А. В. Акопян
А. А. Заславский

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Для учащихся старших классов

Москва
Издательство МЦНМО
2007

УДК 22.151
ББК 514
А40

Книга посвящена тем свойствам коник (кривых второго порядка), которые формулируются и доказываются на чисто геометрическом языке (проективном или метрическом). Эти свойства находят применение в разнообразных задачах, а их исследование интересно и поучительно. Изложение начинается с элементарных фактов и доведено до весьма нетривиальных результатов, классических и современных. Раздел «Некоторые факты классической геометрии» является содержательным дополнением к традиционному курсу евклидовой планиметрии, расширяющим математический кругозор читателя.

Книга демонстрирует преимущества чисто геометрических методов, сочетающих наглядность и логическую прозрачность. Она содержит значительное количество задач, решение которых тренирует геометрическое мышление и интуицию.

Книга может быть полезна для школьников старших классов, студентов физико-математических специальностей, преподавателей и широкого круга любителей математики.

Акопян А. В., Заславский А. А.

А40 Геометрические свойства кривых второго порядка. — М.: МЦНМО, 2007. — 136 с.

ISBN 978-5-94057-300-5

ББК 514

ISBN 978-5-94057-300-5

Оглавление

Вступительные слова

Кривые второго порядка, или коники, традиционно считаются объектом аналитической геометрии и изучаются на первых курсах технических вузов. При этом из их геометрических свойств упоминаются, в лучшем случае, только оптические. Между тем, эти кривые обладают рядом других весьма красивых свойств, большая часть которых может быть доказана методами элементарной геометрии, вполне доступными старшеклассникам. Кроме того, коники могут применяться для решения геометрических задач, на первый взгляд никак с ними не связанных. В данной работе приводятся наиболее интересные факты, связанные с кривыми второго порядка, в том числе доказанные в последнее время.

Глава 1 книги посвящена элементарным свойствам коник. Большая часть изложенных в ней фактов широко известна, но и остальные достаточно просты, так что эта глава не требует от читателя подготовки, выходящей за рамки школьной программы. Некоторые несложные, но важные утверждения предлагаются в этой главе в качестве упражнений. Мы рекомендуем читателям, прежде чем читать решения упражнений, попытаться выполнить их самостоятельно. Это облегчит понимание дальнейших частей книги. Глава 2 носит вспомогательный характер. В ней изложены некоторые факты из классической геометрии, нужные для понимания последующих глав, которые в школе не изучаются в достаточном объеме. В главе 3 излагаются общие для всех коник проективные свойства, к числу которых относятся и довольно сложные, например теоремы о пучках коник. Наконец, глава 4 посвящена метрическим свойствам, которые, как правило, присущи только коникам определенного вида. Эта глава является наиболее сложной и требует для понимания достаточно глубокого ознакомления с предыдущими главами книги.

Авторы благодарят за ценные замечания И. И. Богданова и Е. Ю. Бунькову.

ГЛАВА 1

Элементарные свойства кривых второго порядка

§ 1.1. Определения

Пусть коза привязана веревкой к колышку. Ясно, что в этом случае она съест траву внутри круга, центром которого является колышек, а радиус равен длине веревки. Привяжем теперь козу к двум колышкам с помощью веревки и скользящего по ней кольца. В этом случае область, внутри которой коза съест траву, будет выглядеть как на рис. 1.1.

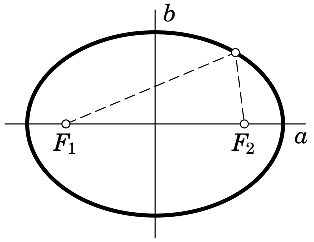

Рис. 1.1. F_1 и F_2 — фокусы, a и b — большая и малая оси

Граница этой фигуры характеризуется тем свойством, что сумма расстояний от любой ее точки до колышков равна длине веревки. Такая кривая называется *эллипсом*, а точки, в которые воткнуты колышки, — *фокусами*.

Понятно, что эллипс выглядит как «вытянутая окружность». У него, очевидно, есть две оси симметрии. Это прямая, соединяющая фокусы, и серединный перпендикуляр к отрезку с концами в фокусах. Эти две прямые называются *большой* и *малой осями эллипса*, а длины их частей, лежащих внутри эллипса, — длинами большой и малой осей. Расстояние между фокусами называют фокусным расстоянием.

Также очевидно, что длина веревки, к которой привязана коза, равна длине большой оси эллипса, внутренность которого она выедает.

Интуитивно ясно, что коза может добраться до любой точки внутри эллипса и пожевать там траву, а до точек вне этого эллипса она добраться не может. Но если переформулировать это утверждение на чисто математическом языке, оно уже не так очевидно.

Упражнение 1. Докажите, что сумма расстояний от любой точки внутри эллипса до фокусов меньше, а от точки вне эллипса больше длины большой оси.

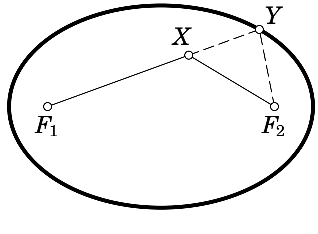

Рис. 1.2

Решение. Обозначим фокусы эллипса через F_1 и F_2, а точку через X. Точку пересечения луча F_1X с эллипсом обозначим через Y. Пусть сначала точка X лежит внутри эллипса. По неравенству треугольника $F_2X < XY + YF_2$, а значит, $F_1X + XF_2 < F_1X + XY + YF_2 = F_1Y + F_2Y$ (рис. 1.2). Но $F_1Y + F_2Y$ равно длине веревки, к которой привязана коза, т. е. большой оси эллипса. Рассуждая аналогично в случае, если точка X лежит вне эллипса, получаем $F_2Y < XY + XF_2$. Следовательно, $F_1X + XF_2 = F_1Y + YX + XF_2 > F_1Y + F_2Y$.

Эллипсы часто встречаются в механике. Так, например, планета, двигаясь вокруг Солнца, описывает эллипс, причем Солнце находится в одном из его фокусов (закон Кеплера).

Эллипс является одним из примеров *кривых второго порядка*, или *коник*. Другими примерами таких кривых являются *парабола* и *гипербола*.

Гиперболой называется множество точек, модуль разности расстояний от которых до двух фиксированных точек, называемых *фокусами*, постоянен.

Гипербола состоит из двух дуг, которые сколь угодно близко приближаются к двум прямым, называемым *асимптотами гиперболы* (рис. 1.3). Гипербола с перпендикулярными асимптотами называется *равносторонней*.

Прямая, проходящая через фокусы гиперболы, является ее осью симметрии и называется *действительной осью*. Перпендикулярная ей прямая, проходящая через середину отрезка между фокусами, также является осью симметрии и называется *мнимой осью* гиперболы.

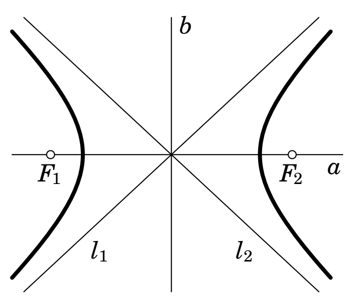

Рис. 1.3. F_1 и F_2 — фокусы, a и b — действительная и мнимая оси, l_1 и l_2 — асимптоты

Если комета летит мимо Солнца и силы притяжения Солнца недостаточно, чтобы оставить комету в пределах солнечной системы, то траекторией кометы будет дуга гиперболы, фокус которой находится в центре Солнца.

Параболой называется множество точек, расстояния от которых до фиксированных точки и прямой равны. Эти точка и прямая называются *фокусом* и *ди-*

ректрисой параболы соответственно. Прямая, перпендикулярная директрисе и проходящая через фокус, называется *осью параболы* (рис. 1.4). Очевидно, что эта прямая является осью симметрии параболы.

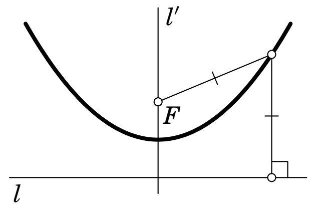

Рис. 1.4. F — фокус, l и l' — директриса и ось параболы

Например, камень, брошенный под углом к горизонту, летит по параболе.

