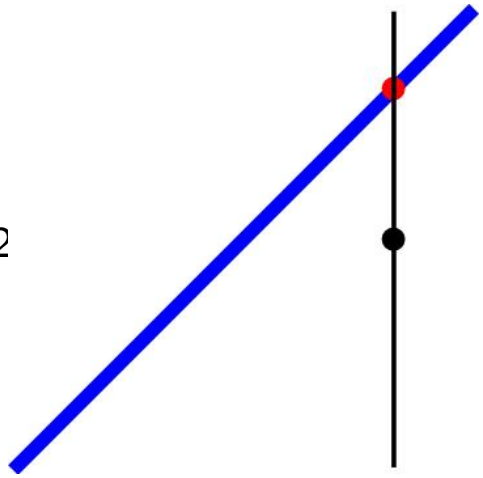


s_1

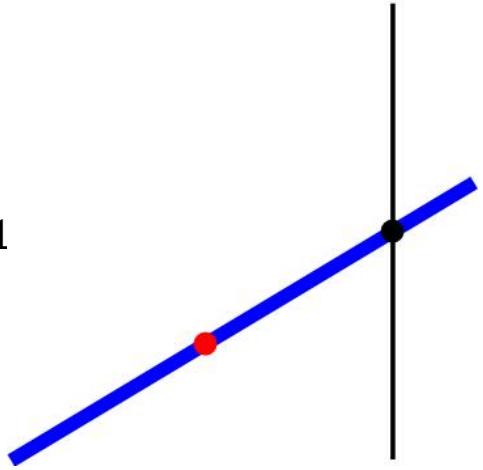
s_2



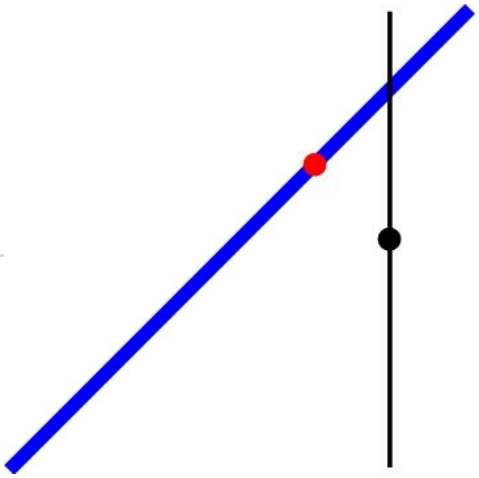
$s_1 s_2$



$s_2 s_1$



$s_1 s_2 s_1$

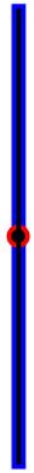


Флаги и симметрическая группа

Взаимные расположения двух флагов $\leftrightarrow$ перестановки в S_3

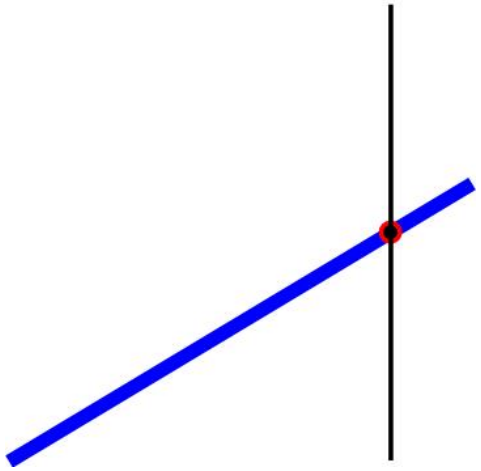
$s_1 := (1\ 2)$, $s_2 := (2\ 3)$

id

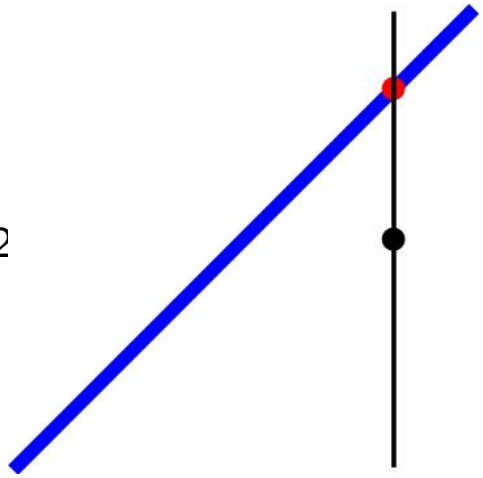


s_1

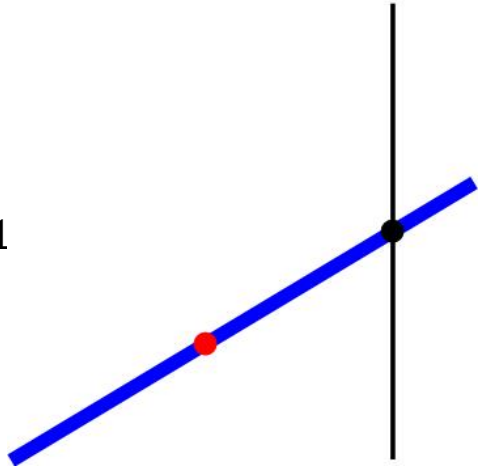
s_2



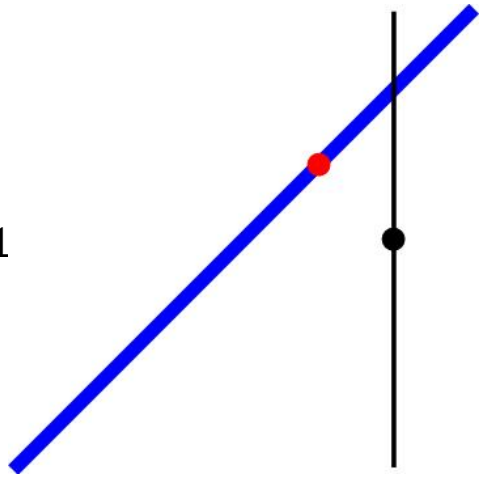
$s_1 s_2$



$s_2 s_1$



$s_1 s_2 s_1$

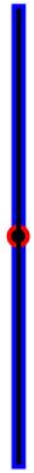


Флаги и симметрическая группа

Взаимные расположения двух флагов $\leftrightarrow$ перестановки в S_3

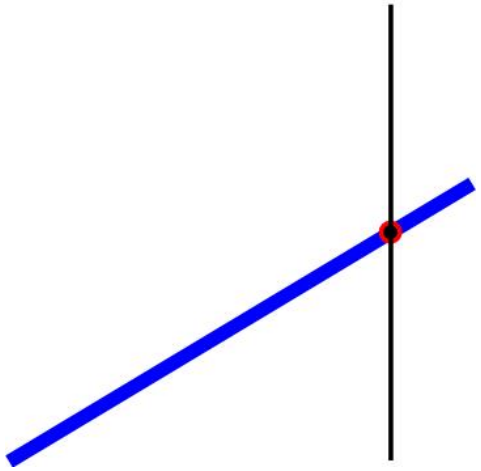
$s_1 := (1\ 2)$, $s_2 := (2\ 3)$

id

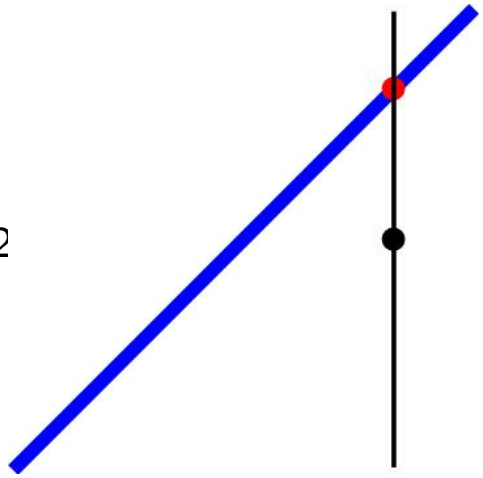


s_1

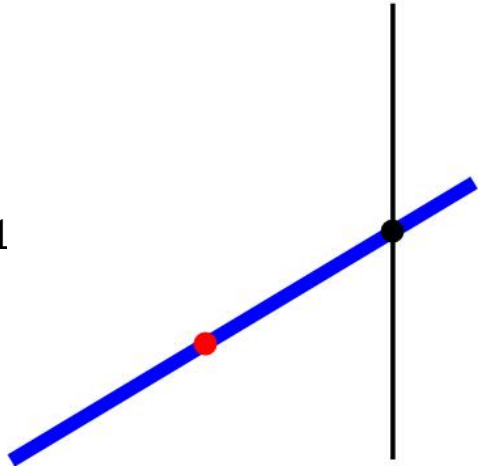
s_2



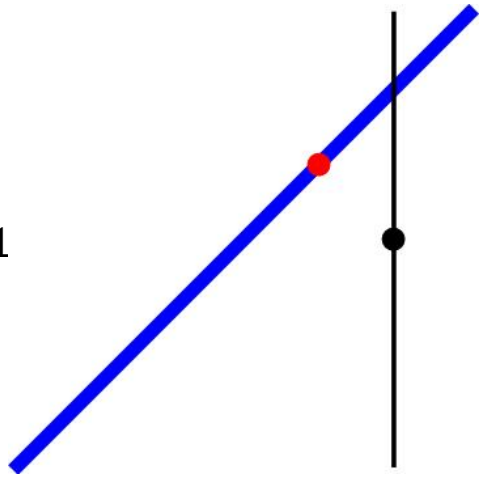
$s_1 s_2$



$s_2 s_1$



$s_1 s_2 s_1$



Симметрическая группа

Перестановки в стандартной форме

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$s_1 s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad s_2 s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad s_1 s_2 s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Симметрическая группа

Перестановки в стандартной форме

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$s_1 s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad s_2 s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad s_1 s_2 s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Симметрическая группа

Перестановки в стандартной форме

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$s_1 s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad s_2 s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad s_1 s_2 s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Симметрическая группа

Перестановки в стандартной форме

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$s_1 s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad s_2 s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad s_1 s_2 s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Симметрическая группа

Перестановки в стандартной форме

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$s_1 s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad s_2 s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad s_1 s_2 s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Симметрическая группа

Перестановки в стандартной форме

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$s_1 s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad s_2 s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad s_1 s_2 s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Симметрическая группа

Перестановки в стандартной форме

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$s_1 s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad s_2 s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad s_1 s_2 s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Симметрическая группа

Перестановки в стандартной форме

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$s_1 s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad s_2 s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad s_1 s_2 s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Симметрическая группа

Перестановки в стандартной форме

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$s_1 s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad s_2 s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad s_1 s_2 s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Операторы разделённых разностей

Определение

Оператор разделённых разностей δ_i (для $i = 1, \ldots, n-1$) действует на кольце многочленов $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ от n переменных с целыми коэффициентами следующим образом:

$$\delta_i : f \mapsto \frac{f(x_1, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_{i+1}, x_i, \ldots, x_n)}{x_i - x_{i+1}}.$$

Пример

$$\delta_1(x_1^2) = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 - x_2} = x_1 + x_2$$

