Коники, касающиеся пяти данных

В.А. Кириченко*

*Факультет математики и Лаборатория алгебраической геометрии и её приложений,
Национальный исследовательский университет Высшая Школа Экономики
и
Институт проблем передачи информации им. Харкевича РАН

7 мая 2012 г.

Часть 1: элементарная

Элементарное решение двух задач исчислительной геометрии (на уровне строгости 19 века).

Задача Шуберта о четырёх прямых

Задача Штейнера о пяти кониках

Часть 1: элементарная

Элементарное решение двух задач исчислительной геометрии (на уровне строгости 19 века).

Задача Шуберта о четырёх прямых

Задача Штейнера о пяти кониках

Часть 1: элементарная

Элементарное решение двух задач исчислительной геометрии (на уровне строгости 19 века).

Задача Шуберта о четырёх прямых

Задача Штейнера о пяти кониках

Задача Аполлония

Сколько окружностей касается трёх заданных окружностей на плоскости?

Ответ

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8 или бесконечно много

Исчислительная геометрия

Задача Аполлония

Сколько окружностей касается трёх заданных окружностей на плоскости?

Ответ

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8 или бесконечно много

Исчислительная геометрия

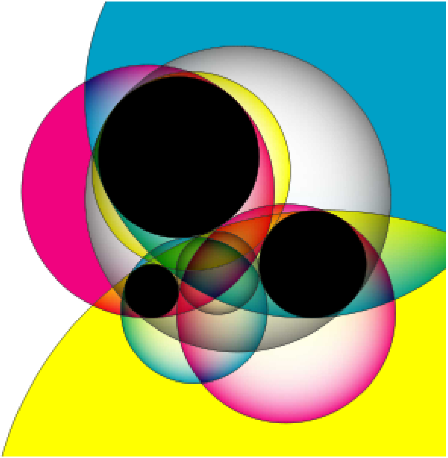


Рисунок из Википедии http://en.wikipedia.org/wiki/Circles_of_Apollonius

Цель

Нас интересуют только те конфигурации, для которых ответ — максимальный конечный. Его и нужно найти.

Мотивировка

В задачах *комплексной* исчислительной геометрии *почти все* конфигурации дают максимальный конечный ответ.

Исчислительная геометрия

Цель

Нас интересуют только те конфигурации, для которых ответ — максимальный конечный. Его и нужно найти.

Мотивировка

В задачах *комплексной* исчислительной геометрии *почти все* конфигурации дают максимальный конечный ответ.

Задача Шуберта

Сколько прямых проходит через четыре заданные прямые в 3-хмерном пространстве?

Ответ

2

Исчислительная геометрия

Задача Шуберта

Сколько прямых проходит через четыре заданные прямые в 3-хмерном пространстве?

Ответ

2

Исчислительная геометрия

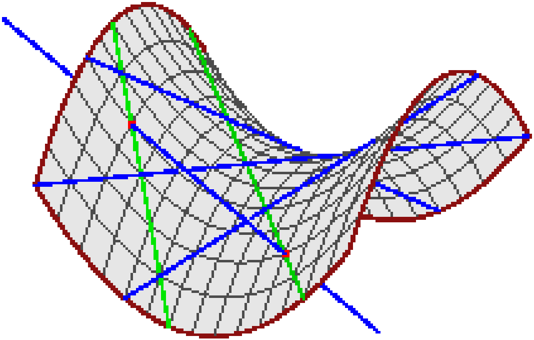


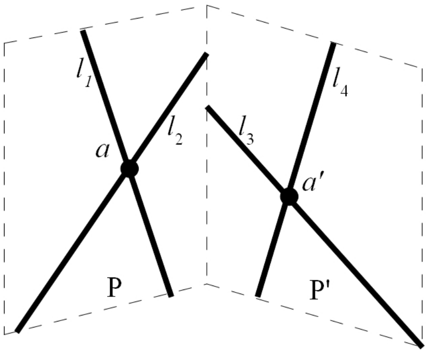
Рисунок Frank Sottile

http://www.math.tamu.edu/ sottile/research/stories/connections.html

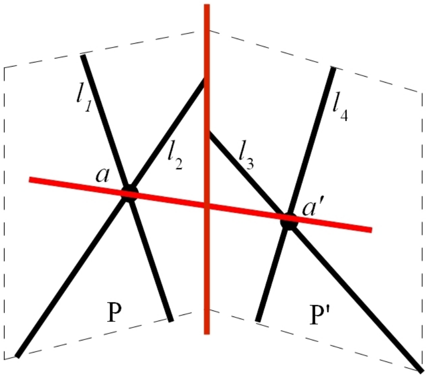
Исчислительная геометрия

Герман Шуберт (1848-1911), немецкий математик

Исчислительная геометрия



Исчислительная геометрия



Метод Шуберта

- Найти ответ для простой конфигурации
- Воспользоваться *принципом сохранения числа*.

Метод Шуберта

- Найти ответ для простой конфигурации
- Воспользоваться *принципом сохранения числа*.

Метод Шуберта

- Найти ответ для простой конфигурации
- Воспользоваться *принципом сохранения числа*.

Исчислительная геометрия в современной математике

- Алгебраическая геометрия
- Теория пересечений
- Алгебраическая комбинаторика
- Теория струн
- Исчисление Шуберта

Исчислительная геометрия в современной математике

- Алгебраическая геометрия
- Теория пересечений
- Алгебраическая комбинаторика
- Теория струн
- Исчисление Шуберта

Исчислительная геометрия в современной математике

- Алгебраическая геометрия
- Теория пересечений
- Алгебраическая комбинаторика
- Теория струн
- Исчисление Шуберта

Исчислительная геометрия в современной математике

- Алгебраическая геометрия
- Теория пересечений
- Алгебраическая комбинаторика
- Теория струн
- Исчисление Шуберта

Исчислительная геометрия в современной математике

- Алгебраическая геометрия
- Теория пересечений
- Алгебраическая комбинаторика
- Теория струн
- Исчисление Шуберта

Основная теорема алгебры

Определение

Многочлен $f(x)$ степени n — это

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0,$$

где $a_n \neq 0$.

Вопрос

Сколько корней имеет многочлен степени n?

Ответ над $\mathbb{R}$

Не больше чем n.

Ответ над $\mathbb{C}$

Ровно n (с учётом кратностей).

Основная теорема алгебры

Определение

Многочлен $f(x)$ степени n — это

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0,$$

где $a_n \neq 0$.

Вопрос

Сколько корней имеет многочлен степени n?

Ответ над $\mathbb{R}$

Не больше чем n.

Ответ над $\mathbb{C}$

Ровно n (с учётом кратностей).

Основная теорема алгебры

Определение

Многочлен $f(x)$ степени n — это

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0,$$

где $a_n \neq 0$.

Вопрос

Сколько корней имеет многочлен степени n?

Ответ над $\mathbb{R}$

Не больше чем n.

Ответ над $\mathbb{C}$

Ровно n (с учётом кратностей).

Основная теорема алгебры

Определение

Многочлен $f(x)$ степени n — это

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0,$$

где $a_n \neq 0$.

Вопрос

Сколько корней имеет многочлен степени n?

Ответ над $\mathbb{R}$

Не больше чем n.

Ответ над $\mathbb{C}$

Ровно n (с учётом кратностей).

