Статья для школьной энциклопедии

В.А. Кириченко

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ, область *математики*, изучающая геометрические свойства множеств решений систем *алгебраических уравнений*. Методы алгебраической геометрии позволяют переводить геометрическую интуицию (которая, в основном, работает в маленьких *размерностях*) на чисто алгебраический язык. При этом получаются результаты, с одной стороны, более общие, чем только при геометрическом подходе, а с другой стороны, совершенно неожиданные с алгебраической точки зрения. Таким образом, *геометрия* и *алгебра* дополняют и обогащают друг друга.

Основные объекты алгебраической геометрии — это аффинные и проективные многообразия, определяемые как решения систем полиномиальных уравнений в аффинном и *проективном пространствах*, соответственно. Например, *гипербола* на плоскости с координатами (x, y), заданная уравнением $xy = 1$, является аффинным многообразием. Гиперболе соответствует проективное многообразие на *проективной плоскости*, задаваемое в *однородных координатах* $(x : y : z)$ уравнением $xy = z^2$. Это многообразие можно также рассматривать как гиперболу, к которой добавили две "бесконечно удалённые" точки, соответствующие двум её *асимптотам*. Таким образом, переход к проективным многообразиям позволяет изучать поведение аффинного многообразия "на бесконечности".

Методы алгебраической геометрии особенно хорошо работают для многообразий над алгебраически замкнутыми *полями*, например, над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$, поскольку в этом случае геометрические свойства многообразий тесно связаны с алгебраическими свойствами определяющих их систем уравнений. Например, любое уравнение степени 2 от двух комплексных переменных задаёт *кривую* в $\mathbb{C}^2$, тогда как над вещественными числами уравнение $x^2+y^2 = 1$ задаёт кривую (*окружность*), а почти такое же уравнение $x^2+y^2 = -1$ задаёт пустое множество. Однако существуют методы и для изучения многообразий над произвольными полями, в частности, над *конечными полями.* Алгебраическая геометрия над конечными полями тесно связана с теорией чисел, например, с решением сравнений по модулю *простого числа* p, которые можно рассматривать как уравнения над полем *вычетов* по модулю p. В настоящее время также активно развивается вещественная алгебраическая геометрия.

У истоков алгебраической геометрии лежит теория комплексных *алгебраических кривых*, в частности, теория *эллиптических кривых.* Эллиптические кривые стали изучаться в связи с *эллиптическими интегралами.* Ещё в 17 веке Якоб и Иоганн *Бернулли* открыли некоторые замечательные соотношения между эллиптическими интегралами. Более общие соотношения нашёл *Эйлер.* Позднее выяснилось, что эти соотношения следуют из того, что точки эллиптической кривой образуют *группу.* Эйлеру же принадлежала идея использовать рациональную параметризацию кривых второго порядка, т.е. *конических сечений*, для вычисления интегралов по этим кривым. Например, *рациональные функции* $x(t) = \frac{2t}{1+t^2}$ и $y(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ определяют рациональную параметризацию окружности, заданной уравнением $x^2 + y^2 = 1$. С помощью такой параметризации можно вычислить интеграл от функции $f(x, \sqrt{1-x^2})$ для любой рациональной функции f от двух переменных. Вообще, любая алгебраическая кривая в $\mathbb{C}^2$, заданная уравнением степени два, обладает рациональной параметризацией. Для кривых более высокой степени в большинстве случаев уже нельзя построить рациональную параметризацию. Дальнейшее развитие теория алгебраических кривых получила в работах *Абеля* и *Римана.* В частности, Абель перенёс теорию эллиптических интегралов на произвольные алгебраические кривые. Риман начал изучать *топологию* алгебраических кривых, введя понятие *римановой поверхности.* Например, с точки зрения топологии кривая, допускающая рациональную параметризацию, является двумерной *сферой* (возможно, с выколотыми точками).

В конце 19 и начале 20 вв. итальянская школа алгебраических геометров, возглавляемая Энриквесом, Кастельнуово и Севери, добилась больших успехов в изучении комплексных *поверхностей*, т.е. проективных многообразий размерности два над полем комплексных чисел. При этом многие полученные результаты, хотя и формулировались для поверхностей, были верны в произвольной размерности. Итальянская школа использовала геометрический подход. Позднее, в работах Зарисского и Андре Вейля наметился сдвиг в сторону алгебры, и к 70-ым годам

20 века многие понятия алгебраической геометрии, в частности, понятия аффинного и проективного многообразий, были переведены на чисто алгебраический язык. Существенную роль в этом сыграли работы Гротендика.

Литература:

[1] Г. Клеменс “Мозаика теории комплексных кривых”, Москва, “Мир”, 1984

[2] И.Р. Шафаревич “Основы алгебраической геометрии”, Москва, “Наука”, 1988