ЗАДАЧА СИЛЬВЕСТРА

С. Табачников, В. Тиморин

1. Задача

В 1893 году Сильвестр поставил такую задачу [S]: верно ли, что среди любого конечного множества точек на плоскости, не лежащих на одной прямой, найдется пара точек, такая, что проходящая через них прямая не содержит никаких других точек данного множества? (Такая прямая, если она существует, называется *прямой Сильвестра*). Несмотря на элементарную формулировку, задача оставалась открытой 40 лет. Возможно, этой задачей просто никто не занимался. В 1933 году известный венгерский математик Эрдёш переоткрыл задачу Сильвестра, и после нескольких неудачных попыток её решить, сообщил её своему коллеге Тибору Грюнвальду (позже Грюнвальд сменил свою фамилию на Галлаи; он более известен под этой второй фамилией). Галлаи вскоре решил задачу. Однако широкую известность задача получила ещё через 10 лет, в 1943 году, когда Эрдёш опубликовал её в популярном американском математическом журнале American Mathematical Monthly [E]. Одновременно с задачей, в редакцию было представлено и решение, полученное Галлаи. Вскоре в редакцию поступило ещё несколько решений, полученных Баком, Келли, Штейнбергом и Стинродом.

Ответ на вопрос Сильвестра положительный:

Теорема. *Для любого конечного неколлинеарного (т.е. не лежащего на одной прямой) набора точек на плоскости, существует прямая Сильвестра.*

Мы будем называть это утверждение *теоремой Сильвестра–Галлаи.* Заметим, что первое опубликованное доказательство этой теоремы (1941) принадлежит Мельхиору [Me]. Известно множество доказательств теоремы Сильвестра–Галлаи, использующих идеи из самых разных областей математики. Мы обсудим некоторые из этих идей. Во-первых, мы руководствуемся принципом: полезней знать различные доказательства одной и той же теоремы, чем одинаковые доказательства разных теорем. Во-вторых, различные идеи доказательства теоремы Сильвестра–Галлаи связаны с различными математическими теориями, и мы хотим дать читателю представление об этих теориях.

2. Немного истории: Сильвестр, Эрдёш и Галлаи

Прежде, чем говорить о решениях задачи Сильвестра, скажем несколько слов о самом Сильвестре (1814–1897). Это математик, получивший фундаментальные результаты в теории инвариантов, полилинейной алгебре, теории чисел и комбинаторике. Кстати, Сильвестру принадлежит термин «детерминант». Кэли и Сильвестр - вот два самых знаменитых математика Викторианской Англии.

Джеймс Джозеф Сильвестр родился в семье купца Абрахама Джозефа. Джеймс взял фамилию Сильвестр, следуя примеру своего старшего брата, эмигрировавшего в США. Сильвестр сменил несколько школ и колледжей. Там он страдал от многочисленных конфликтов, в большой степени связанных с его еврейским происхождением.

По результатам выпускного математического экзамена в Кембридже, Сильвестр занял второе место (это очень серъезный традиционный экзамен, the tripos, в ходе которого студенты писали десятки экзаменационных работ, включавших сотни задач; при этом самый лучший результат мог быть порядка 50 процентов). Экзамен, в принципе, давал право на получение одновременно степеней бакалавра и магистра. Но Сильвестр не получил эти степени, так как отказался от соответствующей формальной процедуры, включавшей признание канонов англиканской церкви. (Отметим в скобках, что подобные трудности, и тоже в Кембридже, были у И. Ньютона: хотя и христианин, он придерживался неортодоксальных взглядов и не верил в догмат троицы). Научные степени Сильвестр получил только через 4 года, уже будучи профессором физики в лондонском University College.

Сразу после этого Сильвестр переехал в США, чтобы преподавать математику в университете Вирджинии. Там он не проработал и пяти месяцев. Причина ухода состояла в том, что его коллеги не поддержали его в стремлении выгнать одного студента.

После безуспешного поиска работы в США, Сильвестр вернулся в Англию, и стал работать актуарием. Только в 1855 году (т.е. в возрасте 40 лет) ему удалось получить постоянную академическую позицию в королевской военной академии в Вулвиче. Там, однако, приходилось много времени тратить на преподавание. Уже через 15 лет (в возрасте 55 лет) Сильвестр должен был выйти на пенсию. Интересным образом, рассвет математической карьеры Сильвестра пришелся на после-пенсионный возраст.