Основная теорема алгебры

Пример $n = 2$

Квадратный многочлен $f(x) = x^2 + px + q$, где $p, q \in \mathbb{R}$

Дискриминант

$D = p^2 - 4q$

- $D > 0$ — два различных вещественных корня
- $D = 0$ — один вещественный корень кратности два
- $D < 0$ — нет вещественных корней

Основная теорема алгебры

Пример $n = 2$

Квадратный многочлен $f(x) = x^2 + px + q$, где $p, q \in \mathbb{R}$

Дискриминант

$D = p^2 - 4q$

- $D > 0$ — два различных вещественных корня
- $D = 0$ — один вещественный корень кратности два
- $D < 0$ — нет вещественных корней

Основная теорема алгебры

Пример $n = 2$

Квадратный многочлен $f(x) = x^2 + px + q$, где $p, q \in \mathbb{R}$

Дискриминант

$D = p^2 - 4q$

- $D > 0$ — два различных вещественных корня
- $D = 0$ — один вещественный корень кратности два
- $D < 0$ — нет вещественных корней

Основная теорема алгебры

Пример $n = 2$

Квадратный многочлен $f(x) = x^2 + px + q$, где $p, q \in \mathbb{R}$

Дискриминант

$D = p^2 - 4q$

- $D > 0$ — два различных вещественных корня
- $D = 0$ — один вещественный корень кратности два
- $D < 0$ — нет вещественных корней

Пример $n = 2$

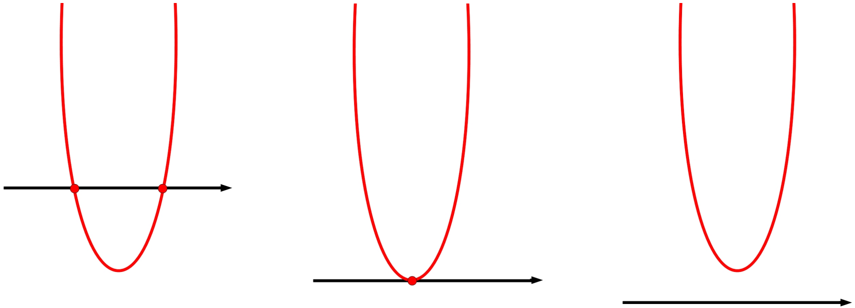
Квадратный многочлен $f(x) = x^2 + px + q$, где $p, q \in \mathbb{R}$

Дискриминант

$D = p^2 - 4q$

- $D > 0$ — два различных вещественных корня
- $D = 0$ — один вещественный корень кратности два
- $D < 0$ — нет вещественных корней

Основная теорема алгебры



$D > 0$ $D = 0$ $D < 0$

Принцип сохранения числа

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — многочлены степени n.

Локальный принцип сохранения числа (над $\mathbb{R}$ и над $\mathbb{C}$)

Если f не имеет кратных корней (т.е. график $\{y = f(x)\}$ не касается оси x), то при достаточно маленьком ε многочлены f и $f + \varepsilon g$ имеют одинаковое число корней.

Глобальный принцип сохранения числа (только над $\mathbb{C}$)

Если f и g не имеют кратных корней, то они имеют одинаковое число корней.

Принцип сохранения числа

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — многочлены степени n.

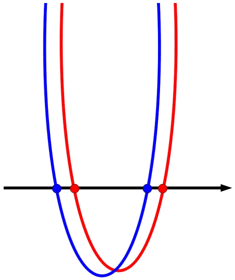
Локальный принцип сохранения числа (над $\mathbb{R}$ и над $\mathbb{C}$)

Если f не имеет кратных корней (т.е. график $\{y = f(x)\}$ не касается оси x), то при достаточно маленьком ε многочлены f и $f + \varepsilon g$ имеют одинаковое число корней.

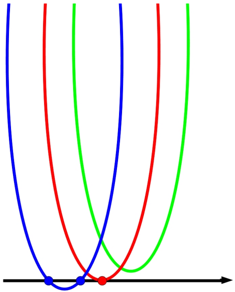
Глобальный принцип сохранения числа (только над $\mathbb{C}$)

Если f и g не имеют кратных корней, то они имеют одинаковое число корней.

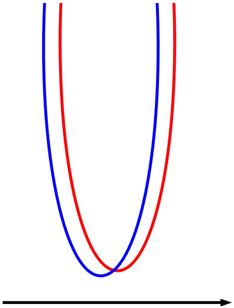
Принцип сохранения числа



$D > 0$



$D = 0$



$D < 0$

Принцип сохранения числа

Пример

$f(x) = x^n - a$, где $a \in \mathbb{R}$

Кратные корни

$a = 0$ — корень кратности n
$a \neq 0$ — нет кратных корней

- На вещественной прямой (с координатой a) нельзя пройти из точки $a = 1$ в точку $a = -1$, не проходя через точку $a = 0$.
- На комплексной прямой— можно.

Принцип сохранения числа

Пример

$f(x) = x^n - a$, где $a \in \mathbb{R}$

Кратные корни

$a = 0$ — корень кратности n
$a \neq 0$ — нет кратных корней

- На вещественной прямой (с координатой a) нельзя пройти из точки $a = 1$ в точку $a = -1$, не проходя через точку $a = 0$.
- На комплексной прямой— можно.

Принцип сохранения числа

Пример

$f(x) = x^n - a$, где $a \in \mathbb{R}$

Кратные корни

$a = 0$ — корень кратности n

$a \neq 0$ — нет кратных корней

- На вещественной прямой (с координатой a) нельзя пройти из точки $a = 1$ в точку $a = -1$, не проходя через точку $a = 0$.
- На комплексной прямой— можно.

Принцип сохранения числа

Пример

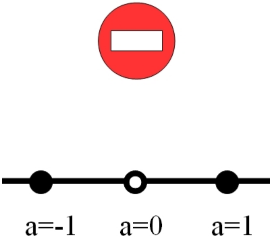
$f(x) = x^n - a$, где $a \in \mathbb{R}$

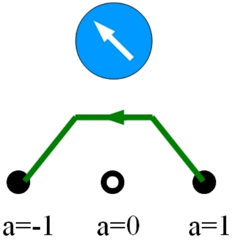
Кратные корни

$a = 0$ — корень кратности n
$a \neq 0$ — нет кратных корней

- На вещественной прямой (с координатой a) нельзя пройти из точки $a = 1$ в точку $a = -1$, не проходя через точку $a = 0$.
- На комплексной прямой— можно.

Принцип сохранения числа

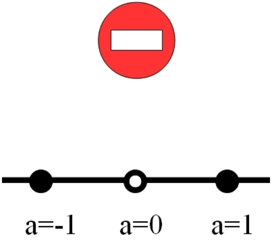


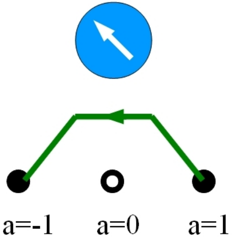


Над $\mathbb{R}$

Над $\mathbb{C}$

Принцип сохранения числа

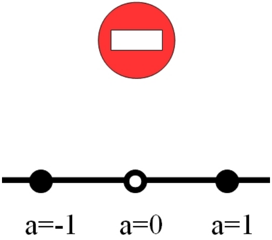


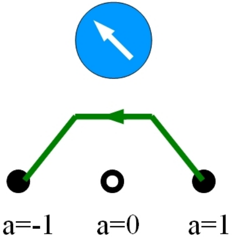


Над $\mathbb{R}$

Над $\mathbb{C}$

Принцип сохранения числа





Над $\mathbb{R}$

Над $\mathbb{C}$

Исчисление условий (исчисление Шуберта)