В каком-то смысле, с геометрической точки зрения, парабола всего одна (как и окружность). Точнее говоря, все параболы подобны, т. е. они переводятся друг в друга поворотной гомотетией.

Рассмотрим семейство эллипсов с фокусом в фиксированной точке и проходящих через заданную точку. Второй же фокус устремим к бесконечности вдоль какого-то направления. Тогда эти эллипсы будут стремиться к параболе с тем же фокусом и осью, параллельной направлению, вдоль которого мы уводили второй фокус. Аналогичный эксперимент можно повторить и для гипербол. Таким образом, парабола является предельным случаем как эллипса, так и гиперболы.

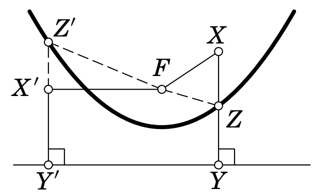

Рис. 1.5

Упражнение 2. Сформулируйте и докажите для параболы и гиперболы утверждения, аналогичные утверждению из упражнения 1.

Решение. Для точек внутри параболы расстояние до фокуса меньше, чем расстояние до директрисы, а для точек вне параболы наоборот (рис. 1.5).

Проекцию точки X на директрису обозначим через Y, а точку пересечения XY с параболой через Z. Через F обозначим фокус параболы. По определению параболы $FZ = ZY$. Если точка X лежит внутри параболы, то $XY = XZ + ZY$. По неравенству треугольника $FX < FZ + ZX = ZY + ZX = XY$. Если точка X и парабола лежат по разные стороны от директрисы, то утверждение очевидно. Пусть точка X лежит вне параболы, но по ту же сторону от директрисы, тогда $ZY = ZX + XY$, и по неравенству треугольника $FX + XZ > FZ = ZY = ZX + XY$. А значит, $FX > XY$, что и требовалось доказать.

В случае с гиперболой это утверждение формулируется следующим образом: пусть модуль разности расстояний от любой точки на гиперболе до фокусов F_1 и F_2 равен d. Обозначим дугу гиперболы, внутри которой лежит F_1, через $\varGamma$. Тогда для точек X вне $\varGamma$ величина $XF_2 - XF_1$ меньше d, а внутри — больше.

Пусть точка X лежит внутри части, отсекаемой дугой $\varGamma$. Обозначим точку пересечения луча F_2X и $\varGamma$ через Y. Получаем, что

$F_2X = F_2Y + YX$. По неравенству треугольника $F_1X < F_1Y + YX$, значит, $F_2X - F_1X > (F_2Y + YX) - (F_1Y + YX) = F_2Y - F_1Y = d$.

Если же точка X лежит вне Γ, то, взяв за точку Y пересечение F_1X и Γ, получим $F_1X = F_1Y + YX$. По неравенству треугольника $F_2X < F_2Y + YX$. Следовательно, $F_2X - F_1X < (F_2Y + YX) - (F_1Y + YX) = F_2Y - F_1Y = d$.

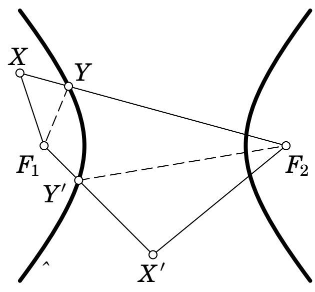

Рис. 1.6

Отметим (пока без доказательства), что и эллипс, и парабола, и гипербола обладают следующими свойствами: любая прямая пересекает каждую из этих кривых не более чем в двух точках, и из любой точки плоскости к кривой можно провести не более двух касательных. Эти свойства являются очевидными следствиями результатов § 1.5.

Упражнение 3. Найдите геометрическое место центров окружностей, касающихся двух данных.

Решение. Рассмотрим для определенности случай, когда окружности с центрами O_1, O_2 и радиусами r_1, r_2 лежат одна вне другой. Если окружность с центром O и радиусом r касается обеих окружностей внешним образом, то $OO_1 = r + r_1$, $OO_2 = r + r_2$ и, значит, $OO_1 - OO_2 = r_1 - r_2$, т. е. O лежит на одной из ветвей гиперболы с фокусами O_1, O_2. Аналогично если окружность касается обеих данных внутренним образом, то ее центр лежит на другой ветви этой гиперболы. Если же одно из касаний внешнее, а другое внутреннее, то модуль разности расстояний OO_1 и OO_2 равен $r_1 + r_2$, т. е. O описывает другую гиперболу с теми же фокусами. Аналогично если одна окружность лежит внутри другой, то искомое ГМТ состоит из двух эллипсов с фокусами O_1, O_2 и большими осями, равными $r_1 + r_2$ и $r_1 - r_2$. Случай пересекающихся окружностей разберите самостоятельно.

§ 1.2. Аналитическое определение и классификация кривых второго порядка

В предыдущем параграфе мы упомянули, что эллипс, парабола и гипербола являются частными случаями кривых второго порядка. Сейчас мы уточним это утверждение и покажем, что, в определенном смысле, других кривых второго порядка не существует.

Определение. *Кривой второго порядка* называется множество точек, координаты которых в некоторой (а значит и в любой) декартовой системе координат удовлетворяют уравнению второго порядка:

$$(1)\quad a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0.$$

Если левая часть уравнения (1) разлагается на два множителя первой степени, то кривая является объединением двух прямых (возможно, совпадающих). В этом случае она называется *вырожденной*. Вырожденной считается также кривая, содержащая ровно одну действительную точку (например, $x^2+y^2=0$).

В курсе аналитической геометрии показывается (см., например, [1]), что для любой невырожденной кривой существует система координат, в которой ее уравнение имеет достаточно простой вид. Опишем основную идею этого упрощения.

Вначале совершим поворот осей координат на угол φ. Это значит, что в уравнении (1) координаты x и y надо заменить соответственно на $x\cos\varphi-y\sin\varphi$ и $x\sin\varphi+y\cos\varphi$. Выбирая значение φ, можно добиться того, что коэффициент при произведении xy станет равен нулю. Затем перенесем начало координат в точку (x_0, y_0), т. е. заменим x на $x+x_0$ и y на $y+y_0$. Выбором значений (x_0, y_0) можно добиться того, что уравнение (1) примет один из следующих канонических видов (I), (II), (III).

Непосредственное вычисление показывает, что кривая

$$\text{(I)}\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad a\geqslant b>0,$$

является *эллипсом* с центром в начале координат, фокусами в точках $(\pm\sqrt{a^2-b^2}, 0)$ и большой и малой полуосями (т. е. половинами длин соответствующих осей), равными соответственно a, b. В частном случае $a=b$ эллипс (I) является окружностью.

Кривая

$$\text{(II)}\qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\quad a>0,\ b>0,$$

является *гиперболой*, пересекающей свою действительную ось в двух точках, расстояние между которыми равно $2a$. Величина a называется действительной, а b — мнимой полуосью гиперболы. Прямые $x/y=$ $=\pm a/b$ являются асимптотами гиперболы, а точки $(\pm\sqrt{a^2+b^2}, 0)$ — ее фокусами. При $a=b$ гипербола (II) будет равносторонней.

В случае

$$\text{(III)}\qquad y^2=2px,\quad p>0,$$

кривая является параболой, ось которой совпадает с осью абсцисс, фокус находится в точке $(p/2, 0)$, а уравнение директрисы $x=-p/2$.

Кривая

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$$

называется *мнимым эллипсом* и не содержит ни одной действительной точки.

В дальнейшем, если не оговорено противное, кривая второго порядка подразумевается невырожденной и не мнимой.

Задача 1. Докажите, что уравнение $y = 1/x$ задает гиперболу, и найдите ее фокусы.

§ 1.3. Оптическое свойство

Как известно, если луч света падает на зеркальную поверхность, то отражается он от нее под таким же углом, под которым упал. Это связано с так называемым принципом Ферма, гласящим, что свет всегда выбирает кратчайший путь. Давайте докажем, что этот путь действительно будет кратчайшим.