Операторы разделённых разностей

Определение

Оператор разделённых разностей δ_i (для $i = 1, \ldots, n-1$) действует на кольце многочленов $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ от n переменных с целыми коэффициентами следующим образом:

$$\delta_i : f \mapsto \frac{f(x_1, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_{i+1}, x_i, \ldots, x_n)}{x_i - x_{i+1}}.$$

Пример

$$\delta_1(x_1^2) = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 - x_2} = x_1 + x_2$$

Операторы разделённых разностей

Свойства

1. Если f не меняется при перестановке переменных x_i и x_{i+1}, то $\delta_i(f) = 0$
2. Для любого f многочлен $\delta_i(f)$ не меняется при перестановке переменных x_i и x_{i+1}
3. $\delta_i^2 = 0$ (следует из 1 и 2)
4. $\delta_i \delta_{i+1} \delta_i = \delta_{i+1} \delta_i \delta_{i+1}$

Операторы разделённых разностей

Свойства

1. Если f не меняется при перестановке переменных x_i и x_{i+1}, то $\delta_i(f) = 0$
2. Для любого f многочлен $\delta_i(f)$ не меняется при перестановке переменных x_i и x_{i+1}
3. $\delta_i^2 = 0$ (следует из 1 и 2)
4. $\delta_i \delta_{i+1} \delta_i = \delta_{i+1} \delta_i \delta_{i+1}$

Операторы разделённых разностей

Свойства

1. Если f не меняется при перестановке переменных x_i и x_{i+1}, то $\delta_i(f) = 0$
2. Для любого f многочлен $\delta_i(f)$ не меняется при перестановке переменных x_i и x_{i+1}
3. $\delta_i^2 = 0$ (следует из 1 и 2)
4. $\delta_i \delta_{i+1} \delta_i = \delta_{i+1} \delta_i \delta_{i+1}$

Операторы разделённых разностей

Свойства

1. Если f не меняется при перестановке переменных x_i и x_{i+1}, то $\delta_i(f) = 0$
2. Для любого f многочлен $\delta_i(f)$ не меняется при перестановке переменных x_i и x_{i+1}
3. $\delta_i^2 = 0$ (следует из 1 и 2)
4. $\delta_i \delta_{i+1} \delta_i = \delta_{i+1} \delta_i \delta_{i+1}$

Операторы разделённых разностей

Свойства

1. Если f не меняется при перестановке переменных x_i и x_{i+1}, то $\delta_i(f) = 0$
2. Для любого f многочлен $\delta_i(f)$ не меняется при перестановке переменных x_i и x_{i+1}
3. $\delta_i^2 = 0$ (следует из 1 и 2)
4. $\delta_i \delta_{i+1} \delta_i = \delta_{i+1} \delta_i \delta_{i+1}$

Многочлены Шуберта

$w \in S_n$ — перестановка; $w = s_{i_1} \dots s_{i_\ell}$ — кратчайшее разложение в произведение элементарных транспозиций

Определение

Многочлен Шуберта $\mathfrak{S}_w \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$, соответствующий перестановке w, определяется как

$$\delta_{i_\ell} \delta_{i_{\ell-1}} \dots \delta_{i_1} \mathfrak{S}_{id},$$

где

$$\mathfrak{S}_{id} := x_1^{n-1} x_2^{n-2} \dots x_{n-1}.$$

Упражнение

Многочлен Шуберта $\mathfrak{S}_w$ зависит только от выбора перестановки w, а не от выбора кратчайшего разложения.

Многочлены Шуберта

$w \in S_n$ — перестановка; $w = s_{i_1} \dots s_{i_\ell}$ — кратчайшее разложение в произведение элементарных транспозиций

Определение

Многочлен Шуберта $\mathfrak{S}_w \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$, соответствующий перестановке w, определяется как

$$\delta_{i_\ell} \delta_{i_{\ell-1}} \dots \delta_{i_1} \mathfrak{S}_{id},$$

где

$$\mathfrak{S}_{id} := x_1^{n-1} x_2^{n-2} \dots x_{n-1}.$$

Упражнение

Многочлен Шуберта $\mathfrak{S}_w$ зависит только от выбора перестановки w, а не от выбора кратчайшего разложения.

Многочлены Шуберта

$w \in S_n$ — перестановка; $w = s_{i_1} \dots s_{i_\ell}$ — кратчайшее разложение в произведение элементарных транспозиций

Определение

Многочлен Шуберта $\mathfrak{S}_w \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$, соответствующий перестановке w, определяется как

$$\delta_{i_\ell} \delta_{i_{\ell-1}} \dots \delta_{i_1} \mathfrak{S}_{id},$$

где

$$\mathfrak{S}_{id} := x_1^{n-1} x_2^{n-2} \dots x_{n-1}.$$

Упражнение

Многочлен Шуберта $\mathfrak{S}_w$ зависит только от выбора перестановки w, а не от выбора кратчайшего разложения.