Условия в задаче о 4-х прямых

Условия σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 на прямую l:
условие σ_i выполнено, если прямая l пересекает прямую l_i

Сложение условий

$\sigma_1 + \sigma_2 = (\sigma_1$ или $\sigma_2)$ — *дизъюнкция*

Умножение условий

$\sigma_1 \cdot \sigma_2 = (\sigma_1$ и $\sigma_2)$ — *конъюнкция*

Пример

$\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 \cdot \sigma_4$ — условие, что прямая l пересекает все четыре прямые l_1, l_2, l_3, l_4

Исчисление условий (исчисление Шуберта)

Условия в задаче о 4-х прямых

Условия σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 на прямую l:
условие σ_i выполнено, если прямая l пересекает прямую l_i

Сложение условий

$\sigma_1 + \sigma_2 = (\sigma_1$ или $\sigma_2)$ — *дизъюнкция*

Умножение условий

$\sigma_1 \cdot \sigma_2 = (\sigma_1$ и $\sigma_2)$ — *конъюнкция*

Пример

$\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 \cdot \sigma_4$ — условие, что прямая l пересекает все четыре прямые l_1, l_2, l_3, l_4

Исчисление условий (исчисление Шуберта)

Условия в задаче о 4-х прямых

Условия $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ на прямую l:
условие σ_i выполнено, если прямая l пересекает прямую l_i

Сложение условий

$\sigma_1 + \sigma_2 = (\sigma_1$ или $\sigma_2)$ — *дизъюнкция*

Умножение условий

$\sigma_1 \cdot \sigma_2 = (\sigma_1$ и $\sigma_2)$ — *конъюнкция*

Пример

$\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 \cdot \sigma_4$ — условие, что прямая l пересекает все четыре прямые l_1, l_2, l_3, l_4

Исчисление условий (исчисление Шуберта)

Условия в задаче о 4-х прямых

Условия σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 на прямую l:
условие σ_i выполнено, если прямая l пересекает прямую l_i

Сложение условий

$\sigma_1 + \sigma_2 = (\sigma_1 \text{ или } \sigma_2)$ — *дизъюнкция*

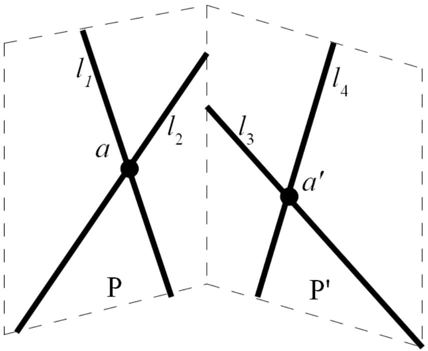
Умножение условий

$\sigma_1 \cdot \sigma_2 = (\sigma_1 \text{ и } \sigma_2)$ — *конъюнкция*

Пример

$\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 \cdot \sigma_4$ — условие, что прямая l пересекает все четыре прямые l_1, l_2, l_3, l_4

Исчисление условий (исчисление Шуберта)



Исчисление условий (исчисление Шуберта)

Условия в задаче о 4-х прямых

ρ_a = условие, что прямая l проходит через точку a
τ_P = условие, что прямая l лежит в плоскости P

Тождество

$\sigma_1 \cdot \sigma_2 = \rho_a + \tau_P$
выполнено для двух пересекающихся прямых l_1 и l_2 (здесь a — точка пересечения, P — плоскость, содержащая обе прямые)

Исчисление условий (исчисление Шуберта)

Условия в задаче о 4-х прямых

ρ_a = условие, что прямая l проходит через точку a
τ_P = условие, что прямая l лежит в плоскости P

Тождество

$\sigma_1 \cdot \sigma_2 = \rho_a + \tau_P$
выполнено для двух пересекающихся прямых l_1 и l_2 (здесь a — точка пересечения, P — плоскость, содержащая обе прямые)

Исчисление условий (исчисление Шуберта)

Эквивалентные условия

$\rho_a \sim \rho_{a'}$ для любых двух точек a и a'
$\sigma_1 \sim \sigma_2$ для любых двух прямых l_1 и l_2
$\tau_P \sim \tau_{P'}$ для любых двух плоскостей P и P'

Тождество

$\sigma_1 \cdot \sigma_2 \sim \rho_a + \tau_P$
выполнено для любых двух прямых l_1 и l_2 (здесь a — произвольная точка, P — произвольная плоскость)

Обоснование

Использует *кольцо когомологий* или *кольцо Чжоу* комплексного *грассманиана* прямых в 3-хмерном *проективном пространстве*

Исчисление условий (исчисление Шуберта)

Эквивалентные условия

$\rho_a \sim \rho_{a'}$ для любых двух точек a и a'
$\sigma_1 \sim \sigma_2$ для любых двух прямых l_1 и l_2
$\tau_P \sim \tau_{P'}$ для любых двух плоскостей P и P'

Тождество

$\sigma_1 \cdot \sigma_2 \sim \rho_a + \tau_P$
выполнено для любых двух прямых l_1 и l_2 (здесь a — произвольная точка, P — произвольная плоскость)

Обоснование

Использует *кольцо когомологий* или *кольцо Чжоу* комплексного *грассманиана* прямых в 3-хмерном *проективном пространстве*

Исчисление условий (исчисление Шуберта)

Эквивалентные условия

$\rho_a \sim \rho_{a'}$ для любых двух точек a и a'
$\sigma_1 \sim \sigma_2$ для любых двух прямых l_1 и l_2
$\tau_P \sim \tau_{P'}$ для любых двух плоскостей P и P'

Тождество

$\sigma_1 \cdot \sigma_2 \sim \rho_a + \tau_P$
выполнено для любых двух прямых l_1 и l_2 (здесь a — произвольная точка, P — произвольная плоскость)

Обоснование

Использует *кольцо когомологий* или *кольцо Чжоу* комплексного *грассманиана* прямых в 3-хмерном *проективном пространстве*

Исчисление условий (исчисление Шуберта)

Умножение *классов эквивалентности* условий

$[\sigma_1]^2 = [\sigma_1 \cdot \sigma_2]$, где l_1 и l_2 — в общем положении (то есть не лежат в одной плоскости).

Предупреждение

$[\sigma_1]^2 \neq [\sigma_1^2]$ (так как $\sigma_1^2 = \sigma_1$)

Исчисление условий (исчисление Шуберта)

Умножение *классов эквивалентности* условий

$[\sigma_1]^2 = [\sigma_1 \cdot \sigma_2]$, где l_1 и l_2 — в общем положении (то есть не лежат в одной плоскости).