Итак, дана прямая l и точки F_1 и F_2, лежащие по одну сторону от нее. Требуется найти такую точку P на прямой, что сумма расстояний от P до F_1 и F_2 будет минимальной. Отразив F_2 относительно прямой l, получим точку F_2'. Очевидно, что $F_2X = F_2'X$ для любой точки X на прямой l. Поэтому нам достаточно найти такую точку P, что сумма расстояний от P до F_1 и F_2' будет как можно меньше. Очевидно, минимум достигается, когда точка P лежит на отрезке F_1F_2', пересекающем прямую l. Тогда требуемые углы, очевидно, равны (рис. 1.7).

Упражнение 1. а) Когда достигается максимум модуля разности расстояний от точки P до точек F_1 и F_2, лежащих по разные стороны от прямой l?

б) Пусть даны две прямые l и l' и точка F, не лежащая на них. Найдите такую точку P на прямой l, что разность расстояний от нее до прямой l' и до точки F (взятая со знаком) максимальна.

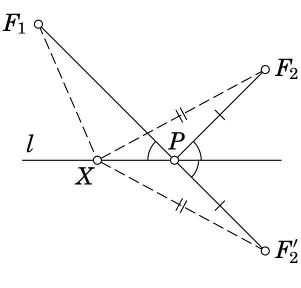

Рис. 1.7

Решение. а) Обозначим через F_2' точку, симметричную F_2 относительно прямой l. Очевидно, что $F_2X = F_2'X$ для любой точки X на прямой l. Нам достаточно найти такую точку P, что разность расстояний от P до F_1 и F_2' будет как можно больше. Из неравенства треугольника следует что $|F_1P - F_2'P| < F_1F_2'$. И достигается этот максимум тогда и только тогда, когда точки F_1, F_2', P лежат на одной прямой. Поскольку точки F_2 и F_2' симметричны, углы, которые образуют прямые F_1P и F_2P с прямой l, равны (рис. 1.8).

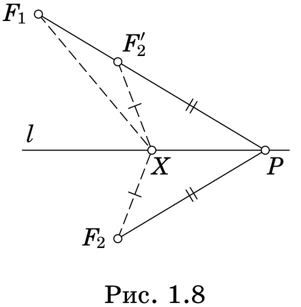

Рис. 1.8

б) Обозначим через F' точку, симметричную F относительно l. Выберем ту из точек F и F', расстояние от которой до прямой l'

минимально (расстояние берется со знаком). Пусть это точка F. Расстояние от F до l' обозначим через d. Тогда для любой точки P на прямой l расстояние до l' не больше чем $PF + d$. А значит, требуемая в задаче разность всегда не превосходит d. С другой стороны, она равна в точности d, когда точка P лежит на перпендикуляре к l', проведенном из точки F (рис. 1.9).

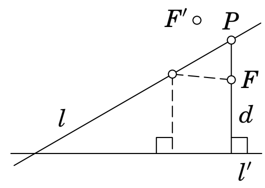

Рис. 1.9

Стоит также отметить, что если в п. а) прямая F_1F_2' параллельна l, а в п. б) прямая l' перпендикулярна l, то рассматриваемого максимума не существует (он достигается на бесконечности).

Теперь сформулируем одно из важнейших свойств коник — так называемое оптическое свойство.

Теорема 1.1 (оптическое свойство эллипса). *Пусть прямая l касается эллипса в точке P. Тогда прямая l — это внешняя биссектриса угла F_1PF_2* (рис. 1.10).

Доказательство. Пусть X — произвольная точка на прямой l, отличная от P. Так как X лежит вне эллипса, мы имеем $XF_1 + XF_2 > PF_1 + PF_2$, т. е. из всех точек прямой l точка P имеет наименьшую сумму расстояний до F_1 и F_2. Но в силу вышесказанного это означает, что углы, образованные прямыми PF_1 и PF_2 с l, равны. □

Упражнение 2. Сформулируйте и докажите оптическое свойство для парабол и гипербол.

Решение. Для парабол оптическое свойство формулируется следующим образом. Пусть прямая l касается параболы в точке P. Проекцию точки P на директрису обозначим через P'. Тогда l является биссектрисой угла FPP' (рис. 1.11).

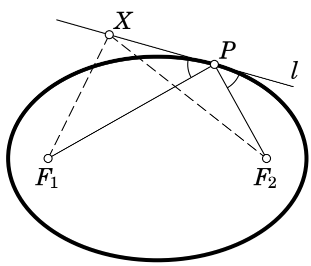

Рис. 1.10

Предположим, что биссектриса угла FPP' (обозначим ее через l') пересекает параболу еще в какой-нибудь точке. Обозначим эту точку через Q, а ее проекцию на директрису — через Q'. По определению параболы $FQ = QQ'$. С другой стороны, треугольник FPP' равнобедренный, и биссектриса угла P — это серединный перпендикуляр к FP'. А значит, для любой точки Q, лежащей на этой биссектрисе, выполняется равенство $QP' = QF = QQ'$. Но этого не может быть, так как Q' — единственная точка на директрисе параболы, в которой достигается минимум расстояния до точки Q.

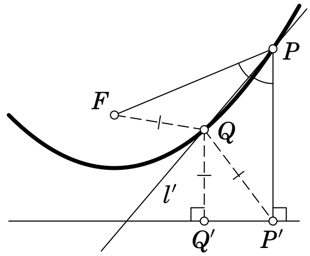

Рис. 1.11

Теперь сформулируем оптическое свойство для гиперболы.

Если прямая l касается гиперболы в точке P, то l является биссектрисой угла F_1PF_2, где F_1 и F_2 — фокусы гиперболы (рис. 1.12).

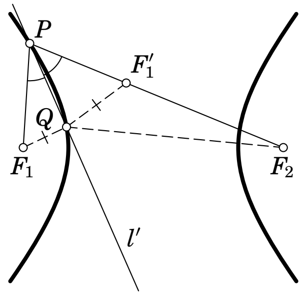

Рис. 1.12

Предположим, что биссектриса l' угла F_1PF_2 пересекает гиперболу еще в какой-нибудь точке Q (лежащей на той же дуге, что и P). Для удобства будем считать, что точка P лежит на дуге, которая ближе к фокусу F_1. Обозначим через F_1' точку, симметричную F_1 относительно l'. Тогда $F_1Q = QF_1'$, $F_1P = PF_1'$; кроме того, точки F_2, F_1' и P лежат на одной прямой. Итак, $F_2P - PF_1 = F_2Q - F_1Q$. В силу вышеуказанных равенств получаем $F_2F_1' = F_2P - PF_1' = F_2Q - QF_1'$. Но по неравенству треугольника $F_2F_1' > F_2Q - QF_1'$.

Можно также получить доказательства этих утверждений, аналогичные доказательству оптического свойства для эллипса. Для этого достаточно воспользоваться результатами упражнения 1.

Оптическое свойство параболы было известно еще древним грекам. Скажем, Архимед, расположив много медных щитов так, что они образовали параболическое зеркало, сжег осаждавший Сиракузы флот римлян.

Упражнение 3. Рассмотрим семейство софокусных коник (так называются коники, у которых фокусы совпадают). Докажите, что любые гипербола и эллипс из этого семейства пересекаются под прямыми углами (углом между двумя кривыми называется угол между касательными к ним в данной точке их пересечения, см. рис. 1.13).

Решение. Пусть эллипс и гипербола с фокусами F_1 и F_2 пересекаются в точке P. Тогда касательные к ним в этой точке будут биссектрисами внешнего и внутреннего углов F_1PF_2 соответственно. Следовательно, они будут перпендикулярны.

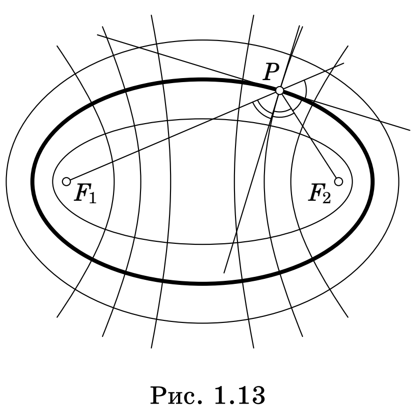

Рис. 1.13

Теорема 1.2. *Пусть хорда PQ содержит фокус F_1 эллипса, R — точка пересечения касательных к эллипсу в точках P и Q. Тогда R — это центр вневписанной окружности треугольника F_2PQ, а F_1 — это точка касания этой окружности со стороной PQ* (рис. 1.14).