В 1877–1883 годах Сильвестр возглавлял отделение математики в американском Johns Hopkins University, основал «Американский Математический Журнал» (American Journal of Mathematics). С 1883 года до конца жизни Сильвестр руководил кафедрой геометрии в Оксфорде. Задача Сильвестра приходится на этот, последний, период его жизни. Недавно появилась подробная биография Сильвестра [P].

Рис. 1. Сильвестр, Эрдёш и Галлаи

Имя Пала Эрдёша (1913–1996), одного из самых известных и влиятельных математиков 20 века, конечно, знакомо читателям; ему задача Сильвестра обязана своей (запоздавшей) популярностью. За свою жизнь, Эрдёш опубликовал 1475 математических статей (это абсолютный рекорд среди математиков всех времен и народов). Большинство статей было написано с соавторами, которых насчитывается 511. В связи с этим было введено "число Эрдёша". Число Эрдёша математика — это сколько соавторов отделяют его от Эрдёша. Число Эрдёша самого Эрдёша равно нулю, у его соавторов это число равно единице, у соавторов соавторов двойке, и т.д. Большинство активно работающих математиков имеет малые числа Эрдёша (не больше 8). Например, числа Эрдёша авторов этой статьи равны 3 и 5.

Тибор Галлаи (1912-1992) был близким другой Эрдёша. Ещё задолго до того, как они впервые увидели друг друга, они были знакомы заочно, как самые активные участники конкурса математических задач, проводимого Венгерским Математическим Журналом для Старшей Школы. Этот журнал был близок по содержанию к журналу «Квант». Галлаи (в то время Грюнвальд) стал победителем престижной математической олимпиады Этвёша, и, как таковой, был принят в университет вне конкурса. Самая старая в мире, олимпиада Этвёша проводится с 1894 года, и началась с инициативы министерства образования, которое возглавлял в то время известный физик барон Этвёш. Многие победители этой олимпиады стали в последствии знаменитыми математиками и физиками.

3. Келли и Штейнберг

Теперь, после долгого исторического введения, приступим к математике. Пожалуй, самое простое доказательство теоремы Сильвестра–Галлаи принадлежит Келли (оно было опубликовано Кокстером [C48]).

Идея доказательства состоит в следующем. Предположим, для некоторого конечного множества M точек на плоскости прямой Сильвестра не существует. Тогда нам нужно доказать, что все точки коллинеарны. Предположим, что это не так. Рассмотрим три неколлинеарные точки A, B и C из множества M, такие, что расстояние от точки A до прямой BC минимально (то есть среди всех пар «точка множества M» и «прямая, соединяющая две различные точки множества M» выберем такую, в которой расстояние от точки до прямой положительно и минимально). Заметим, что прямая BC содержит по крайней мере три точки множества M, иначе она будет прямой Сильвестра. Тогда две из этих точек, скажем, B и C, лежат по одну сторону от основания перпендикуляра из точки A на прямую BC. Противоречие получается из такого факта: расстояние от одной из этих точек до прямой соединяющей A с другой точкой будет меньше, чем расстояние от A до прямой BC, см. рисунок 2.

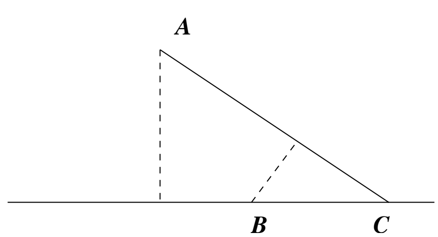

Рис. 2

Упражнение. Докажите, что высота тупоугольного треугольника, опущенная из тупого угла, меньше высоты, опущенной из острого угла. Докажите также аналогичное утверждение для прямоугольного треугольника.

Решение Келли очень просто, но обладает таким недостатком (скорее эстетическим и методологическим, чем собственно математическим). В формулировке задачи используются только понятия точки, прямой и отношения принадлежности. Евклидово расстояние в ней никак не фигурирует. На самом деле, есть много способов определить «расстояние» на плоскости. Эти разные «расстояния» отличны от привычного евклидового расстояния, но обладают похожими (или даже идентичными) свойствами. То, как определяется расстояние, не важно для отношения принадлежности между точками и прямыми. Многие из альтернативных «расстояний» могут быть использованы в доказательстве теоремы Сильвестра–Галлаи. Кажется естественным такой вопрос: можно ли обойтись в доказательстве теоремы только рассмотрением взаимного расположения точек и прямых, но не использовать такие понятия, как расстояние, угол, перпендикуляр и т.д. Оказывается, можно доказать теорему, используя только отношение принадлежности между точками и прямыми и отношение порядка между точками на прямой: такое доказательство принадлежит Штейнбергу.