Предупреждение

$[\sigma_1]^2 \neq [\sigma_1^2]$ (так как $\sigma_1^2 = \sigma_1$)

Исчисление условий (исчисление Шуберта)

Решение задачи о 4-х прямых

- $[\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4] = [\sigma_1]^4$
- $[\sigma_1]^4 = ([\rho_a] + [\tau_P])^2 = [\rho_a]^2 + 2[\rho_a][\tau_P] + [\tau_P]^2$
- $[\rho_a]^2 = [\tau_P]^2 = 1,\ [\rho_a\tau_P] = 0$

Ответ

$$[\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4] = 2$$

Исчисление условий (исчисление Шуберта)

Решение задачи о 4-х прямых

- $[\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4] = [\sigma_1]^4$
- $[\sigma_1]^4 = ([\rho_a] + [\tau_P])^2 = [\rho_a]^2 + 2[\rho_a][\tau_P] + [\tau_P]^2$
- $[\rho_a]^2 = [\tau_P]^2 = 1, \ [\rho_a\tau_P] = 0$

Ответ

$$[\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4] = 2$$

Исчисление условий (исчисление Шуберта)

Решение задачи о 4-х прямых

- $[\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4] = [\sigma_1]^4$
- $[\sigma_1]^4 = ([\rho_a] + [\tau_P])^2 = [\rho_a]^2 + 2[\rho_a][\tau_P] + [\tau_P]^2$
- $[\rho_a]^2 = [\tau_P]^2 = 1,\ [\rho_a\tau_P] = 0$

Ответ

$$[\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4] = 2$$

Исчисление условий (исчисление Шуберта)

Решение задачи о 4-х прямых

- $[\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4] = [\sigma_1]^4$
- $[\sigma_1]^4 = ([\rho_a] + [\tau_P])^2 = [\rho_a]^2 + 2[\rho_a][\tau_P] + [\tau_P]^2$
- $[\rho_a]^2 = [\tau_P]^2 = 1,\ [\rho_a\tau_P] = 0$

Ответ

$$[\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4] = 2$$

Исчисление условий (исчисление Шуберта)

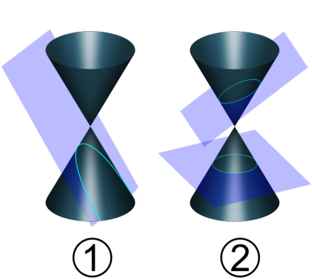
Решение задачи о 4-х прямых

- $[\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4] = [\sigma_1]^4$
- $[\sigma_1]^4 = ([\rho_a] + [\tau_P])^2 = [\rho_a]^2 + 2[\rho_a][\tau_P] + [\tau_P]^2$
- $[\rho_a]^2 = [\tau_P]^2 = 1,\ [\rho_a\tau_P] = 0$

Ответ

$$[\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4] = 2$$

Коники



1. парабола
2. эллипс
3. гипербола

Рисунок из Википедии http://en.wikipedia.org/wiki/Conics

Коники

Определение

Кривая на плоскости, заданная уравнением

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

называется *кривой второго порядка* или *коникой*, если a, b и c не равны нулю одновременно.

Определение

Коника называется *невырожденной*, если многочлен

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$$

неприводим, то есть не раскладывается на линейные множители.

Коники

Определение

Кривая на плоскости, заданная уравнением

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

называется *кривой второго порядка* или *коникой*, если a, b и c не равны нулю одновременно.

Определение

Коника называется *невырожденной*, если многочлен

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$$

неприводим, то есть не раскладывается на линейные множители.

Коники

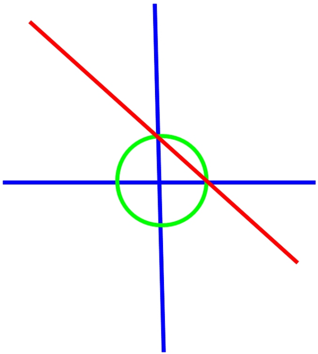
Пример:
вырожденные коники:

$$\{xy = 0\},$$

$$\{(x + y - 1)^2 = 0\},$$

невырожденные:

$$\{x^2 + y^2 - 1 = 0\}.$$



Коники

Задача Штейнера

Сколько невырожденных коник касается данных пяти коник?

Неверный ответ Штейнера (1848)

7776 ($=6^5$)

Ответ де Жонкьера (1859)

3264 (не опубликован)

Ответ Шаля (1864)

3264

Коники

Задача Штейнера

Сколько невырожденных коник касается данных пяти коник?

Неверный ответ Штейнера (1848)

7776 $(=6^5)$

Ответ де Жонкьера (1859)

3264 (не опубликован)

Ответ Шаля (1864)

3264

Коники

Задача Штейнера

Сколько невырожденных коник касается данных пяти коник?

Неверный ответ Штейнера (1848)

7776 (=6^5)

Ответ де Жонкьера (1859)

3264 (не опубликован)

Ответ Шаля (1864)

3264

Коники

Задача Штейнера

Сколько невырожденных коник касается данных пяти коник?

Неверный ответ Штейнера (1848)

7776 ($=6^5$)

Ответ де Жонкьера (1859)

3264 (не опубликован)

Ответ Шаля (1864)

3264

Задача Штейнера о 5-ти кониках

Якоб Штейнер (1796 - 1863),
немецкий математик

Задача Штейнера о 5-ти кониках

Эрнест де Жонкьер (1820-1901), французский математик

Задача Штейнера о 5-ти кониках

Мишель Шаль (1793-1880),
французский математик

Задача Штейнера о 5-ти кониках

Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5 — коники

Условия на коники

Условие $\varkappa_i$ на невырожденную конику C:
$\varkappa_i$ выполнено, если коника C касается коники Q_i

Эквивалентные условия

$\varkappa_1 \sim \varkappa_2$ для любых двух невырожденных коник Q_1 и Q_2

Обозначения

Будем обозначать условия $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_5$ одной и той же буквой $\varkappa$.

Задача Штейнера о 5-ти кониках

Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5 — коники

Условия на коники

Условие $\varkappa_i$ на невырожденную конику C:
$\varkappa_i$ выполнено, если коника C касается коники Q_i

Эквивалентные условия

$\varkappa_1 \sim \varkappa_2$ для любых двух невырожденных коник Q_1 и Q_2

Обозначения

Будем обозначать условия $\varkappa_1, \dots, \varkappa_5$ одной и той же буквой $\varkappa$.

Задача Штейнера о 5-ти кониках

Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5 — коники

Условия на коники

Условие $\varkappa_i$ на невырожденную конику C:
$\varkappa_i$ выполнено, если коника C касается коники Q_i

Эквивалентные условия

$\varkappa_1 \sim \varkappa_2$ для любых двух невырожденных коник Q_1 и Q_2

Обозначения

Будем обозначать условия $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_5$ одной и той же буквой $\varkappa$.

Задача Штейнера о 5-ти кониках

Самые простые условия на коники

Условие $\mu \Leftrightarrow$ коника C проходит через данную точку
Условие $\nu \Leftrightarrow$ коника C касается данной прямой

Ключевой факт

Условие κ можно выразить через μ и ν, то есть найдутся m и n, такие что $\kappa = m\mu + n\nu$.

Следствие

$$\kappa^5 = (m\mu + n\nu)^5 =$$
$$m^5\mu^5 + 5m^4n\mu^4\nu + 10m^3n^2\mu^3\nu^2 + 10m^2n^3\mu^2\nu^3 + 5mn^4\mu\nu^4 + n^5\nu^5$$

Задача Штейнера о 5-ти кониках

Самые простые условия на коники

Условие $\mu \Leftrightarrow$ коника C проходит через данную точку
Условие $\nu \Leftrightarrow$ коника C касается данной прямой

Ключевой факт

Условие κ можно выразить через μ и ν, то есть найдутся m и n, такие что $\kappa = m\mu + n\nu$.

Следствие

$\kappa^5 = (m\mu + n\nu)^5 =$
$m^5\mu^5 + 5m^4n\mu^4\nu + 10m^3n^2\mu^3\nu^2 + 10m^2n^3\mu^2\nu^3 + 5mn^4\mu\nu^4 + n^5\nu^5$

Задача Штейнера о 5-ти кониках

Самые простые условия на коники

Условие $\mu \Leftrightarrow$ коника C проходит через данную точку
Условие $\nu \Leftrightarrow$ коника C касается данной прямой

Ключевой факт

Условие κ можно выразить через μ и ν, то есть найдутся m и n, такие что $\kappa = m\mu + n\nu$.