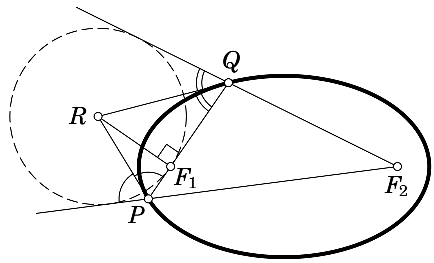

Рис. 1.14

Доказательство. В силу оптического свойства PR и QR — это биссектрисы внешних углов треугольника F_2PQ. А значит, R — центр его вневписанной окружности. Точка касания вневписанной окружности со стороной (обозначим ее через F_1') вместе с противоположной вершиной F_2 делят периметр треугольника пополам, т. е. $F_1'P + PF_2 = F_2Q + QF_1'$. Но этим свойством обладает F_1, и такая точка только одна. Значит, F_1' и F_1 совпадают. □

Следствие. *Если точку пересечения касательных к эллипсу в концах хорды, содержащей фокус, соединить с этим фокусом, получившаяся прямая будет перпендикулярна хорде.*

В случае гиперболы теорема 1.2 тоже верна, но вместо вневписанной окружности надо рассматривать вписанную.

§ 1.4. Изогональное свойство коник

Оптическое свойство позволяет элементарно доказать совсем удивительные свойства.

Теорема 1.3. *Проведем из любой точки P, лежащей вне эллипса, две касательные к нему. Пусть они касаются эллипса в точках X и Y. Тогда углы F_1PX и F_2PY равны* (F_1 *и* F_2 — *фокусы эллипса*).

Доказательство. Пусть F_1', F_2' — точки, симметричные F_1 и F_2 относительно PX и PY соответственно (рис. 1.15).

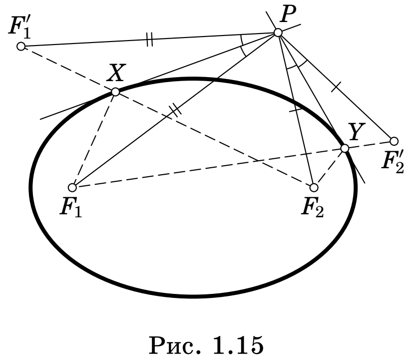

Рис. 1.15

Тогда $PF_1' = PF_1$ и $PF_2' = PF_2$. Кроме того, точки F_1, Y и F_2' лежат на одной прямой (в силу оптического свойства). То же самое верно и для точек F_2, X и F_1'. Получаем $F_2F_1' = F_2X + XF_1 = F_2Y + YF_1 = F_2'F_1$. Следовательно, треугольники PF_2F_1' и PF_1F_2' равны (по трем сторонам). А значит,

$$\angle F_2PF_1 + 2\angle F_1PX = \angle F_2PF_1' = \angle F_1PF_2' = \angle F_1PF_2 + 2\angle F_2PY.$$

Отсюда получаем, что $\angle F_1PX = \angle F_2PY$, что и требовалось[1]. □

Из рис. 1.16 видно, что аналогичное свойство выполнено для гиперболы[2].

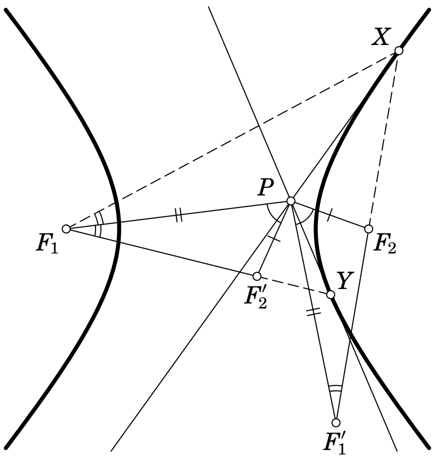

Рис. 1.16

Пусть теперь эллипс (гипербола) с фокусами F_1, F_2 вписан в треугольник ABC. Из доказанного утверждения следует, что $\angle BAF_1 = \angle CAF_2$, $\angle ABF_1 = \angle CBF_2$ и $\angle ACF_1 = \angle BCF_2$.

В § 2.3 будет показано, что для любой (за редким исключением) точки плоскости X существует единственная такая точка Y, что X и Y являются фокусами коники, касающейся всех сторон треугольника. Такая точка Y называется *изогонально сопряженной точке* X относительно треугольника.

Из конструкции, с помощью которой мы доказали теорему 1.3, можно получить еще один интересный результат. Поскольку треугольники PF_2F_1' и $PF_2'F_1$ равны, равны углы $PF_1'F_2$ и PF_1F_2'. Получаем

$$\angle PF_1X = \angle PF_1'F_2 = \angle PF_1F_2' = \angle PF_1Y.$$

1. Мы рассмотрели случай, когда F_1, F_2 лежат внутри угла $F_1'PF_2'$, причем F_1 лежит внутри угла F_2PF_1'. В других случаях рассуждения аналогичны.
2. Предлагаем читателям разобрать два возможных случая: точки касания на одной ветви и на разных.

Таким образом, доказана следующая теорема, являющаяся обобщением теоремы 1.2.

Теорема 1.4. *В обозначениях теоремы* 1.3 *прямая* F_1P *является биссектрисой угла* XF_1Y (рис. 1.17).

Теорема 1.5. *Геометрическим местом точек, из которых данный эллипс виден под прямым углом* (*т. е. проведенные к нему из этой точки касательные перпендикулярны*), *является окружность с центром в центре эллипса* (рис. 1.18).

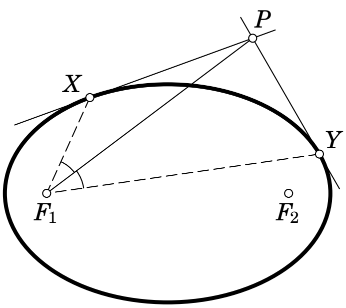

Рис. 1.17

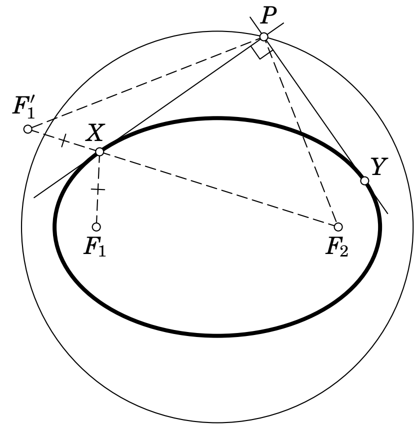

Рис. 1.18

Доказательство. Обозначим фокусы этого эллипса через F_1 и F_2. Пусть касательные к эллипсу в точках X и Y пересекаются в точке P. Отразим F_1 относительно PX. Полученную точку обозначим через F_1'. Тогда из теоремы 1.3 следует, что $\angle XPY = \angle F_1'PF_2$ и $F_1'F_2 = F_1X + F_2X$, т. е. длина отрезка $F_1'F_2$ равна большой оси эллипса (длине веревки, к которой привязана коза). Угол $F_1'PF_2$ прямой тогда и только тогда, когда $F_1'P^2 + F_2P^2 = F_1'F_2^2$ (по теореме Пифагора). Следовательно, угол XPY прямой тогда и только тогда, когда сумма $F_1P^2 + F_2P^2$ равна квадрату большой оси эллипса. Но, как легко показать, это условие определяет окружность. Действительно, пусть точка F_1 имеет декартовы координаты (x_1, y_1), а F_2 соответственно (x_2, y_2). Тогда координаты искомых точек P будут удовлетворять условию

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = C,$$

где C — это квадрат большой оси. Но поскольку коэффициенты при x^2 и y^2 равны (а именно 2) и коэффициент при xy равен 0, множеством точек, удовлетворяющих этому уравнению, будет окружность. Легко понять из соображений симметрии, что центром этой окружности будет середина отрезка F_1F_2. □

Для гиперболы такая окружность существует, вообще говоря, не всегда. Когда угол между асимптотами гиперболы острый, радиус окружности будет мнимым. Если асимптоты перпендикулярны, то окружность вырождается в точку — центр гиперболы.

