Экзаменационные задачи

1. Сколько прямых в $\mathbb{CP}^4$ пересекает 6 заданных плоскостей в общем положении?

2. (a) В $\mathbb{CP}^2$ заданы две точки и три прямые в общем положении. Сколько существует невырожденных коник, проходящих через заданные точки и касающихся заданных прямых?

(b) Тот же вопрос для одной точки и четырёх прямых.

3. Найти степень многообразия $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$, вложенного по Сегре в $\mathbb{P}^{mn+m+n}$.

4. (a) Рассмотрим поверхность S, полученную раздутием проективной плоскости в двух различных точках. Построить проективное вложение поверхности S минимальной степени и найти его степень.

(b) Тот же вопрос для поверхности, полученной раздутием проективной плоскости в трёх неколлинеарных точках.

Примечание: Поверхности из пунктов (a) и (b) называются *поверхностями дель Пеццо* степени (ответ в (a)) и (ответ в (b)), соответственно.

5. Найдите степень многообразия полных флагов $\mathbb{F}_n$ при вложении Плюккера

$$\mathbb{F}_n \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathbb{C}^n \otimes \Lambda^2\mathbb{C}^n \otimes \ldots \otimes \Lambda^{n-1}\mathbb{C}^n).$$

Указание: может пригодиться тождество Вейля для знаменателя:

$$\sum_{w \in S_n} sgn(w) e^{w(\rho)} = \prod_{i<j} (e^{\frac{x_i - x_j}{2}} - e^{\frac{x_j - x_i}{2}}),$$

где $\rho := \frac{1}{2}\sum_{i<j}(x_i - x_j)$ или тождество для определителя Вандермонда.

6. Сколько невырожденных коник в $\mathbb{CP}^2$ касается пяти данных коник в общем положении?

7. Найти кольцо когомологий *пространства полных коник* (то есть чудесной компактификации пространства невырожденных коник).

8. Найти числа Бетти чудесной компактификации группы $PGL_3(\mathbb{C})$ и показать, что кольцо когомологий этой компактификации не порождается компонентой степени два.

9. Для гладкой торической поверхности S доказать формулу Нётера

$$1 = \frac{c_1(M)^2 + c_2(M)}{12}.$$

Примечание: В левой части формулы Нётера для произвольной поверхности M стоит *арифметический род* $\chi(\mathcal{O}_M) := \sum(-1)^p h^{p,0}(M)$. Арифметический род является бирациональным инвариантом поверхности, поэтому у торических поверхностей он такой же как у $\mathbb{CP}^2$, то есть равен единице.

10. Найти классы Черна многообразия полных флагов $\mathbb{F}_n$.