Следствие

$$\kappa^5 = (m\mu + n\nu)^5 =$$
$$m^5\mu^5 + 5m^4n\mu^4\nu + 10m^3n^2\mu^3\nu^2 + 10m^2n^3\mu^2\nu^3 + 5mn^4\mu\nu^4 + n^5\nu^5$$

Задача Штейнера о 5-ти кониках

Произведения самых простых условий

$\mu^k \nu^{5-k}$ = условие, что коника проходит через k данных точек и касается $(5-k)$ данных прямых $(k = 0, \ldots, 5)$

Упражнение

$\mu^5 = \nu^5 = 1$, $\mu^4 \nu = \mu \nu^4 = 2$, $\mu^3 \nu^2 = \mu^2 \nu^3 = 4$

Следствие

$$\kappa^5 = m^5 + 10m^4 n + 40m^3 n^2 + 40m^2 n^3 + 10mn^4 + n^5$$

Задача Штейнера о 5-ти кониках

Произведения самых простых условий

$\mu^k \nu^{5-k}$ = условие, что коника проходит через k данных точек и касается $(5-k)$ данных прямых $(k = 0, \ldots, 5)$

Упражнение

$\mu^5 = \nu^5 = 1$, $\mu^4\nu = \mu\nu^4 = 2$, $\mu^3\nu^2 = \mu^2\nu^3 = 4$

Следствие

$$\kappa^5 = m^5 + 10m^4n + 40m^3n^2 + 40m^2n^3 + 10mn^4 + n^5$$

Задача Штейнера о 5-ти кониках

Произведения самых простых условий

$\mu^k \nu^{5-k}$ = условие, что коника проходит через k данных точек и касается $(5-k)$ данных прямых $(k = 0,\ldots,5)$

Упражнение

$\mu^5 = \nu^5 = 1,\ \mu^4\nu = \mu\nu^4 = 2,\ \mu^3\nu^2 = \mu^2\nu^3 = 4$

Следствие

$$\kappa^5 = m^5 + 10m^4n + 40m^3n^2 + 40m^2n^3 + 10mn^4 + n^5$$

Осталось найти m и n.

Трюк Шуберта

Вместо условия касания κ_Q с невырожденной коникой Q, найдём условие касания с вырожденной коникой Q_0.

Задача Штейнера о 5-ти кониках

Пример:

$$Q = \{xy = 1\}$$

$$Q_0 = \{xy = 0\}$$

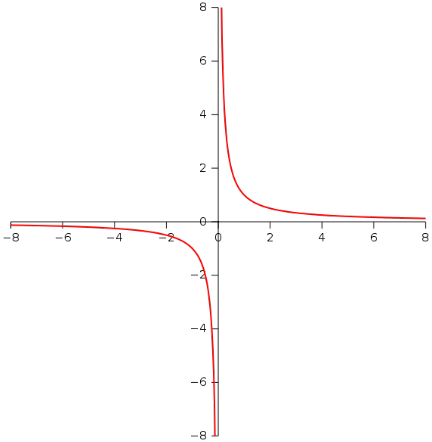


Рисунок из Википедии http://en.wikipedia.org/wiki/Hyperbola

Задача Штейнера о 5-ти кониках

Вычисление

$$\varkappa_{Q_0} = \mu + 2\nu$$

$$\varkappa_{Q} = m\mu + n\nu$$

При этом вырожденная коника Q_0 очень хорошо приближает невырожденную конику Q вдали от начала координат. Поэтому $n = 2$.

Задача Штейнера о 5-ти кониках

Упражнение

$$m = n$$

Указание

Условие ν на конику Q эквивалентно условию μ на *двойственную конику* Q^*. (*Двойственной коникой* Q^* к данной конике Q называется множество касательных прямых к Q, рассматриваемых как точки на двойственной проективной плоскости).

Следствие

$\kappa^5 = m^5 + 10m^4n + 40m^3n^2 + 40m^2n^3 + 10mn^4 + n^5 =$
$= 2^5(1 + 10 + 40 + 40 + 10 + 1) = 2^5 \cdot 102 = 3264.$

Задача Штейнера о 5-ти кониках

Упражнение

$$m = n$$

Указание

Условие ν на конику Q эквивалентно условию μ на *двойственную конику* Q^*. (*Двойственной коникой* Q^* к данной конике Q называется множество касательных прямых к Q, рассматриваемых как точки на двойственной проективной плоскости).

Следствие

$\kappa^5 = m^5 + 10m^4n + 40m^3n^2 + 40m^2n^3 + 10mn^4 + n^5 =$
$= 2^5(1 + 10 + 40 + 40 + 10 + 1) = 2^5 \cdot 102 = 3264.$

Задача Штейнера о 5-ти кониках

Упражнение

$$m = n$$

Указание

Условие ν на конику Q эквивалентно условию μ на *двойственную конику* Q^*. (*Двойственной коникой* Q^* к данной конике Q называется множество касательных прямых к Q, рассматриваемых как точки на двойственной проективной плоскости).

Следствие

$\kappa^5 = m^5 + 10m^4n + 40m^3n^2 + 40m^2n^3 + 10mn^4 + n^5 =$
$= 2^5(1 + 10 + 40 + 40 + 10 + 1) = 2^5 \cdot 102 = 3264.$

Задача о 5-ти кониках: вещественный случай

Ronga, Tognoli, Vust (1997)

Существует конфигурация из пяти гипербол, для которой все 3264 коники оказываются вещественными.

Welschinger (2005)

Для любой конфигурации из пяти эллипсов с непересекающимися внутренностями, найдутся по крайней мере 32 вещественных коники, касающиеся всех пяти эллипсов.

Задача о 5-ти кониках: вещественный случай

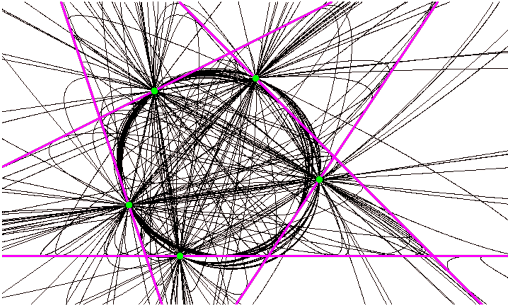
Ronga, Tognoli, Vust (1997)

Существует конфигурация из пяти гипербол, для которой все 3264 коники оказываются вещественными.

Welschinger (2005)

Для любой конфигурации из пяти эллипсов с непересекающимися внутренностями, найдутся по крайней мере 32 вещественных коники, касающиеся всех пяти эллипсов.

Задача о 5-ти кониках: вещественный случай

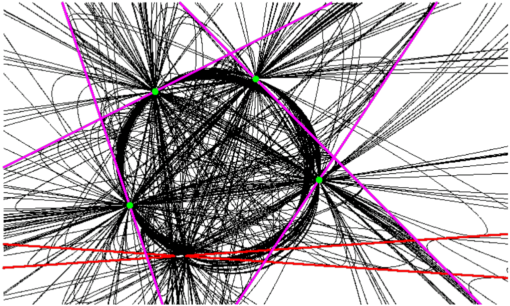


102 коники

Рисунок Frank Sottile

http://www.math.tamu.edu/ sottile/research/stories/3264/

Задача о 5-ти кониках: вещественный случай



204 коники

Рисунок Frank Sottile

http://www.math.tamu.edu/ sottile/research/stories/3264/

Задача о 5-ти кониках: характеристика 2

Vainsencher (1978)

Над алгебраически замкнутым полем характеристики 2 максимальное конечное число невырожденных коник, касающихся пяти данных, равно 51.