Примечание. Пусть даны точки P_1, P_2, ..., P_n и числа k_1, k_2, ..., k_n и C. Геометрическим местом точек X, удовлетворяющих уравнению $k_1XP_1^2+k_2XP_2^2+\ldots+k_nXP_n^2=C$, будет окружность. Эта окружность называется *окружностью Ферма—Аполлония*. Понятно, что иногда она будет мнимого радиуса (когда?).

Теорема 1.6. *Пусть на эллипс α накинули нить, которую натянули с помощью карандаша. Тогда карандаш при вращении вокруг эллипса опишет другой эллипс, софокусный с данным эллипсом α* (рис. 1.19).

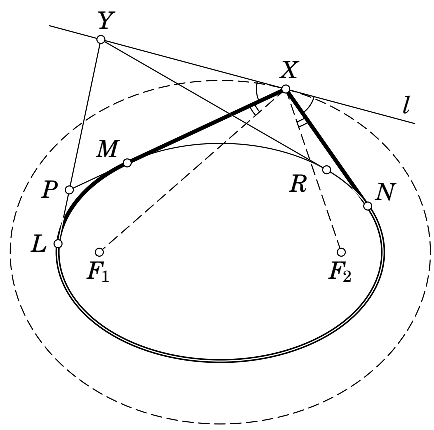

Рис. 1.19

Доказательство. Очевидно, что получившаяся фигура (обозначим ее через α_1) будет иметь гладкую границу. Покажем, что в каждой точке X на фигуре α_1 касательная будет совпадать с биссектрисой внешнего угла F_1XF_2.

Пусть XM и XN — касательные к α. Тогда $\angle F_1XN=\angle F_2XM$, а значит, биссектриса внешнего угла NXM будет совпадать с биссектрисой внешнего угла F_1XF_2. Обозначим ее через l.

Пусть Y — произвольная точка на прямой l, YL и YR — касательные к α, причем они проведены с тех же сторон, как показано на рис. 1.19. В дальнейших рассуждениях будет использоваться, что точка Y лежит «слева» от X, другой случай рассматривается аналогично.

Обозначим через P точку пересечения прямых XM и YL. Легко понять, что $YN<YR+\smile RN$, а $\smile LM<LP+PM$. Кроме того, посколь-

ку l — внешняя биссектриса угла NXP, имеем $PX+XN<PY+YN$. А значит,

$$MX+XN+\smile NM<MX+XN+\smile NL+LP+PM=$$
$$=PX+XN+\smile NL+LP<PY+YN+\smile NL+LP=LY+YN+\smile NL<$$
$$<LY+YR+\smile RN+\smile NL=LY+YR+\smile RL$$

(здесь под дугами подразумеваются дуги, по которым идет нить). Следовательно, точка Y будет вне фигуры α_1. То же верно для любой точки Y на прямой l. Получается, что α_1 содержит единственную точку прямой l, т. е. касается этой прямой. Из доказанного также сразу следует, что полученная кривая выпукла.

Итак, сумма расстояний до фокусов F_1 и F_2 в любой момент времени не меняется. Из этого можно сделать вывод, что она постоянна, а значит, траектория карандаша совпадает с эллипсом.

Строго это можно доказать так. Пусть точка X лежит вне эллипса. Поставим карандаш в точку X и натянем нить вокруг него и эллипса. Пусть $f(X)$ — длина такой нити, а $g(X)=F_1X+F_2X$ (точку мы понимаем как пару ее координат; таким образом, и функции f и g зависят от пары действительных чисел). Можно показать, что эти функции непрерывно дифференцируемы, причем векторы $\operatorname{grad} f=\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ и $\operatorname{grad} g=\left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}\right)$ отличны от нуля во всех точках. Тогда по теореме о неявной функции кривая, описываемая карандашом при фиксированной длине нити (т. е. линия уровня функции f), гладкая (непрерывно дифференцируемая). Отсюда следует, что кривую можно параметризовать дифференцируемой функцией $R=R(t)$ (это опять же пара координатных функций $x=x(t)$, $y=y(t)$), вектор производной которой отличен от нуля. Выше фактически доказано, что касательный к кривой вектор $\frac{dR}{dt}=\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$ касается линии уровня функции g, т. е. ортогонален вектору $\operatorname{grad} g(R)$ в точке $R=R(t)$. Рассмотрим функцию $g(R(t))$. Ее производная равна

$$\frac{dg(R(t))}{dt}=\frac{\partial g}{\partial x}\,\frac{dx(t)}{dt}+\frac{\partial g}{\partial y}\,\frac{dy(t)}{dt}\equiv 0$$

(это запись упомянутой выше ортогональности), т. е. функция $g(R(t))$ — константа. Это и означает, что наша кривая лежит на эллипсе с теми же фокусами. Поскольку на любом луче, исходящем из F_1, должна лежать точка нашей кривой, она совпадает с эллипсом. □

Задача 2. Пусть вокруг коники с фокусом F описан $2n$-угольник, стороны которого окрашены попеременно в черный и белый цвета. Докажите, что сумма углов, под которыми из F видны черные стороны многоугольника, равна 180°.

Задача 3. В выпуклый четырехугольник вписан эллипс, фокусы которого лежат на диагоналях (разных) четырехугольника. Докажите, что произведения противоположных сторон равны.

§ 1.5. Кривые второго порядка как проекции окружности

Проведем через центр окружности перпендикуляр к ее плоскости и возьмем на нем точку S. Прямые, соединяющие S с точками окружности, образуют конус. Рассмотрим сначала сечение конуса плоскостью π, пересекающей все его образующие и не перпендикулярной оси симметрии.

Впишем в конус два шара, касающиеся плоскости π в точках F_1 и F_2 (рис. 1.20).

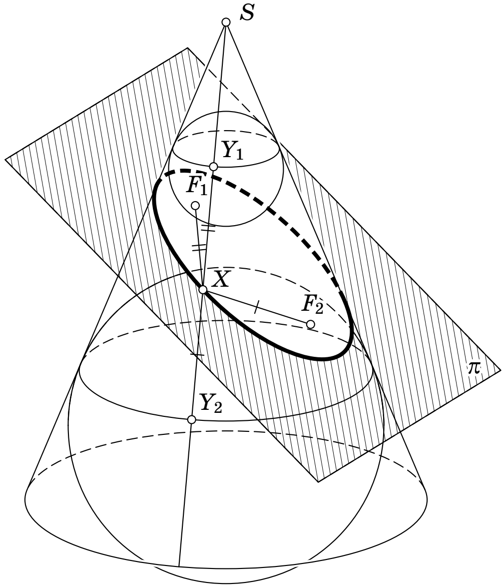

Рис. 1.20

Пусть X — произвольная точка на линии пересечения конуса с плоскостью π. Проведем через X образующую SX и найдем точки Y_1, Y_2 ее пересечения с вписанными шарами. Тогда $XF_1 = XY_1$, $XF_2 = XY_2$ как отрезки касательных к шарам, проведенных из одной точки. Следовательно, $XF_1 + XF_2 = Y_1Y_2$. Но Y_1Y_2 — это отрезок образующей, заключенный между двумя плоскостями, перпендикулярными оси конуса, и его длина не зависит от выбора точки X. Значит, линия пересечения конуса с плоскостью π является эллипсом. Отношение его полуосей зависит от наклона секущей плоскости и, очевидно, может принимать любые значения. Следовательно, любой эллипс может быть получен как центральная проекция окружности.

Аналогично доказывается, что если секущая плоскость параллельна двум образующим конуса, то в сечении получается гипербола (рис. 1.21).

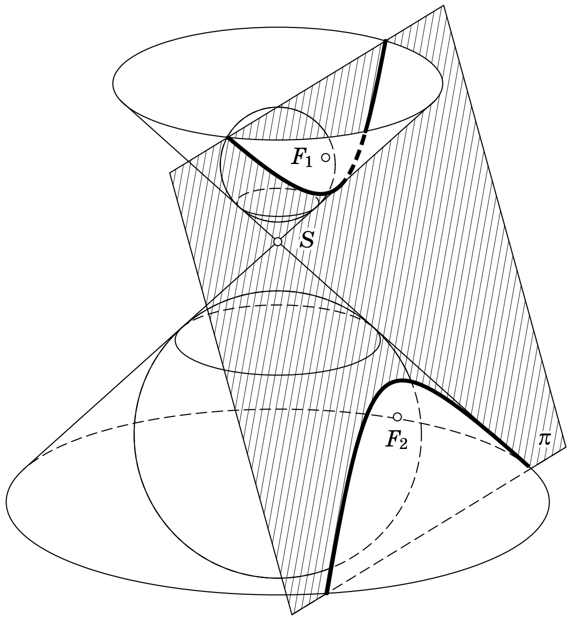

Рис. 1.21

Наконец, рассмотрим случай, когда секущая плоскость параллельна одной образующей (рис. 1.22).