Упражнение. Рассмотрим конечное множество точек M. Выберем точку X из M и прямую L, проходящую через точку X и не содержащую других точек множества M. Мы можем считать, что ни одна прямая, проходящая через X, не является прямой Сильвестра (иначе теорема доказана). Назовем *соединительной прямой* прямую, содержащую по меньшей мере 2 точки множества M. Ясно, что существует только конечное число соединительных прямых. Среди точек пересечения прямой L с различными соединительными прямыми, найдется такая точка Y, что отрезок XY не содержит других точек пересечения. Докажите, что соединительная прямая, проходящая через точку Y, является прямой Сильвестра. *Указание:* Если нет, то соединительная прямая L_Y, проходящая через Y, содержит по меньшей мере три точки множества M. Значит, с какой-то стороны от Y на прямой L_Y лежат две точки множества M. Обозначим через Z «дальнюю» точку (в смысле порядка точек на прямой — расстояние нам не нужно). Одну из точек множества M, лежащих на прямой XZ, можно соединить с одной из точек множества M, лежащих на прямой L_Y так, что пересечение соответствующей соединительной прямой с прямой L находится строго внутри отрезка XY (здесь нужен небольшой перебор различных вариантов расположения точек). Противоречие с выбором точки Y.

4. Галлаи

Намеченное выше доказательство Штейнберга является модификацией доказательства Галлаи. Само доказательство Галлаи использует чуть больше, а именно, меру углов и понятие параллельности.

Снова рассмотрим прямую L, проходящую ровно через одну точку X нашего множества. Представим себе плоскость вложенной в трехмерное пространство (чтобы отличать её от других плоскостей, назовём её *начальной*), и зафиксируем некоторую точку O, не принадлежащую начальной плоскости. Через точку O и прямую L проходит единственная плоскость. Рассмотрим параллельную ей плоскость P, и спроецируем начальную плоскость на плоскость P из точки O. Заметим, что прямая L не имеет образа на плоскости P, поскольку никакой луч, начинающийся в O и проходящий через L, не пересечёт P. Выражаясь образно, L переходит в «бесконечно удаленную прямую на плоскости P». Чёткое утверждение (которое нетрудно проверить) состоит вот в чём: прямые в начальной плоскости, проходящие через одну и ту же точку на прямой L, проецируются в параллельные прямые.

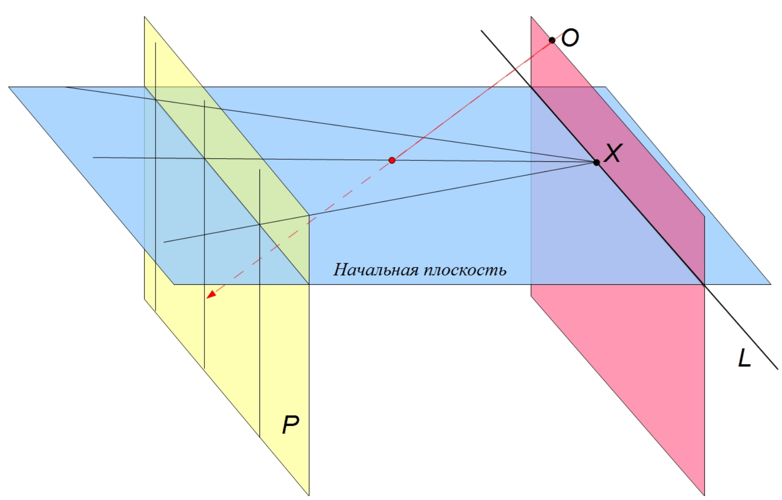

Рис. 3

Напомним, что прямая L проходит через ровно одну точку X множества M. Кроме того, мы можем предполагать, что все прямые, проходящие через X и ещё одну точку множества M, обязательно содержат какую-нибудь третью точку множества M. Образы этих прямых при нашей проекции являются параллельными прямыми, содержащими по меньшей мере по две точки множества M' (проекции множества M на плоскость P). Теперь доказательство теоремы Сильвестра–Галлаи получается из следующего утверждения.

Рассмотрим конечное множество M' на плоскости и конечное множество параллельных прямых, такое, что каждая из этих прямых содержит по меньшей мере две точки множества M', и все точки множества M' содержатся в объединении этих прямых. Рассмотрим прямую, соединяющую две точки множества M' и образующую наименьший угол с направлением рассматриваемых параллельных прямых. Эта прямая не может содержать никакой третьей точки множества M'.