Многочлены Шуберта

Пример $n = 3$

$$\mathfrak{S}_{id} = x_1^2 x_2 \qquad \mathfrak{S}_{s_1} = x_1 x_2 \qquad \mathfrak{S}_{s_2} = x_1^2$$

$$\mathfrak{S}_{s_1 s_2} = x_1 \qquad \mathfrak{S}_{s_2 s_1} = x_1 + x_2 \qquad \mathfrak{S}_{s_1 s_2 s_1} = 1$$

Пример $n = 4$, $w = s_3 s_2 s_1$

$$\mathfrak{S}_w = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_2 x_3 + x_2^2 x_3$$

Многочлены Шуберта

Пример $n = 3$

$$\mathfrak{S}_{id} = x_1^2 x_2 \qquad \mathfrak{S}_{s_1} = x_1 x_2 \qquad \mathfrak{S}_{s_2} = x_1^2$$

$$\mathfrak{S}_{s_1 s_2} = x_1 \qquad \mathfrak{S}_{s_2 s_1} = x_1 + x_2 \qquad \mathfrak{S}_{s_1 s_2 s_1} = 1$$

Пример $n = 4$, $w = s_3 s_2 s_1$

$$\mathfrak{S}_w = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_2 x_3 + x_2^2 x_3$$

Многочлены Шуберта

Пример $n = 3$

$$\mathfrak{S}_{id} = x_1^2 x_2 \qquad \mathfrak{S}_{s_1} = x_1 x_2 \qquad \mathfrak{S}_{s_2} = x_1^2$$

$$\mathfrak{S}_{s_1 s_2} = x_1 \qquad \mathfrak{S}_{s_2 s_1} = x_1 + x_2 \qquad \mathfrak{S}_{s_1 s_2 s_1} = 1$$

Пример $n = 4$, $w = s_3 s_2 s_1$

$$\mathfrak{S}_w = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_2 x_3 + x_2^2 x_3$$

Многочлены Шуберта

Пример $n = 3$

$$\mathfrak{S}_{id} = x_1^2 x_2 \qquad \mathfrak{S}_{s_1} = x_1 x_2 \qquad \mathfrak{S}_{s_2} = x_1^2$$

$$\mathfrak{S}_{s_1 s_2} = x_1 \qquad \mathfrak{S}_{s_2 s_1} = x_1 + x_2 \qquad \mathfrak{S}_{s_1 s_2 s_1} = 1$$

Пример $n = 4$, $w = s_3 s_2 s_1$

$$\mathfrak{S}_w = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_2 x_3 + x_2^2 x_3$$

Многочлены Шуберта

Пример $n = 3$

$$\mathfrak{S}_{id} = x_1^2 x_2 \qquad \mathfrak{S}_{s_1} = x_1 x_2 \qquad \mathfrak{S}_{s_2} = x_1^2$$

$$\mathfrak{S}_{s_1 s_2} = x_1 \qquad \mathfrak{S}_{s_2 s_1} = x_1 + x_2 \qquad \mathfrak{S}_{s_1 s_2 s_1} = 1$$

Пример $n = 4$, $w = s_3 s_2 s_1$

$$\mathfrak{S}_w = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_2 x_3 + x_2^2 x_3$$

Многочлены Шуберта

Пример $n = 3$

$$\mathfrak{S}_{id} = x_1^2 x_2 \qquad \mathfrak{S}_{s_1} = x_1 x_2 \qquad \mathfrak{S}_{s_2} = x_1^2$$

$$\mathfrak{S}_{s_1 s_2} = x_1 \qquad \mathfrak{S}_{s_2 s_1} = x_1 + x_2 \qquad \mathfrak{S}_{s_1 s_2 s_1} = 1$$

Пример $n = 4$, $w = s_3 s_2 s_1$

$$\mathfrak{S}_w = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_2 x_3 + x_2^2 x_3$$

Многочлены Шуберта

Пример $n = 3$

$$\mathfrak{S}_{id} = x_1^2 x_2 \qquad \mathfrak{S}_{s_1} = x_1 x_2 \qquad \mathfrak{S}_{s_2} = x_1^2$$

$$\mathfrak{S}_{s_1 s_2} = x_1 \qquad \mathfrak{S}_{s_2 s_1} = x_1 + x_2 \qquad \mathfrak{S}_{s_1 s_2 s_1} = 1$$

Пример $n = 4$, $w = s_3 s_2 s_1$

$$\mathfrak{S}_w = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_2 x_3 + x_2^2 x_3$$

Многочлены Шуберта

Пример $n = 3$

$$\mathfrak{S}_{id} = x_1^2 x_2 \qquad \mathfrak{S}_{s_1} = x_1 x_2 \qquad \mathfrak{S}_{s_2} = x_1^2$$

$$\mathfrak{S}_{s_1 s_2} = x_1 \qquad \mathfrak{S}_{s_2 s_1} = x_1 + x_2 \qquad \mathfrak{S}_{s_1 s_2 s_1} = 1$$

Пример $n = 4$, $w = s_3 s_2 s_1$

$$\mathfrak{S}_w = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_2 x_3 + x_2^2 x_3$$

Многочлены Шуберта

Пример $n = 3$

$$\mathfrak{S}_{id} = x_1^2 x_2 \qquad \mathfrak{S}_{s_1} = x_1 x_2 \qquad \mathfrak{S}_{s_2} = x_1^2$$

$$\mathfrak{S}_{s_1 s_2} = x_1 \qquad \mathfrak{S}_{s_2 s_1} = x_1 + x_2 \qquad \mathfrak{S}_{s_1 s_2 s_1} = 1$$

Пример $n = 4$, $w = s_3 s_2 s_1$

$$\mathfrak{S}_w = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_2 x_3 + x_2^2 x_3$$

Многочлены Шуберта

Пример $n = 3$

$$\mathfrak{S}_{id} = x_1^2 x_2 \qquad \mathfrak{S}_{s_1} = x_1 x_2 \qquad \mathfrak{S}_{s_2} = x_1^2$$

$$\mathfrak{S}_{s_1 s_2} = x_1 \qquad \mathfrak{S}_{s_2 s_1} = x_1 + x_2 \qquad \mathfrak{S}_{s_1 s_2 s_1} = 1$$