Впишем в конус сферу, касающуюся этой плоскости π в точке F. Эта сфера касается конуса по окружности, лежащей в плоскости σ.

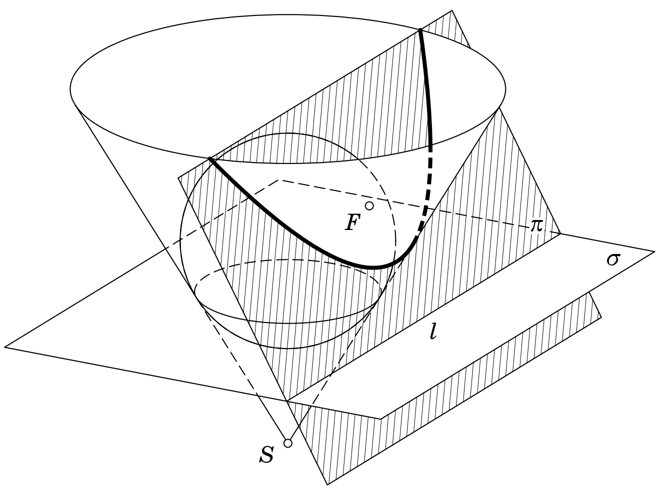

Рис. 1.22

Обозначим через l линию пересечения плоскостей π и σ. Возьмем произвольную точку X сечения конуса плоскостью π и найдем точку Y пересечения образующей SX с плоскостью σ и проекцию Z точки X на прямую l. Тогда $XF = XY$ как касательные к сфере. С другой стороны, точки Y и Z лежат в плоскости σ, угол между XY и σ равен углу между образующей конуса и плоскостью, перпендикулярной его оси, а угол между XZ и σ — углу между плоскостями π и σ. В силу выбора плоскости π эти углы равны. Значит, $XY = XZ$ как наклонные, образующие равные углы с плоскостью σ. Следовательно, $XF = XZ$, и точка X лежит на параболе с фокусом F и директрисой l.

Таким образом, всякая невырожденная кривая второго порядка может быть получена как сечение конуса. Поэтому такие кривые называют также *коническими сечениями* или просто *кониками*.

Надо сказать, что если вместо конуса будет цилиндр, то абсолютно такими же рассуждениями можно показать, что его сечением будет эллипс. Соответственно, эллипс может быть получен как параллельная проекция окружности.

Упражнение 1. Найдите геометрическое место середин хорд эллипса, параллельных данному направлению.

Решение. Рассмотрим эллипс как параллельную проекцию окружности. Тогда параллельным хордам эллипса и их серединам соответствуют параллельные хорды окружности и их середины, лежащие на диаметре окружности. Следовательно, геометрическим местом середин параллельных хорд эллипса также будет некоторый его диаметр (хорда, проходящая через центр).

Упражнение 2. С помощью циркуля и линейки найдите фокусы данного эллипса.

Решение. Построим две параллельные хорды эллипса. По предыдущему упражнению прямая, соединяющая их середины, является диаметром эллипса. Построив таким образом два диаметра, мы найдем центр эллипса O. В силу симметрии эллипса окружность с центром O пересекает эллипс в четырех точках, образующих прямоугольник со сторонами, параллельными осям эллипса. Теперь фокусы эллипса можно найти как точки пересечения большой оси и окружности с центром в конце малой оси и радиусом, равным большой полуоси.

Сферы, вписанные в конус и касающиеся секущей плоскости, называются *сферами Данделена*.

§ 1.6. Эксцентриситет и еще одно определение коник

Описанная в предыдущем параграфе конструкция Данделена дает еще одно важное свойство коник.

Пусть плоскость π пересекает все образующие кругового конуса с вершиной S. Впишем в конус сферу, касающуюся π в точке F_1. Как и в случае с параболой, проведем плоскость σ через точки касания. Прямую, по которой пересекаются π и σ, обозначим через l. Пусть X принадлежит конике, образующейся при пересечении конуса и плоскости π. Обозначим через Y точку пересечения прямой SX с плоскостью σ, а через Z проекцию X на прямую l. Покажем, что отношение XY к XZ постоянно, т. е. не зависит от выбора точки X.

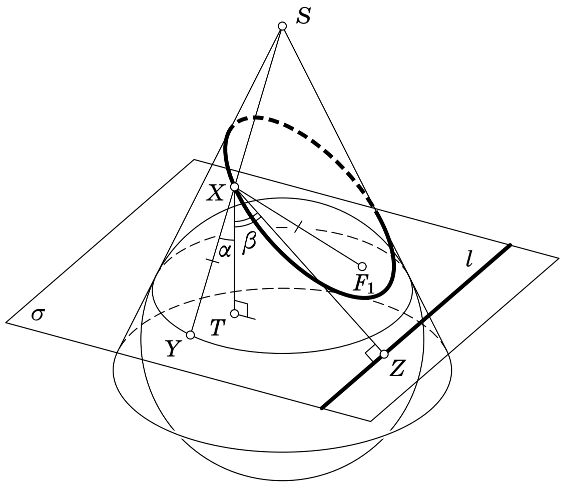

Рис. 1.23

Обозначим через T проекцию X на плоскость σ. Отношение XT к XY не будет зависеть от выбора точки X и будет равняться косинусу угла между образующей конуса и его осью (обозначим этот угол через α). Отношение XT к XZ тоже не зависит от выбора точки X и равно косинусу угла между плоскостью π и осью конуса (обозначим этот угол через β). Следовательно,

$$\frac{XY}{XZ} = \frac{XY}{XT} \cdot \frac{XT}{XZ} = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}.$$

Поскольку XF_1 и XY равны (так как это просто-напросто касательные к сфере, проведенные из точки X), отношение XF_1 к XZ постоянно.

Таким образом, для любой коники существует такая прямая l, что для любой точки на конике отношение расстояний до фокуса и этой прямой постоянно. Это отношение называется *эксцентриситетом* конической кривой, а прямые *директрисами*. Директрис у эллипса и гиперболы две (по одной для каждого фокуса).

Легко понять, что с помощью этого свойства можно сформулировать еще одно определение кривых второго порядка.

Конической кривой с фокусом в точке F, директрисой l (F не лежит на l) и эксцентриситетом ε называется множество точек, у которых отношение расстояний до F и до l равно ε.

Если $\varepsilon > 1$, то кривая — гипербола, если $\varepsilon < 1$, то эллипс, а в случае $\varepsilon = 1$ — парабола.

Задача 4. Докажите, что асимптоты всех равносторонних гипербол с фокусом в F, проходящих через точку P, касаются некоторых двух окружностей (одно семейство асимптот одной окружности, другое — другой).

§ 1.7. Замечательные свойства параболы

В этом параграфе через F мы будем обозначать фокус параболы, фигурирующей в рассуждениях.

Сперва сформулируем лемму, которая еще не раз нам пригодится.

Лемма 1.1. *Если фокус параболы отразить относительно касательной, то его образ попадет на директрису. Получившаяся точка будет проекцией точки, в которой касательная касается параболы* (рис. 1.24).

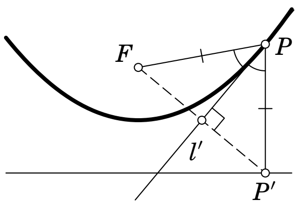

Рис. 1.24

Доказательство. Пусть прямая l касается параболы в точке P. Проекцию P на директрису обозначим через P'. Так как треугольник FPP' равнобедренный и l — биссектриса угла P, l является осью симметрии треугольника. Значит, точка F при симметрии относительно l переходит в точку P', лежащую на директрисе. □

Следствие. *Проекции фокуса параболы на его касательные лежат на прямой, касающейся параболы в ее вершине* (рис. 1.25).