Часть 2: алгебро-геометрическая

Обоснование решений из части 1 с помощью алгебраической геометрии.

Задача Шуберта о четырёх прямых

Задача Штейнера о пяти кониках

Часть 2: алгебро-геометрическая

Обоснование решений из части 1 с помощью алгебраической геометрии.

Задача Шуберта о четырёх прямых

Задача Штейнера о пяти кониках

Часть 2: алгебро-геометрическая

Обоснование решений из части 1 с помощью алгебраической геометрии.

Задача Шуберта о четырёх прямых

Задача Штейнера о пяти кониках

Задача о четырёх прямых: грассманиан $G(2,4)$

Наблюдение

Прямая в $\mathbb{CP}^3$ = плоскость в $\mathbb{C}^4$

Определение

Грассманиан $G(2,4) := $ множество плоскостей в $\mathbb{C}^4$

Факт

Грассманиан $G(2,4)$ — алгебраическое многообразие, изоморфное невырожденной квадрике в $\mathbb{P}^5$ (*квадрика Плюккера*)

Упражнение

Образ *вложения Плюккера*

$$p : G(2,4) \to \mathbb{P}(\Lambda^2(\mathbb{C}^4)); \quad p : V \mapsto \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$$

является невырожденной квадрикой.

Задача о четырёх прямых: грассманиан $G(2,4)$

Наблюдение

Прямая в $\mathbb{CP}^3$ = плоскость в $\mathbb{C}^4$

Определение

Грассманиан $G(2,4) :=$ множество плоскостей в $\mathbb{C}^4$

Факт

Грассманиан $G(2,4)$ — алгебраическое многообразие, изоморфное невырожденной квадрике в $\mathbb{P}^5$ (*квадрика Плюккера*)

Упражнение

Образ *вложения Плюккера*

$$p : G(2,4) \to \mathbb{P}(\Lambda^2(\mathbb{C}^4)); \quad p : V \mapsto \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$$

является невырожденной квадрикой.

Задача о четырёх прямых: грассманиан $G(2,4)$

Наблюдение

Прямая в $\mathbb{CP}^3$ = плоскость в $\mathbb{C}^4$

Определение

Грассманиан $G(2,4)\colon=$ множество плоскостей в $\mathbb{C}^4$

Факт

Грассманиан $G(2,4)$ — алгебраическое многообразие, изоморфное невырожденной квадрике в $\mathbb{P}^5$ (*квадрика Плюккера*)

Упражнение

Образ *вложения Плюккера*

$$p : G(2,4) \to \mathbb{P}(\Lambda^2(\mathbb{C}^4)); \quad p : V \mapsto \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$$

является невырожденной квадрикой.

Задача о четырёх прямых: грассманиан $G(2,4)$

Наблюдение

Прямая в $\mathbb{CP}^3$ = плоскость в $\mathbb{C}^4$

Определение

Грассманиан $G(2,4) :=$ множество плоскостей в $\mathbb{C}^4$

Факт

Грассманиан $G(2,4)$ — алгебраическое многообразие, изоморфное невырожденной квадрике в $\mathbb{P}^5$ (*квадрика Плюккера*)

Упражнение

Образ *вложения Плюккера*

$$p : G(2,4) \to \mathbb{P}(\Lambda^2(\mathbb{C}^4)); \quad p : V \mapsto \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$$

является невырожденной квадрикой.

Задача о четырёх прямых: грассманиан $G(2,4)$

Условия в задаче о 4-х прямых

Условия σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 на прямую l = гиперповерхности в $G(2,4)$

Сложение условий

$\sigma_1 + \sigma_2 =$ формальная сумма гиперповерхностей

Умножение условий

$\sigma_1 \cdot \sigma_2 =$ пересечение гиперповерхностей

Пример

$\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 \cdot \sigma_4$ — пересечение четырёх гиперповерхностей в $G(2,4)$

Задача о четырёх прямых: грассманиан $G(2,4)$

Условия в задаче о 4-х прямых

Условия σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 на прямую l = гиперповерхности в $G(2,4)$

Сложение условий

$\sigma_1 + \sigma_2 =$ формальная сумма гиперповерхностей

Умножение условий

$\sigma_1 \cdot \sigma_2 =$ пересечение гиперповерхностей

Пример

$\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 \cdot \sigma_4$ — пересечение четырёх гиперповерхностей в $G(2,4)$

Задача о четырёх прямых: грассманиан $G(2,4)$

Условия в задаче о 4-х прямых

Условия σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 на прямую l = гиперповерхности в $G(2,4)$

Сложение условий

$\sigma_1 + \sigma_2 =$ формальная сумма гиперповерхностей

Умножение условий

$\sigma_1 \cdot \sigma_2 =$ пересечение гиперповерхностей

Пример

$\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 \cdot \sigma_4$ — пересечение четырёх гиперповерхностей в $G(2,4)$

Задача о четырёх прямых: грассманиан $G(2,4)$

Условия в задаче о 4-х прямых

Условия σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 на прямую $l =$ гиперповерхности в $G(2,4)$

Сложение условий

$\sigma_1 + \sigma_2 =$ формальная сумма гиперповерхностей

Умножение условий

$\sigma_1 \cdot \sigma_2 =$ пересечение гиперповерхностей

Пример

$\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 \cdot \sigma_4$ — пересечение четырёх гиперповерхностей в $G(2,4)$

Задача о четырёх прямых: грассманиан $G(2,4)$

Упражнение

При вложении Плюккера, гиперповерхности $\sigma_1, \ldots, \sigma_4$ являются гиперплоскими сечениями квадрики Плюккера (то есть пересечениями квадрики Плюккера с гиперплоскостями в $\mathbb{P}^5$).

Следствие

Пересечение $\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 \cdot \sigma_4$ состоит из двух точек (с учётом кратностей).

Задача о четырёх прямых: грассманиан $G(2,4)$

Упражнение

При вложении Плюккера, гиперповерхности $\sigma_1, \ldots, \sigma_4$ являются гиперплоскими сечениями квадрики Плюккера (то есть пересечениями квадрики Плюккера с гиперплоскостями в $\mathbb{P}^5$).

Следствие

Пересечение $\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 \cdot \sigma_4$ состоит из двух точек (с учётом кратностей).

Задача Штейнера о 5-ти кониках: наивная компактификация $\mathbb{P}^5$

Наблюдение

Коники = точки пятимерного проективного пространства $\mathbb{P}^5$
коника $\{ax^2 + bxy + cy^2 + dxz + eyz + fz^2 = 0\}$ = точка
$(a : b : c : d : e : f) \in \mathbb{P}^5$.

Условия на коники

Условие μ = гиперплоскость в $\mathbb{P}^5$
Условие ν = квадрика в $\mathbb{P}^5$
Условие κ = гиперповерхность степени 6 в $\mathbb{P}^5$

Задача Штейнера о 5-ти кониках: наивная компактификация $\mathbb{P}^5$

Наблюдение

Коники = точки пятимерного проективного пространства $\mathbb{P}^5$
коника $\{ax^2 + bxy + cy^2 + dxz + eyz + fz^2 = 0\}$ = точка
$(a : b : c : d : e : f) \in \mathbb{P}^5$.