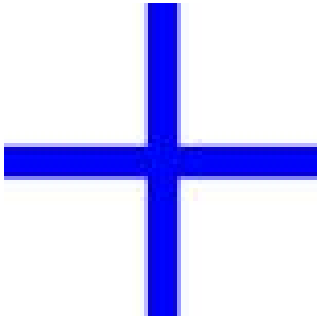
Пример $n = 4$, $w = s_3 s_2 s_1$

$$\mathfrak{S}_w = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_2 x_3 + x_2^2 x_3$$

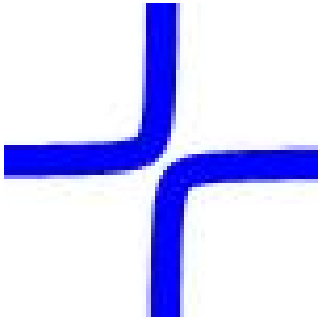
Водопроводные сети (pipe-dreams)

Конструкция

В каждую клетку $n \times n$ таблицы, лежащую над диагональю $i + j = n$, вставляется фрагмент водопровода одного из двух типов:



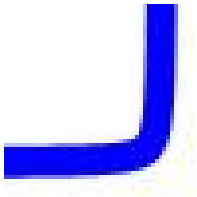
Пересечение



Расхождение

Продолжение

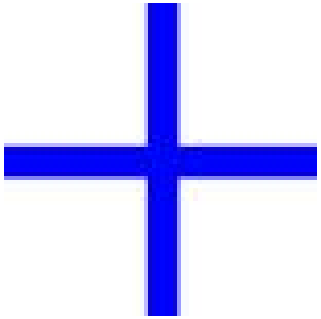
Во все клетки на диагонали $i + j = n$ вставляются фрагменты



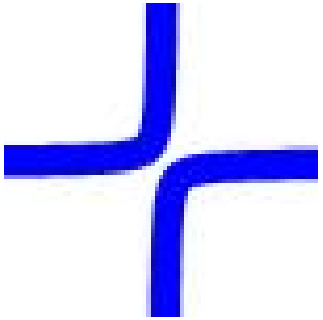
Водопроводные сети (pipe-dreams)

Конструкция

В каждую клетку $n \times n$ таблицы, лежащую над диагональю $i + j = n$, вставляется фрагмент водопровода одного из двух типов:



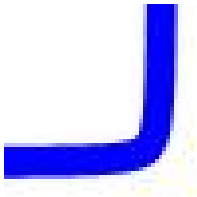
Пересечение



Расхождение

Продолжение

Во все клетки на диагонали $i + j = n$ вставляются фрагменты

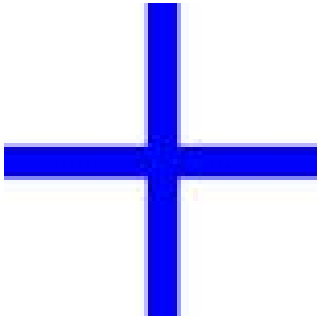


Водопроводные сети (pipe-dreams)

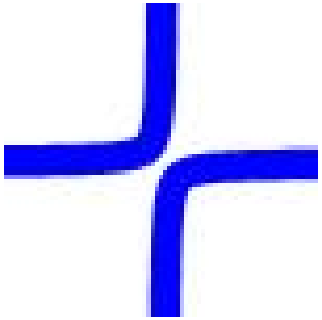
Конструкция

В каждую клетку $n \times n$ таблицы, лежащую над диагональю $i + j = n$, вставляется фрагмент водопровода одного из двух типов:

Пересечение

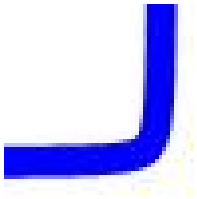


Расхождение



Продолжение

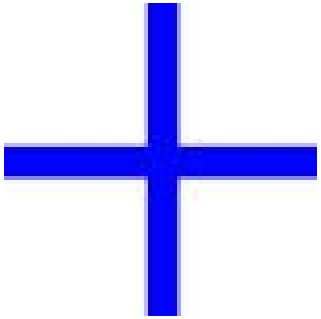
Во все клетки на диагонали $i + j = n$ вставляются фрагменты

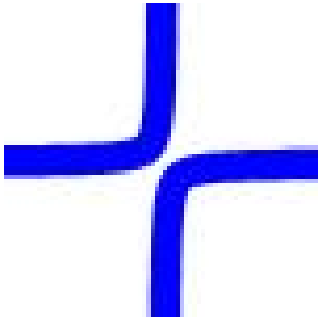


Водопроводные сети (pipe-dreams)

Конструкция

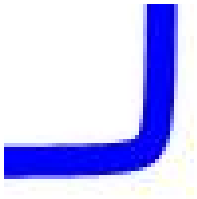
В каждую клетку $n \times n$ таблицы, лежащую над диагональю $i + j = n$, вставляется фрагмент водопровода одного из двух типов:

Пересечение 

Расхождение 

Продолжение

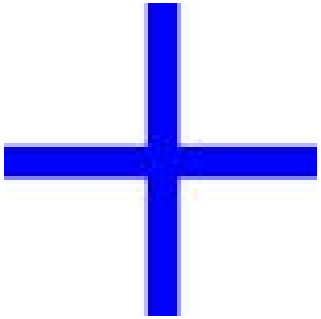
Во все клетки на диагонали $i + j = n$ вставляются фрагменты

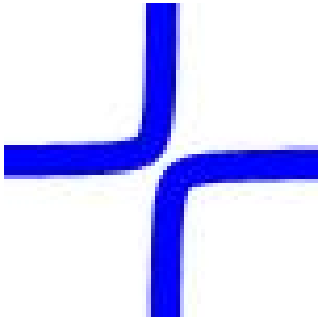


Водопроводные сети (pipe-dreams)