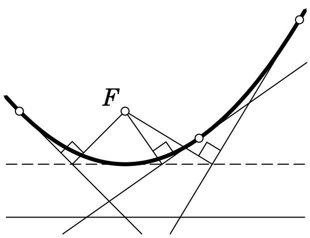

Рис. 1.25

Лемма 1.2. *Пусть касательные к параболе в точках X и Y пересекаются в точке P. Тогда P является центром описанной окружности треугольника $FX'Y'$, где X' и Y' — проекции точек X и Y на директрису параболы, а F — фокус этой параболы.*

Доказательство. В силу леммы 1.1 эти две касательные являются серединными перпендикулярами к отрезкам FX' и FY'. Следовательно, точка их пересечения и будет центром описанной окружности треугольника $FX'Y'$ (рис. 1.26). □

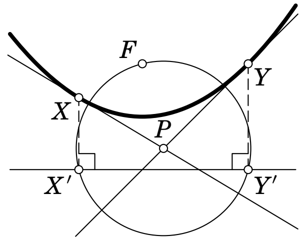

Рис. 1.26

Следствие. *Если PX и PY — касательные к параболе, то проекция точки P на директрису будет серединой отрезка с концами в проекциях точек X и Y* (рис. 1.27).

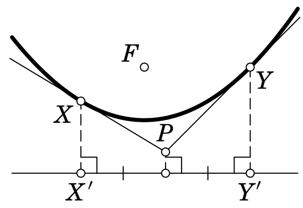

Рис. 1.27

Следующая теорема аналогична теоремам 1.2 и 1.5, но только для параболы. Как выглядит множество точек, из которых парабола видна под прямым углом? Оказывается, верен следующий факт.

Теорема 1.7. *Множество таких точек P, из которых парабола видна под прямым углом, есть директриса этой параболы. Кроме того, если PX и PY — касательные к этой параболе, то XY содержит F и PF — высота треугольника PXY* (рис. 1.28).

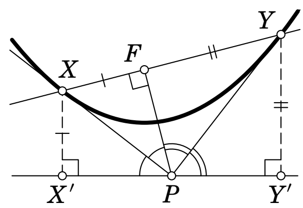

Рис. 1.28

Доказательство. Пусть точка P лежит на директрисе, а X' и Y' — проекции точек X и Y на директрису параболы. Тогда треугольники PXF и PXX' равны (они просто симметричны относительно PX). Значит, $\angle PFX = \angle PX'X = 90^\circ$. Аналогично $\angle PFY = \angle PY'Y = 90^\circ$. Кроме того, $\angle XPY = \frac{1}{2}(\angle FPX' + \angle FPY') = 90^\circ$. То, что других точек, обладающих этим свойством, нет, очевидно. □

Поскольку аналогичные факты верны и для остальных коник, эта теорема достаточно естественна. Однако первая часть этой теоремы имеет достаточно неожиданное обобщение, верное только для парабол. Оно нам еще пригодится в § 3.2 для доказательства теоремы Фрежье.

Теорема 1.8. *Множество точек, из которых парабола видна под углом φ или $180^\circ - \varphi$, есть гипербола с фокусом в точке F и директрисой l* (рис. 1.29).

Доказательство. Действительно, пусть касательные PX и PY, проведенные к параболе из точки P, образуют угол φ. Рассмотрим случай, когда $\varphi > 90^\circ$.

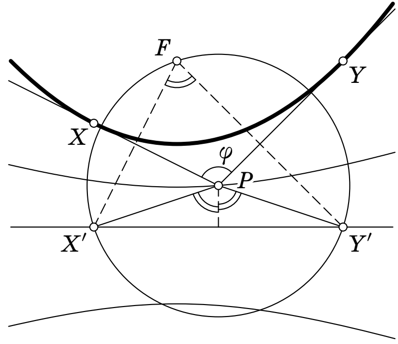

Рис. 1.29

Проекции точек X и Y на директрису параболы обозначим через X' и Y'. Понятно, что $\angle X'FY' = 180^\circ - \varphi$. В силу леммы 1.2 точка P является центром описанной окружности треугольника $FX'Y'$. А значит, $\angle X'PY' = 360^\circ - 2\varphi$.

Поэтому расстояние от P до директрисы равно $PF\,|\cos(180^\circ-\varphi)|=$ $=PF\,|\cos\varphi|$ и P лежит на гиперболе, фокус и директриса которой совпадают с фокусом и директрисой параболы, а эксцентриситет равен $|\cos\varphi|$ (т. е. угол между асимптотами равен 2φ).

То же справедливо, если угол между касательными равен $180^\circ-\varphi$. При этом если парабола лежит внутри острого угла между касательными, то P находится на «дальней» от F ветви гиперболы, а если внутри тупого, то на «ближней». □

Для парабол также можно сформулировать утверждение, аналогичное теоремам 1.3, 1.4.

Теорема 1.9. *Пусть PX и PY — касательные к параболе, проведенные из точки P, а l — прямая, проходящая через P параллельно оси параболы. Тогда угол между прямыми PY и l равен $\angle XPF$, а треугольники XFP и PFY подобны* (как следствие, FP — биссектриса угла XFY, см. рис. 1.30).

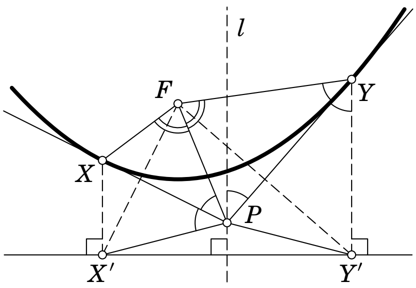

Рис. 1.30

Доказательство. Пусть X' и Y' — проекции точек X и Y на директрису. Тогда в силу теоремы 1.2 точки F, X' и Y' лежат на окружности с центром в точке P. Поэтому $\angle X'Y'F=\frac{1}{2}\angle X'PF=\angle XPF$. С другой стороны, угол между PY и l равен углу между $Y'F$ и $X'Y'$, так как прямая l перпендикулярна $X'Y'$ (директрисе параболы), а $Y'F$ перпендикулярно PY (более того, PY — это серединный перпендикуляр к $Y'F$). Первая часть теоремы доказана.

Докажем вторую часть. Поскольку прямая l параллельна YY', угол между PY и l равен углу PYY', который в силу оптического свойства равен углу FYP. Таким образом, $\angle FYP=\angle XPF$. Аналогично $\angle FXP=\angle YPF$. Следовательно, треугольники XFP и PFY подобны. □

Следующая теорема является на самом деле следствием теоремы 1.9. Но мы ее докажем, воспользовавшись прямой Симсона, которая поможет нам выйти на еще более интересные свойства параболы.

Теорема 1.10. *Пусть вокруг параболы описан треугольник ABC* (т. е. парабола касается прямых AB, BC, CA). *Тогда фокус этой параболы лежит на описанной окружности треугольника ABC.*

Доказательство. Согласно следствию из леммы 1.1 проекции фокуса на стороны лежат на одной прямой (эта прямая параллельна директрисе и лежит в два раза ближе к фокусу, чем директриса). Осталось воспользоваться леммой Симсона.

Лемма 1.3 (Симсон). *Проекции точки P на стороны треугольника ABC лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда точка P лежит на описанной окружности треугольника.*

Доказательство. Пусть P_a, P_b и P_c — проекции точки P на стороны BC, CA и AB соответственно. Мы рассмотрим случай, изображенный на рис. 1.31, остальные случаи рассматриваются аналогично.

Четырехугольник PCP_bP_a вписанный, поэтому $\angle PP_bP_a = \angle PCP_a$. Аналогично $\angle PP_bP_c = \angle PAP_c$. Точки P_a, P_b и P_c лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $\angle PP_bP_c = \angle PP_bP_a$, или, что то же самое, $\angle PAP_c = \angle PCP_a$. Но это и означает, что точка P лежит на описанной окружности треугольника ABC. Остальные случаи рассматриваются аналогично.