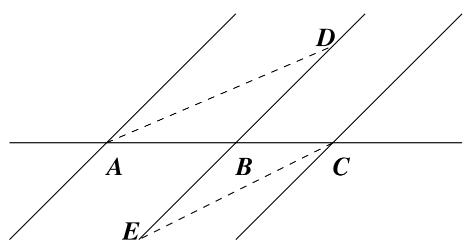

Рис. 4

Действительно, если эта прямая содержит три точки A, B, C, то одна из прямых, соединяющих A или C с точкой E или D множества M' образует еще меньший угол с направлением наших прямых: см. рисунок 4.

5. Сколько прямых?

Укажем одно интересное следствие теоремы Сильвестра–Галлаи.

Теорема. *Предположим, что отмечены n точек на плоскости, не лежащих на одной прямой. Тогда найдется по меньшей мере n прямых, соединяющих пары отмеченных точек.*

Доказательство. Будем вести индукцию по количеству точек. Для трёх неколлинеарных точек утверждение очевидно. Предположим, что утверждение доказано для любого набора из n точек плоскости, не лежащих на одной прямой. Рассмотрим теперь набор из $n+1$ выделенной точки. Пусть A — одна из этих точек. Если оставшиеся n выделенных точек лежат на одной прямой, то, соединяя каждую из них с точкой A, получим ещё n прямых; утверждение доказано.

Предположим теперь, что оставшиеся n выделенных точек не лежат на одной прямой. Тогда, согласно предположению индукции, они определяют по меньшей мере n прямых (каждая из которых соединяет две из оставшихся выделенных точек). Может так случиться, что все эти прямые проходят через точку A. В этом случае, назовём точку A *плохой*. Если все выделенные точки плохие, то прямая, содержащая две выделенные точки, обязательно содержит и третью. Противоречие с теоремой Сильвестра–Галлаи.

Замечание. Естественный вопрос: сколько прямых Сильвестра определяет данное неколлинеарное множество из n точек? Известно [KM], что прямых Сильвестра должно быть не меньше, чем $3n/7$. Гансен доказал в своей диссертации (1981), что прямых Сильвестра всегда не меньше, чем $n/2$. К сожалению, доказательство Гансена очень сложно, и его никому не удалось проверить. Унгар доказал [U], что n точек, не лежащих на одной прямой, определяют по меньшей мере $2[n/2]$ разных направлений. Эту оценку нельзя улучшить.

6. На сфере

Обсудим ещё одно доказательство теоремы Сильвестра–Галлаи. Оно было предложено Е. Мельхиором [Me] и, независимо, Н. Стинродом — известным американским топологом. И само доказательство топологическое. Начнем с того, что перейдем с плоскости на сферу.

Рассмотрим центральную проекцию сферы на плоскость. Центральная проекция — это такое отображение сферы на плоскость, при котором прямая, соединяющая точку сферы с её образом на плоскости, всегда проходит через центр сферы. Мы можем проецировать сферу на любую плоскость, не проходящую через центр. При такой проекции, в каждую точку плоскости будет отображаться пара диаметрально противоположных точек сферы. Кроме того, на сфере найдётся такая большая окружность (т.е. пересечение сферы с плоскостью, проходящей через центр сферы), проекции точек которой не определены. Эта окружность параллельна плоскости, на которую мы проецируем.

Опишем теперь очень полезную конструкцию сферической двойственности. Каждой паре диаметрально противоположных точек на сфере соответствует большая окружность. А именно, проведем соответствующий диаметр сферы, а также плоскость, проходящую через центр и перпендикулярную диаметру. Эта плоскость высечет на сфере некоторую большую окружность. Обратно, каждой большой окружности на сфере соответствуют ровно две диаметрально противоположные точки — концы диаметра, перпендикулярного плоскости данной большой окружности.

Теперь каждой точке на плоскости соответствует пара диаметрально противоположных точек на сфере (это соответствие устанавливается центральной проекцией, как описано выше), а следовательно, и некоторая большая окружность.

Упражнение. Сферическая двойственность «уважает» отношение инцидентности: если точка A лежит на большой окружности b, то соответствующая большая окружность a проходит через точку B.

Упражнение. Три точки на плоскости тогда и только тогда лежат на одной прямой, когда соответствующие большие окружности на сфере проходят через одну и ту же пару диаметрально противоположных точек.