Конструкция

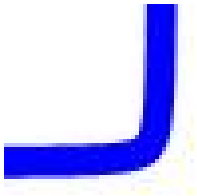
В каждую клетку $n \times n$ таблицы, лежащую над диагональю $i + j = n$, вставляется фрагмент водопровода одного из двух типов:

Пересечение 

Расхождение 

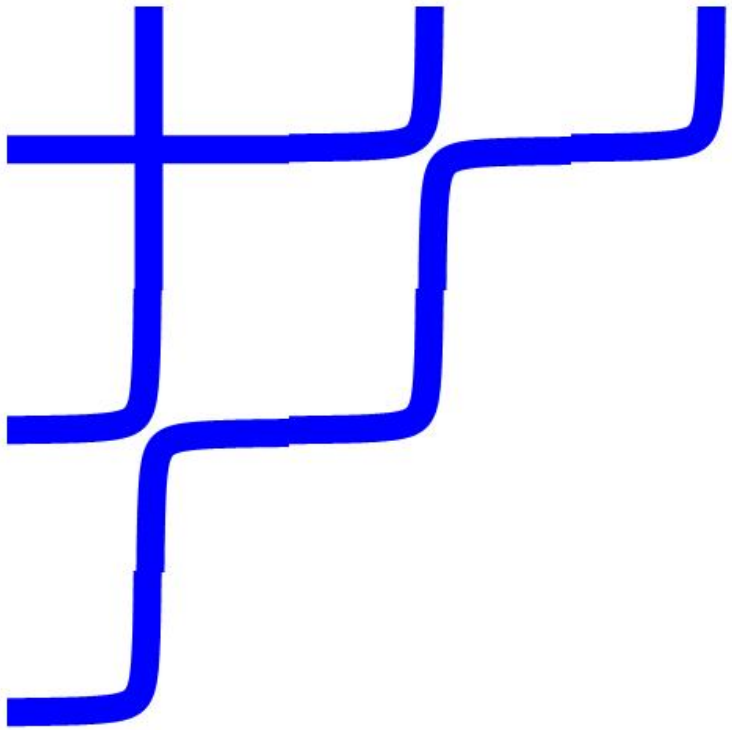
Продолжение

Во все клетки на диагонали $i + j = n$ вставляются фрагменты



Водопроводные сети

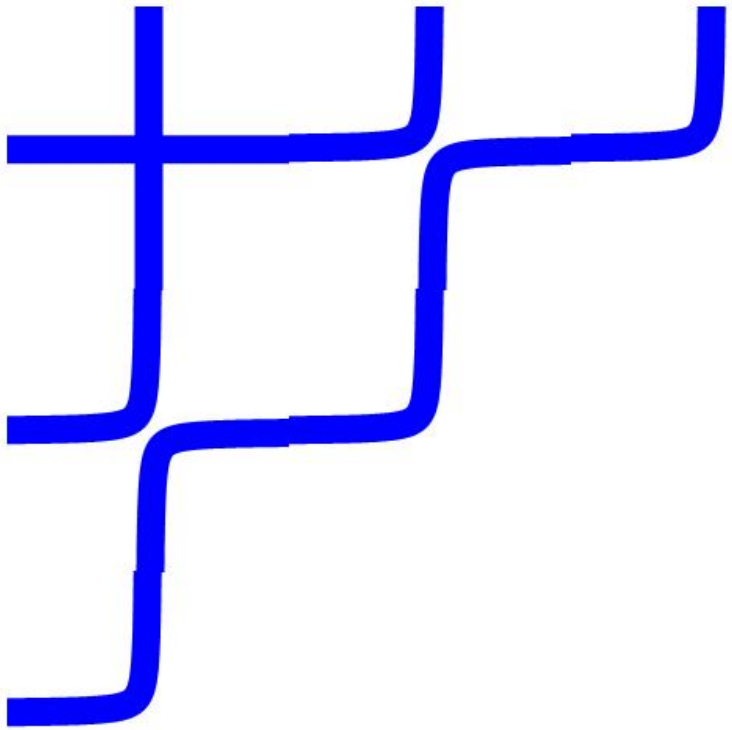
Пример n=3



Водопроводная сеть, реализующая элементарную транспозицию $(1\ 2) \in S_3$.

Водопроводные сети

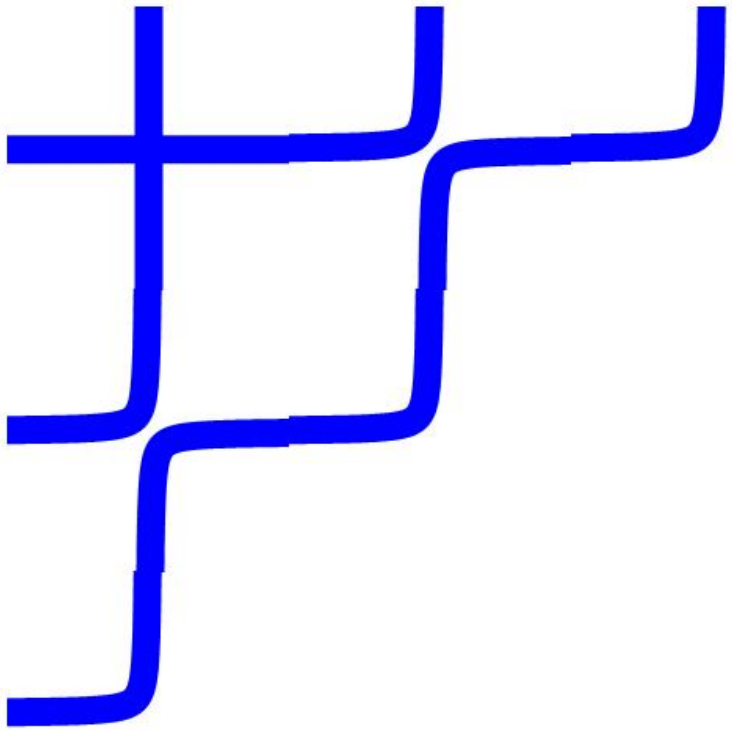
Пример n=3



Водопроводная сеть, реализующая элементарную транспозицию $(1\ 2) \in S_3$.