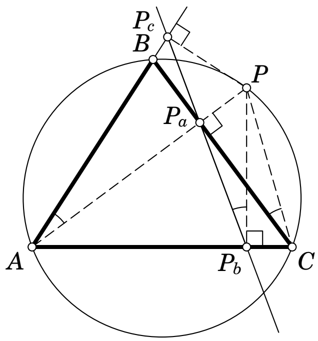

Рис. 1.31

Обратное утверждение доказывается абсолютно так же. Если точка P лежит на описанной окружности треугольника ABC, то $\angle PAB = \angle PCP_a = \angle PP_bP_a$ (последнее в силу того, что точки P, C, P_a и P_b лежат на окружности). Аналогично $\angle PAB = \angle PP_bP_c$. Следовательно, точки P_a, P_b и P_c лежат на одной прямой. □

Тем самым теорема 1.10 доказана. □

Получающаяся таким образом прямая называется *прямой Симсона* точки P.

Таким образом, точкам на описанной окружности треугольника ABC мы можем однозначно сопоставить параболу, касающуюся сторон этого треугольника. А именно, возьмем произвольную точку P на описанной окружности треугольника ABC и отразим ее относительно сторон треугольника. Получим точки P_A, P_B и P_C, лежащие на одной прямой. Парабола с фокусом в точке P и директрисой P_AP_C будет касаться всех сторон треугольника (например, стороны BC она будет касаться в точке пересечения BC с перпендикуляром к P_AP_C, см. рис. 1.32).

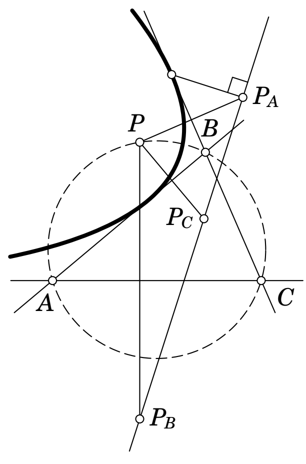

Рис. 1.32

Прямые Симсона обладают рядом интересных свойств.

Лемма 1.4. *Пусть точка P лежит на описанной окружности треугольника ABC. Пусть точка B' на описанной окружности выбрана так, что прямая PB' перпендикулярна AC. Тогда прямая BB' параллельна прямой Симсона точки P* (рис. 1.33).

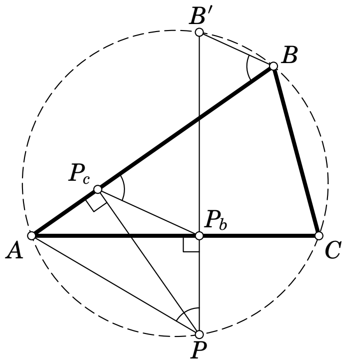

Рис. 1.33

Доказательство. Рассмотрим случай, изображенный на рис. 1.33, остальные случаи рассматриваются аналогично. Проекции точки P на стороны AB и AC обозначим через P_c и P_b соответственно. Тогда $\angle ABB' = \angle APB'$ как углы, опирающиеся на дугу AB'. Поскольку четырехугольник AP_cP_bP вписанный (AP — диаметр его описанной окружности), а сумма противоположных углов вписанного четырехугольника равна 180°, мы имеем $\angle APB' = \angle APP_b = 180^\circ - \angle AP_cP_b = \angle BP_cP_b$. Следовательно, прямая P_bP_c параллельна BB'. □

Следствие 1. *При вращении точки P по окружности прямая Симсона вращается в противоположную сторону, причем скорость ее вращения в два раза меньше, чем скорость изменения дуги PA.*

Следствие 2. *Прямая Симсона точки P относительно треугольника ABC делит отрезок PH (где H — ортоцентр треугольника ABC) пополам* (рис. 1.34).

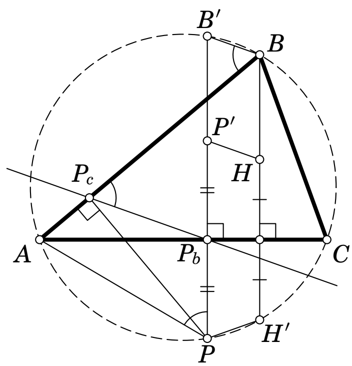

Рис. 1.34

Доказательство. Легко понять, что $\angle AHC = 180^\circ - ABC$, а значит, точка H', симметричная точке H относительно AC, лежит на описанной окружности треугольника ABC. Поскольку прямые PB' и BH' перпендикулярны AC, четырехугольник $PB'BH'$ будет трапецией, причем равнобокой, поскольку он вписан. А значит, прямая, симметричная PH' относительно AC (т. е. прямой, параллельной оси симметрии трапеции), будет параллельна BB'. Следовательно, прямая $P'H$ параллельна BB', а значит, и прямой Симсона точки P (здесь P' — образ точки P при симметрии относительно AC). Поскольку P_b (проекция точки P на сторону BC) является серединой отрезка PP', прямая Симсона будет средней линией треугольника HPP', а значит, будет делить HP пополам. □

Следствие 2 вкупе с теоремой 1.10 влечет за собой следующий очень красивый факт.

Теорема 1.11. *Ортоцентр треугольника, описанного около параболы, лежит на ее директрисе* (рис. 1.35).

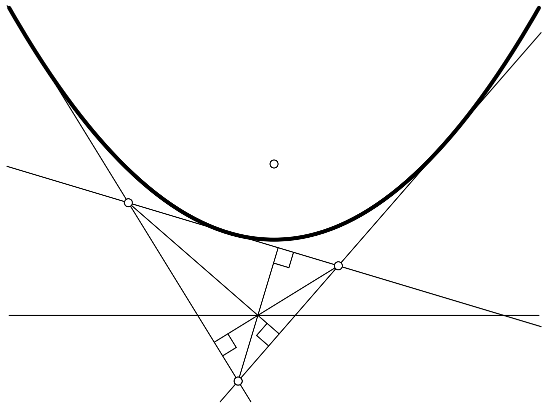

Рис. 1.35

Задача 5. Пусть точка X движется по параболе, нормаль к параболе в точке X (перпендикуляр к касательной) пересекает ее ось в точке Y, а Z — проекция точки X на ось. Докажите, что длина отрезка ZY не меняется.

Задача 6. По двум прямым дорогам с постоянными скоростями идут два пешехода. Докажите, что соединяющая их прямая все время касается некоторой параболы (дороги не параллельны, и через точку пересечения дорог пешеходы проходят не одновременно).

Задача 7. Парабола вписана в угол PAQ. Найдите геометрическое место середин отрезков, высекаемых сторонами угла на касательных к параболе.

Предметный указатель

Список литературы

[1] Александров П. С.
Лекции по аналитической геометрии.
М.: Наука, 1968.

[2] Яглом И. М.
Геометрические преобразования, Т. 1, 2.
М.: Гостехиздат, 1955–1956.

[3] Заславский А. А.
Геометрические преобразования.
М.: МЦНМО, 2003.

[4] Коксетер Г. С. М., Грейтцер С. Л.
Новые встречи с геометрией.
М.: Наука, 1978.

[5] Берже М.
Геометрия, Т. 1, 2.
М.: Мир, 1984.

[6] Кокстер Х. С. М.
Действительная проективная плоскость.
М.: Физматгиз, 1959.

[7] Гильберт Д., Кон-Фоссен С.
Наглядная геометрия.
М.: Наука, 1981.

[8] Емельянов Л. А., Емельянова Т. Л.
Семейство Фейербаха.
// Математическое просвещение.
Третья серия. Вып. 6. 2002. С. 78–92.

[9] Lemaire J.
L'hyperbole équilatère.
Paris: Vuibert, 1927.

[10] Ehrmann J.-P., van Lamoen, F.
*A projective generalization
of the Droz-Farny line theorem.*
// Forum Geom. 2004. № 4. P. 225–227.

В книге использованы шрифты гарнитуры Школьная фирмы ParaType.

Эскизы иллюстраций выполнены А. В. Акопяном в свободно распространяемой программе Kig (KDE Interactive Geometry). При подготовке издания они были перерисованы в программе MetaPost.

А. В. Акопян
А. А. Заславский

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА
КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Технический редактор *В. Ю. Радионов*
Редактор *Е. Ю. Бунькова*
Корректор *О. А. Васильева*

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11
Тел. (495) 241–74–83

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ППП «Типография „Наука“»
121099, Москва, Шубинский пер., 6