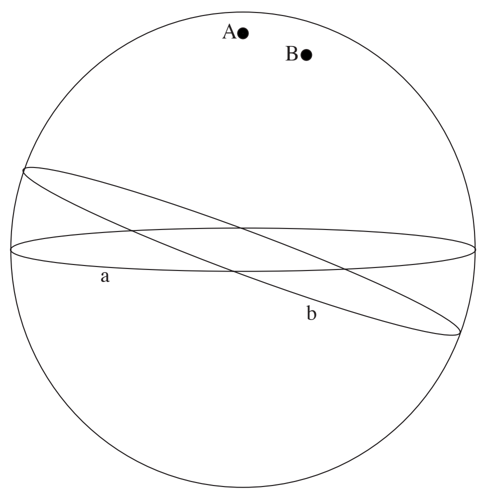

Рис. 5

Упражнение. Пусть точкам A и B отвечают большие окружности a и b. Докажите, что угол между a и b равен сферическому расстоянию между A и B, см. рисунок 5.

Итак, мы видим, что теорема Сильвестра–Галлаи эквивалентна следующему утверждению. Пусть дано конечное множество больших окружностей на сфере. Тогда, если не все эти окружности проходят через одну и ту же пару диаметрально противоположных точек, то найдется точка, содержащая ровно две окружности из нашего множества.

7. Мельхиор, Стинрод и Эйлер

Опишем теперь доказательство Мельхиора и Стинрода.

Нам достаточно доказать утверждение про большие окружности на сфере, и тем самым будет доказана теорема Сильвестра–Галлаи. На самом деле, можно доказать более общее утверждение. Рассмотрим конечное число точек на сфере. Будем называть эти точки *вершинами*. Рассмотрим также конечное число простых криволинейных дуг, соединяющих некоторые пары вершин. Допустим, что эти дуги не имеют общих точек, кроме вершин. Назовем эти дуги *ребрами*. Если на сфере нарисовать дуги и ребра, то они разобьют всю сферу на несколько кусков, которые мы будем называть *гранями*. Всю картинку, включающую вершины, ребра и грани, мы назовём *картой* на сфере.

Теорема. *Не существует такой карты на сфере, что каждая грань ограниченна по меньшей мере тремя рёбрами, а из каждой вершины выходит по меньшей мере шесть рёбер.*

Из этой чисто топологической теоремы вытекает утверждение про большие окружности на сфере, сформулированное в конце предыдущего параграфа и эквивалентное теореме Сильвестра–Галлаи.

Доказательство. Пусть F_k — число граней, ограниченных k рёбрами, а V_k — число вершин, из которых выходит k ребер. Обозначим через F, E и V, соответственно, общее число граней, число рёбер и число вершин, принадлежащих рассматриваемой карте. Мы будем пользоваться известной *теоремой Эйлера*:

$$F - E + V = 2.$$

Читатель, скорее всего, знаком с этой теоремой; если это не так, мы рекомендуем доказать ее по индукции.

Посчитаем количество пар (вершина, выходящее из неё ребро). С одной стороны, каждое ребро ограниченно ровно двумя вершинами. Значит, таких пар ровно $2E$. С другой стороны, число таких пар равно $6V_6+7V_7+\cdots \geq 6V$. Отсюда получаем неравенство $2E \geq 6V$.

Посчитаем теперь количество пар (грань, ребро на её границе). С одной стороны, каждое ребро лежит на границе ровно двух граней.

Значит, таких пар ровно $2E$. С другой стороны, число таких пар равно $3F_3+4F_4+\cdots \geq 3F$. Отсюда получаем неравенство $2E \geq 3F$.

Комбинируя полученные неравенства, приходим к противоречию:

$$6(E+2) = 6V + 6F \leq 2E + 4E = 6E.$$

Упражнение. Рассмотрим карту на сфере. Количество ребер, выходящих из данной вершины, назовём *порядком* этой вершины. Докажите, что если каждая грань ограниченна по меньшей мере тремя ребрами, то средний порядок вершины не превосходит 6. (Средний порядок вершины — это среднее арифметическое порядков всех вершин, то есть сумма порядков всех вершин, деленная на количество вершин.)

Упражнение. Рассмотрим выпуклый многогранник в трёхмерном пространстве. Число рёбер многогранника, выходящих из данной вершины, назовём порядком вершины. Число рёбер многогранника, лежащих на данной грани, назовём порядком грани. Докажите, что средний порядок вершины, а также средний порядок грани не превосходят 6. Приведите пример многогранника, средний порядок грани которого превышает 5,5.

Упражнение. Следующее утверждение называется *двойственной теоремой Сильвестра–Галлаи.* Рассмотрим конечное множество прямых на плоскости, никакие две из которых не параллельны. Предположим, что эти прямые не проходят через одну и ту же точку. Тогда найдётся точка, содержащая ровно две прямые рассматриваемого множества. Докажите, что двойственная теорема Сильвестра–Галлаи эквивалентна теореме Сильвестра–Галлаи. *Указание:* воспользуйтесь утверждением про большие окружности на сфере, а также центральной проекцией сферы на плоскость, при которой большие окружности переходят в прямые.