Водопроводные сети

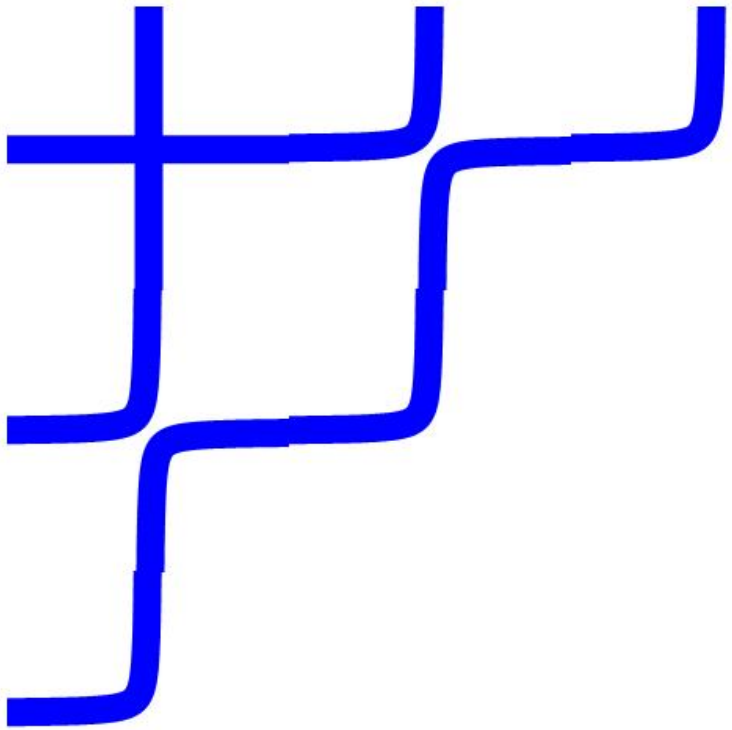
Пример n=3



Водопроводная сеть, реализующая элементарную транспозицию $(1\ 2) \in S_3$.

Водопроводные сети

Пример n=3



Водопроводная сеть, реализующая элементарную транспозицию $(1\ 2) \in S_3$.

Водопроводные сети

Каждой водопроводной сети D можно поставить в соответствие перестановку $w(D) \in S_n$ и моном $x(D) \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$

Определение перестановки

Труба, входящая в столбце i, выходит в строке $w(i)$.

Определение монома

$x(D) = x_1^{\text{число+ в 1-ом ст-це}} \cdot x_2^{\text{число+ во 2-ом ст-це}} \cdot \ldots$
$\cdot x_{n-1}^{\text{число + в } (n-1)\text{-ом ст-це}}$

Водопроводные сети

Каждой водопроводной сети D можно поставить в соответствие перестановку $w(D) \in S_n$ и моном $x(D) \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$

Определение перестановки

Труба, входящая в столбце i, выходит в строке $w(i)$.

Определение монома

$$x(D) = x_1^{\text{число+ в 1-ом ст-це}} \cdot x_2^{\text{число+ во 2-ом ст-це}} \cdot \ldots \cdot x_{n-1}^{\text{число + в } (n-1)\text{-ом ст-це}}$$

Водопроводные сети

Каждой водопроводной сети D можно поставить в соответствие перестановку $w(D) \in S_n$ и моном $x(D) \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$

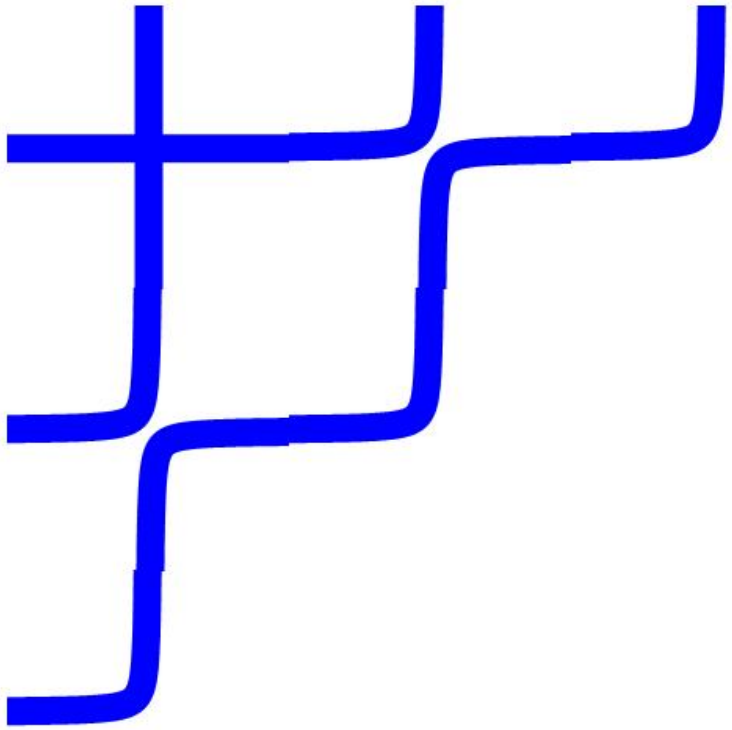
Определение перестановки

Труба, входящая в столбце i, выходит в строке $w(i)$.