Условия на коники

Условие μ = гиперплоскость в $\mathbb{P}^5$
Условие ν = квадрика в $\mathbb{P}^5$
Условие κ = гиперповерхность степени 6 в $\mathbb{P}^5$

Задача Штейнера о 5-ти кониках: наивная компактификация $\mathbb{P}^5$

Следствие

$\mu^5 = 1,\ \mu^4\nu = 2,\ \mu^3\nu^2 = 4,\ \kappa\mu^4 = 6,\ \kappa^2\mu^3 = 6^2$

Строгое вычисление m и n

Если $\kappa = m\mu + n\nu$, то обязательно $m = n = 2$.

Доказательство

Подставляя $\kappa = m\mu + n\nu$ в тождество $\kappa\mu^4 = 6$, получаем $m + 2n = 6$. Осталось использовать, что $m = n$.

Задача Штейнера о 5-ти кониках: наивная компактификация $\mathbb{P}^5$

Следствие

$\mu^5 = 1$, $\mu^4\nu = 2$, $\mu^3\nu^2 = 4$, $\kappa\mu^4 = 6$, $\kappa^2\mu^3 = 6^2$

Строгое вычисление m и n

Если $\kappa = m\mu + n\nu$, то обязательно $m = n = 2$.

Доказательство

Подставляя $\kappa = m\mu + n\nu$ в тождество $\kappa\mu^4 = 6$, получаем $m + 2n = 6$. Осталось использовать, что $m = n$.

Задача Штейнера о 5-ти кониках: наивная компактификация $\mathbb{P}^5$

Следствие

$\mu^5 = 1,\ \mu^4\nu = 2,\ \mu^3\nu^2 = 4,\ \kappa\mu^4 = 6,\ \kappa^2\mu^3 = 6^2$

Строгое вычисление m и n

Если $\kappa = m\mu + n\nu$, то обязательно $m = n = 2$.

Доказательство

Подставляя $\kappa = m\mu + n\nu$ в тождество $\kappa\mu^4 = 6$, получаем $m + 2n = 6$. Осталось использовать, что $m = n$.

Задача Штейнера о 5-ти кониках: наивная компактификация $\mathbb{P}^5$

Сложность

Гиперповерхности ν и κ содержат множество всех *двойных прямых*, то есть вырожденных коник, заданных уравнением вида $(px + qy + rz)^2 = 0$.

Следствие

Пересечение гиперповерхностей $\kappa_1, \ldots, \kappa_5$ в $\mathbb{P}^5$ содержит бесконечно много точек (хотя только конечное число этих точек соответствует невырожденным коникам).

Задача Штейнера о 5-ти кониках: наивная компактификация $\mathbb{P}^5$

Сложность

Гиперповерхности ν и κ содержат множество всех *двойных прямых*, то есть вырожденных коник, заданных уравнением вида $(px + qy + rz)^2 = 0$.

Следствие

Пересечение гиперповерхностей $\kappa_1, \ldots, \kappa_5$ в $\mathbb{P}^5$ содержит бесконечно много точек (хотя только конечное число этих точек соответствует невырожденным коникам).

Задача Штейнера о 5-ти кониках: наивная компактификация $\mathbb{P}^5$

Упражнение

Проверьте, что пересечение гиперповерхностей μ_1, μ_2, ν_1, ν_2, ν_3 всегда содержит вырожденные коники. Найдите число этих коник в случае общего положения гиперповерхностей.

Упражнение

Множество всех двойных прямых совпадает (с точностью до линейной замены координат) с *поверхностью Веронезе* V, то есть образом плоскости $\mathbb{P}^2$ при *вложении Веронезе*:

$$c_2 : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}(S^2(\mathbb{C}^3)); \quad c_2 : L \mapsto S^2(L).$$

Задача Штейнера о 5-ти кониках: наивная компактификация $\mathbb{P}^5$

Упражнение

Проверьте, что пересечение гиперповерхностей μ_1, μ_2, ν_1, ν_2, ν_3 всегда содержит вырожденные коники. Найдите число этих коник в случае общего положения гиперповерхностей.

Упражнение

Множество всех двойных прямых совпадает (с точностью до линейной замены координат) с *поверхностью Веронезе* V, то есть образом плоскости $\mathbb{P}^2$ при *вложении Веронезе*:

$$c_2 : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}(S^2(\mathbb{C}^3)); \quad c_2 : L \mapsto S^2(L).$$

Задача Штейнера о 5-ти кониках: чудесная компактификация $\hat{\mathbb{P}}^5_V$

Научное определение

Пространство полных коник $\hat{\mathbb{P}}^5_V$ или *чудесная компактификация* пространства невырожденных коник — это *раздутие* пространства $\mathbb{P}^5$ вдоль поверхности Веронезе V (поверхности двойных прямых).

Элементарное определение

Рассмотрим подмножество $C \subset \mathbb{P}^5 \times (\mathbb{P}^5)^*$, состоящее из пар (Q, Q^*), где Q — невырожденная коника, а Q^* — двойственная к ней коника. Определим $\hat{\mathbb{P}}^5_V$ как замыкание подмножества C в $\mathbb{P}^5 \times (\mathbb{P}^5)^*$.

Задача Штейнера о 5-ти кониках: чудесная компактификация $\hat{\mathbb{P}}^5_V$

Научное определение

Пространство полных коник $\hat{\mathbb{P}}^5_V$ или *чудесная компактификация* пространства невырожденных коник — это *раздутие* пространства $\mathbb{P}^5$ вдоль поверхности Веронезе V (поверхности двойных прямых).

Элементарное определение

Рассмотрим подмножество $C \subset \mathbb{P}^5 \times (\mathbb{P}^5)^*$, состоящее из пар (Q, Q^*), где Q — невырожденная коника, а Q^* — двойственная к ней коника. Определим $\hat{\mathbb{P}}^5_V$ как замыкание подмножества C в $\mathbb{P}^5 \times (\mathbb{P}^5)^*$.

Задача Штейнера о 5-ти кониках: чудесная компактификация $\hat{\mathbb{P}}^5_V$

Пары коник (Q_1, Q_2) в $\hat{\mathbb{P}}^5_V$

- Q_1 — невырожденная коника $\Rightarrow Q_2 = Q_1^*$
- $Q_1 = l_1 \cup l_2$ — пара (различных) прямых $\Rightarrow Q_2$ — двойная прямая $l_1 \cap l_2$ с двумя отмеченными (различными) точками l_1 и l_2
- $Q_1 = l^2$ — двойная прямая с двумя отмеченными (различными) точками a_1 и $a_2 \Rightarrow Q_2 = a_1 \cup a_2$ — пара (различных) прямых
- $Q_1 = l^2$ — двойная прямая с одной отмеченной точкой $a \Rightarrow Q_2 = a^2$ — двойная прямая с одной отмеченной точкой l

Задача Штейнера о 5-ти кониках: чудесная компактификация $\hat{\mathbb{P}}^5_V$

Пары коник (Q_1, Q_2) в $\hat{\mathbb{P}}^5_V$

- Q_1 — невырожденная коника $\Rightarrow Q_2 = Q_1^*$
- $Q_1 = l_1 \cup l_2$ — пара (различных) прямых $\Rightarrow Q_2$ — двойная прямая $l_1 \cap l_2$ с двумя отмеченными (различными) точками l_1 и l_2
- $Q_1 = l^2$ — двойная прямая с двумя отмеченными (различными) точками a_1 и $a_2 \Rightarrow Q_2 = a_1 \cup a_2$ — пара (различных) прямых
- $Q_1 = l^2$ — двойная прямая с одной отмеченной точкой $a \Rightarrow Q_2 = a^2$ — двойная прямая с одной отмеченной точкой l