Упражнение. Покажите, что в утверждении двойственной теоремы Сильвестра–Галлаи можно предполагать без ограничения общности, что среди рассматриваемого конечного множества прямых нет никакой пары параллельных прямых. *Указание:* этого можно добиться, проецируя сферу на подходящую плоскость.

8. Элкис и Зайденберг

Наконец, еще одно доказательство теоремы Сильвестра–Галлаи, которое было придумано независимо Н. Элкисом и М. Зайденбергом. Начнем с двух упражнений — они достаточно сложные, по уровню как серьезные олимпиадные задачи. Решения и указания к этим задачам можно найти в книге [Ш] (задача 38 б) на стр. 37).

Упражнение. Пусть ABC — треугольник на плоскости, а PQR — вписанный в него треугольник (так, что вершины P, Q, R треугольника PQR принадлежат, соответственно, сторонам AB, BC, AC треугольника ABC). Докажите, что площадь одного из трех треугольников, остающихся при выкидывании треугольника PQR из треугольника ABC, не превышает площади треугольника PQR.

Упражнение. Если в предыдущем упражнении площадь треугольника APR совпадает с площадью треугольника PQR, а площади треугольников PBQ и QCR не меньше, то стороны PQ, QR и RP параллельны, соответственно, сторонам CA, AB, BC.

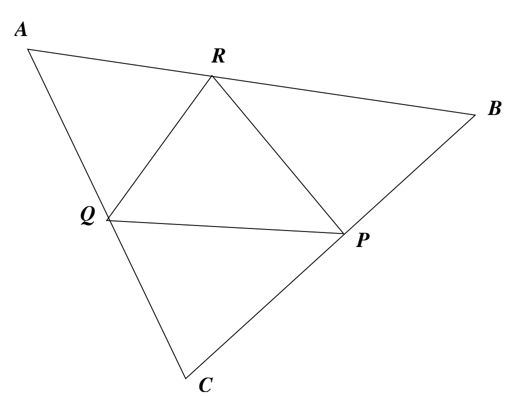

Рис. 6

Докажем теперь двойственную теорему Сильвестра–Галлаи (а тем самым и саму теорему Сильвестра–Галлаи). Рассмотрим конечное число прямых на плоскости. Допустим, что не все эти прямые проходят через одну точку. Мы также можем предполагать без ограничения общности, что в рассматриваемом множестве прямых нет параллельных. Тогда можно рассмотреть треугольники, ограниченные различными тройками прямых. Среди всех таких треугольников выберем треугольник наименьшей площади. Обозначим этот треугольник через PQR. Теперь мы предположим, что через каждую точку пересечения двух прямых нашего множества проходит еще какая-то третья прямая нашего множества (это предположение должно привести нас к противоречию). В частности, есть прямые нашего множества, проходящие через вершины треугольника PQR, но не совпадающие со сторонами этого треугольника. Поскольку треугольник PQR имеет, по определению, минимальную площадь, эти дополнительные прямые не заходят внутрь треугольника. Значит, они ограничивают треугольник ABC, описанный вокруг треугольника PQR. Воспользуемся результатами приведенных выше упражнений. Мы получаем противоречие с минимальностью площади, если только стороны треугольника PQR не параллельны соответствующим сторонам треугольника ABC. Однако мы предположили, что в рассматриваемом множестве прямых нет параллельных.

9. Комплексные числа: контрпример[1]

К разряду неожиданностей можно отнести тот факт, что «комплексификация» теоремы Сильвестра–Галлаи не верна.

Точки и прямые, про которые мы говорили до сих пор, были действительными точками и действительными прямыми. Если ввести на плоскости систему координат, то действительные точки изобразятся парами действительных чисел. Действительную прямую можно определить как множество действительных точек, удовлетворяющих определенному линейному уравнению с действительными коэффициентами. Однако, в качестве координат можно брать и комплексные числа. Соответственно, можно говорить о комплексных точках, комплексных прямых (они описываются уравнениями такого же вида, как для действительных прямых) и т.д. Множество всех комплексных точек плоскости сложнее себе представить, поскольку оно естественным образом отождествляется с действительным четырёхмерным, а не двумерным, пространством.