Определение монома

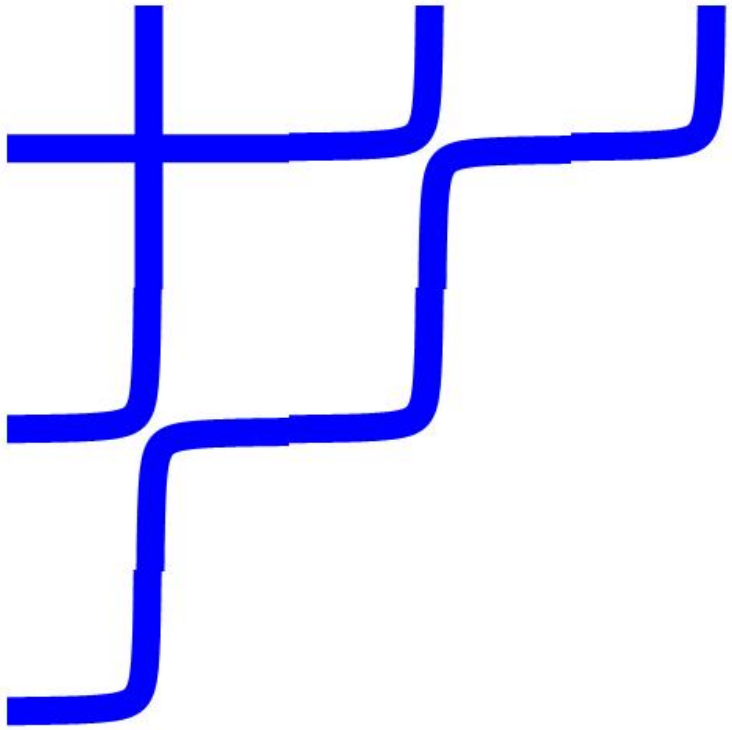
$x(D) = x_1^{\text{число+ в 1-ом ст-це}} \cdot x_2^{\text{число+ во 2-ом ст-це}} \cdot \ldots$
$\cdot x_{n-1}^{\text{число + в } (n-1)\text{-ом ст-це}}$

Водопроводные сети



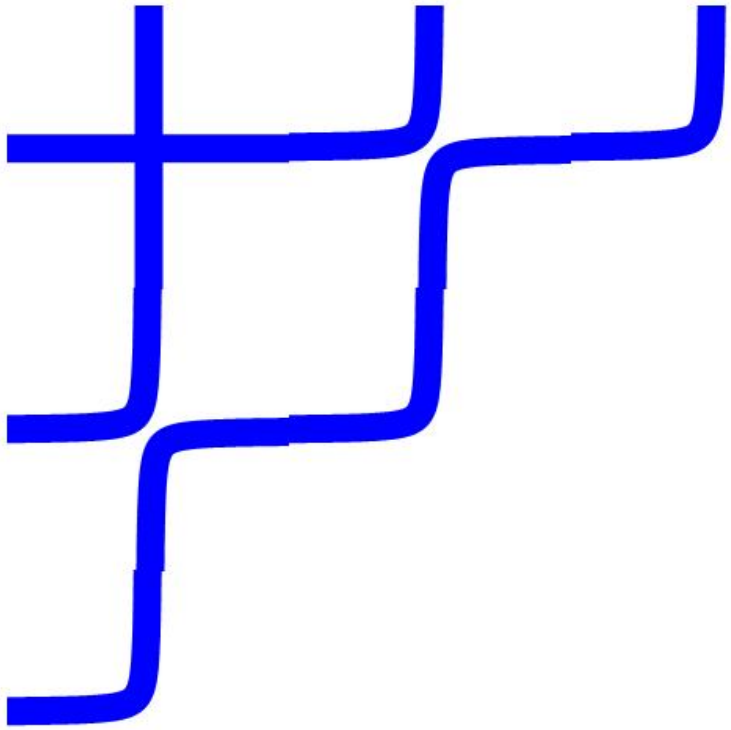
Этой сети соответствует моном x_1.

Водопроводные сети



Этой сети соответствует моном x_1.

Водопроводные сети



Этой сети соответствует моном x_1.

Теорема Кириллова–Фомина

Определение

Водопроводная сеть называется *приведённой*, если никакие две трубы не пересекаются больше одного раза.

Обозначение

$$w_0 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n & (n-1) & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Теорема

$$\mathfrak{S}_w = \sum_{w(D)=w_0 w} x(D),$$

где сумма идёт только по приведённым водопроводным сетям D.

Теорема Кириллова–Фомина

Определение

Водопроводная сеть называется *приведённой*, если никакие две трубы не пересекаются больше одного раза.

Обозначение

$$w_0 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n & (n-1) & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Теорема

$$\mathfrak{S}_w = \sum_{w(D)=w_0 w} x(D),$$

где сумма идёт только по приведённым водопроводным сетям D.

Теорема Кириллова–Фомина

Определение

Водопроводная сеть называется *приведённой*, если никакие две трубы не пересекаются больше одного раза.

Обозначение

$$w_0 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n & (n-1) & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Теорема

$$\mathfrak{S}_w = \sum_{w(D)=w_0 w} x(D),$$

где сумма идёт только по приведённым водопроводным сетям D.