Задача Штейнера о 5-ти кониках: чудесная компактификация $\hat{\mathbb{P}}^5_V$

Пары коник (Q_1, Q_2) в $\hat{\mathbb{P}}^5_V$

- Q_1 — невырожденная коника $\Rightarrow Q_2 = Q_1^*$
- $Q_1 = l_1 \cup l_2$ — пара (различных) прямых $\Rightarrow Q_2$ — двойная прямая $l_1 \cap l_2$ с двумя отмеченными (различными) точками l_1 и l_2
- $Q_1 = l^2$ — двойная прямая с двумя отмеченными (различными) точками a_1 и $a_2 \Rightarrow Q_2 = a_1 \cup a_2$ — пара (различных) прямых
- $Q_1 = l^2$ — двойная прямая с одной отмеченной точкой $a \Rightarrow$ $Q_2 = a^2$ — двойная прямая с одной отмеченной точкой l

Задача Штейнера о 5-ти кониках: чудесная компактификация $\hat{\mathbb{P}}^5_V$

Пары коник (Q_1, Q_2) в $\hat{\mathbb{P}}^5_V$

- Q_1 — невырожденная коника $\Rightarrow Q_2 = Q_1^*$
- $Q_1 = l_1 \cup l_2$ — пара (различных) прямых $\Rightarrow Q_2$ — двойная прямая $l_1 \cap l_2$ с двумя отмеченными (различными) точками l_1 и l_2
- $Q_1 = l^2$ — двойная прямая с двумя отмеченными (различными) точками a_1 и $a_2 \Rightarrow Q_2 = a_1 \cup a_2$ — пара (различных) прямых
- $Q_1 = l^2$ — двойная прямая с одной отмеченной точкой $a \Rightarrow Q_2 = a^2$ — двойная прямая с одной отмеченной точкой l

Задача Штейнера о 5-ти кониках: чудесная компактификация $\hat{\mathbb{P}}^5_V$

Пары коник (Q_1, Q_2) в $\hat{\mathbb{P}}^5_V$

- Q_1 — невырожденная коника $\Rightarrow Q_2 = Q_1^*$
- $Q_1 = l_1 \cup l_2$ — пара (различных) прямых $\Rightarrow Q_2$ — двойная прямая $l_1 \cap l_2$ с двумя отмеченными (различными) точками l_1 и l_2
- $Q_1 = l^2$ — двойная прямая с двумя отмеченными (различными) точками a_1 и $a_2 \Rightarrow Q_2 = a_1 \cup a_2$ — пара (различных) прямых
- $Q_1 = l^2$ — двойная прямая с одной отмеченной точкой $a \Rightarrow Q_2 = a^2$ — двойная прямая с одной отмеченной точкой l

Задача Штейнера о 5-ти кониках: чудесная компактификация $\hat{\mathbb{P}}^5_V$

Проекция на $\mathbb{P}^5$

Проекция на первый сомножитель задаёт отображение

$$p_1 : \hat{\mathbb{P}}^5_V \to \mathbb{P}^5, \quad p_1 : (Q_1, Q_2) \mapsto \mathbb{P}^5.$$

Аналогично определяется проекция $\hat{\mathbb{P}}^5_V \to (\mathbb{P}^5)^*$.

Упражнение

Прообраз поверхности Веронезе V при проекции p_1 является гиперповерхностью в $\hat{\mathbb{P}}^5_V$.

Задача Штейнера о 5-ти кониках: чудесная компактификация $\hat{\mathbb{P}}^5_V$

Проекция на $\mathbb{P}^5$

Проекция на первый сомножитель задаёт отображение

$$p_1 : \hat{\mathbb{P}}^5_V \to \mathbb{P}^5, \quad p_1 : (Q_1, Q_2) \mapsto \mathbb{P}^5.$$

Аналогично определяется проекция $\hat{\mathbb{P}}^5_V \to (\mathbb{P}^5)^*$.

Упражнение

Прообраз поверхности Веронезе V при проекции p_1 является гиперповерхностью в $\hat{\mathbb{P}}^5_V$.

Задача Штейнера о 5-ти кониках: чудесная компактификация $\hat{\mathbb{P}}^5_V$

С помощью пространства полных коник можно строго обосновать рассуждения Шаля. Для этого достаточно проверить следующее. Обозначим через H_σ замыкание в $\hat{\mathbb{P}}^5_V$ множества пар (Q, Q^*), где Q — невырожденная коника, удовлетворяющая условию σ.

Нет лишних решений на бесконечности

Пересечение гиперповерхностей $H_{\kappa_1}, \dots, H_{\kappa_5}$ в $\hat{\mathbb{P}}^5_V$ (в случае общего положения) не содержит вырожденных полных коник.

H_κ выражается через H_μ и H_ν

Группа вторых когомологий пространства полных коник порождается классами гиперповерхностей H_μ и H_ν.

Задача Штейнера о 5-ти кониках: чудесная компактификация $\hat{\mathbb{P}}^5_V$

С помощью пространства полных коник можно строго обосновать рассуждения Шаля. Для этого достаточно проверить следующее. Обозначим через H_σ замыкание в $\hat{\mathbb{P}}^5_V$ множества пар (Q, Q^*), где Q — невырожденная коника, удовлетворяющая условию σ.

Нет лишних решений на бесконечности

Пересечение гиперповерхностей $H_{\kappa_1}, \ldots, H_{\kappa_5}$ в $\hat{\mathbb{P}}^5_V$ (в случае общего положения) не содержит вырожденных полных коник.

H_κ выражается через H_μ и H_ν

Группа вторых когомологий пространства полных коник порождается классами гиперповерхностей H_μ и H_ν.

Задача Штейнера о 5-ти кониках: чудесная компактификация $\hat{\mathbb{P}}^5_V$

С помощью пространства полных коник можно строго обосновать рассуждения Шаля. Для этого достаточно проверить следующее. Обозначим через H_σ замыкание в $\hat{\mathbb{P}}^5_V$ множества пар (Q, Q^*), где Q — невырожденная коника, удовлетворяющая условию σ.

Нет лишних решений на бесконечности

Пересечение гиперповерхностей $H_{\kappa_1}, \ldots, H_{\kappa_5}$ в $\hat{\mathbb{P}}^5_V$ (в случае общего положения) не содержит вырожденных полных коник.

H_κ выражается через H_μ и H_ν

Группа вторых когомологий пространства полных коник порождается классами гиперповерхностей H_μ и H_ν.

Задача Штейнера о 5-ти кониках

Заключительное замечание

Для практических вычислений в задаче Штейнера достаточно наивной компактификации. Чудесная компактификация нужна только для строгого обоснования сделанного в процессе вычислений допущения, что $\kappa = m\mu + n\nu$.

Литература

- Акопян А. В., Заславский А. А., *Геометрические свойства кривых второго порядка*, МЦНМО, 2007
- Валентина Кириченко, *Исчислительная геометрия: метод Шаля и Шуберта*, 2010, http://www.mccme.ru/ valya/Chasles.pdf
- S. L. Kleiman, *Chasles's enumerative theory of conics: a historical introduction*, Studies in Algebraic Geometry, Studies in Math., **20**, Math. Assoc. Amer., Washington, D. C, 1980, pp. 117–138
- S. L. Kleiman and Dan Laksov, *Schubert calculus*, The American Mathematical Monthly, **79**, No. 10, (1972), pp. 1061-1082

Спасибо!