Рассмотрим такую систему уравнений:

$$z^3 + w^3 + (1 + 2z + 3w)^3 = zw(1 + 2z + 3w) = 0.$$

Существует ровно 9 комплексных точек (то есть 9 пар комплексных чисел (z, w)), удовлетворяющих этой системе — по три точки на каждой из трех прямых $z = 0$, $w = 0$, $1 + 2z + 3w = 0$. Например, если подставить $z = 0$ в первое уравнение, то получится кубическое уравнение на w, у которого три комплексных решения — они соответствуют трем точкам на прямой $z = 0$; точно также можно поступить с двумя остальными прямыми. Комплексная

[1]Читатель, не знакомый с комплексными числами, может пропустить этот раздел без ущерба для понимания дальнейшего текста.

прямая, проходящая через любые две из полученных девяти точек, содержит также некоторую третью точку. С другой стороны, не существует комплексной прямой, проходящей через все 9 рассматриваемых точек.

Упражнение. Докажите эти утверждения.

Итак, мы убедились, что над комплексными числами теорема Сильвестра–Галлаи не имеет места. Заметим, что коэффициенты в выражении $1 + 2z + 3w$ можно выбирать почти произвольным образом (избегая только некоторых вырождений, при которых одна из девяти точек убегает на бесконечность); например, можно с тем же успехом взять $e + \pi z + iw$.

Отметим, кстати, что уравнение $z^3 + w^3 + (1 + 2z + 3w)^3 = 0$ задает на комплексной плоскости кубическую кривую, а уравнение $zw(1 + 2z + 3w) = 0$ описывает точки перегиба этой кривой. Таким образом, наши девять точек — это точки перегиба комплесной кубической кривой. Из этих девяти точек только три могут быть вещественными.

10. Графики многочленов: теорема Борвейна

Формулировка задачи Сильвестра настолько общая, что в ней можно заменять точки и прямые на многие другие объекты, и получать осмысленные утверждения. Прямые и точки обладают некоторыми специальными свойствами. Например, через каждую пару точек можно провести прямую, и только одну. Похожие утверждения имеют место для графиков многочленов. Например, рассмотрим графики квадратных трехчленов

$$y = ax^2 + bx + c$$

($a = 0$ не воспрещается!)

Упражнение. Докажите, что через каждую тройку точек с различными x-координатами проходит график квадратного трехчлена, и только один.

Перенесем теорему Сильвестра–Галлаи на графики квадратных трехчленов. Рассмотрим конечное множество M точек на плоскости с различными x-координатами. Предположим, что не все точки множества M лежат на графике одного и того же квадратного трехчлена. В этом случае найдется такой квадратный трехчлен (аналог прямой Сильвестра), график которого содержит ровно три точки из множества M.

Доказательство. Предположим, что график квадратного трехчлена, проходящий через любую тройку точек множества M, содержит хотя бы еще одну точку этого множества. Предположим также, что не всё множество M принадлежит одному графику.

Будем измерять расстояние от точки плоскости до графика функции по вертикали. Если расстояние равно нулю, то точка лежит на графике. Среди пар, состоящих из точек множества M и графиков квадратных трехчленов, проходящих через тройки точек множества M, найдется пара с минимальным ненулевым расстоянием от точки до графика. Обозначим эту точку через (a, b), а квадратный трехчлен через $g(x)$. Пусть $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ – абсциссы четырех точек множества M на графике $y = g(x)$.

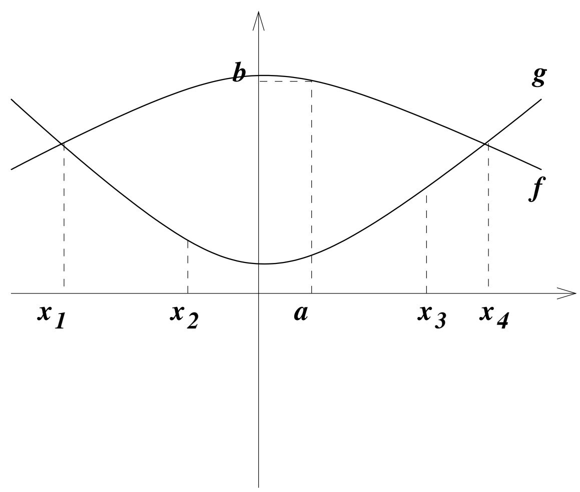

Рис. 7

Рассмотрим случай $x_2 < a < x_3$. Существует квадратный трехчлен $f(x)$, график которого проходит через три точки $(x_1, g(x_1))$, (a, b), $(x_4, g(x_4))$, см. рисунок 7. Рассмотрим квадратный трехчлен $h(x) = f(x) - g(x)$. Поскольку x_1 и x_4 – его корни, $h(x)$ меняет монотонность на отрезке (x_1, x_4) не более одного раза (на рисунке – сначала возрастает, затем убывает). Это означает, что хотя бы одно из чисел $|h(x_2)|$ и $|h(x_3)|$ меньше, чем $|h(a)|$. А значит, или точка $(x_2, g(x_2))$ или точка $(x_3, g(x_3))$ находится ближе к графику $y = f(x)$, чем (a, b) к $y = g(x)$. Противоречие.

Упражнение. Рассмотрите оставшиеся случаи: $a < x_2$ и $x_3 < a$.

Теорема для квадратных трехчленов является частным случаем более общей теоремы Борвейна [B], относящейся к произвольным системам Чебышева. Формулировать ее в полной общности мы не будем, но наметим ещё несколько частных случаев в виде упражнений.

Упражнение. Докажите, что через любые $n+1$ точек на плоскости с различными x-координатами можно провести график многочлена степени не выше n. Более того, такой многочлен ровно один. Сформулируйте и докажите обобщение теоремы Сильвестра–Галлаи для графиков многочленов степени не выше n.

Упражнение. Рассмотрим функции вида

$$f(x) = a\cos x + b\sin x + c.$$

Докажите, что если f не равна тождественно нулю, то она обращается в нуль не более чем для двух значений x в полуинтервале $[0, 2\pi)$. Сформулируйте и докажите аналог теоремы Сильвестра–Галлаи для функций данного класса. *Указание:* искомый аналог будет некоторым утверждением про конечное множество точек на плоскости, x-координаты которых различны и лежат в некотором фиксированном полуинтервале длины 2π, скажем, в $[0, 2\pi)$.

11. А в пространстве?

Еще одно естественное направление для обобщений и аналогов задачи Сильвестра — это выход из плоскости в пространство. Непосредственное пространственное обобщение звучало бы так. Пусть дан конечный набор M точек в трехмерном пространстве. Допустим, что не все эти точки лежат в одной плоскости. Верно ли, что найдется плоскость, содержащая три неколлинеарные точки множества M, и больше никакие? К сожалению, ответ отрицательный. Простейший контрпример состоит из шести точек, лежащих на двух скрещивающихся прямых — три точки на одной прямой, и три на другой.

Упражнение. Возможно ещё такое пространственное обобщение проблемы Сильвестра (казалось бы, еще более непосредственное). Пусть дано конечное множество точек в пространстве, не все на одной плоскости. Верно ли, что есть плоскость, содержащая ровно три точки нашего множества (возможно, коллинеарные)? Ответ на этот вопрос тоже отрицательный, а контрпример получается простой модификацией примера, приведенного выше.

Приведенный выше контрпример был построен Моцкиным в 1951 году [M]. Он же доказал следующее (более правильное) обобщение теоремы Сильвестра–Галлаи.

Теорема. *Если не все точки конечного множества M лежат в одной плоскости, то найдется такая плоскость (будем называть ее* плоскостью Моцкина*), пересечение которой с M состоит из нескольких (по меньшей мере, двух) коллинеарных точек и еще одной точки, не коллинеарной с ними.*

12. Окружности

Теорема Моцкина может быть использована для переноса теоремы Сильвестра–Галлаи на случай окружностей. Рассмотрим конечное множество точек на сфере. Всякая плоскость, проходящая через 3 различные точки сферы, высекает на сфере некоторую окружность. Допустим, что не все точки множества M лежат на одной окружности (или, что эквивалентно, не все лежат в одной плоскости). Тогда найдется плоскость Моцкина, пересечение которой с M состоит из ряда коллинеарных точек и еще одной единственной точки, не коллинеарной этому ряду. Заметим, однако, что ряд коллинеарных точек на сфере не может содержать больше двух точек. Следовательно, плоскость Моцкина содержит ровно три точки множества M, и эти точки с необходимостью не коллинеарны. В частности, эти три точки лежат на окружности, которая не содержит других точек множества M. Таким образом, мы получаем следующее утверждение:

Теорема. *Для конечного множества точек M на сфере, не все из которых лежат на одной окружности, найдется такая окружность (аналог прямой Сильвестра), которая содержит ровно три точки множества M.*

Рассмотрим стереографическую проекцию сферы на плоскость. Напомним, что стереографическая проекция определяется таким образом. Центр проекции — точка A на сфере. Проекция точки B на сфере (отличной от точки A) — эта такая точка C на выбранной нами плоскости, что A, B и C коллинеарны (см. рисунок 8). Известный факт состоит в том, что стереографическая проекция окружности на сфере — это окружность или прямая на плоскости (прямая получается в том случае, когда исходная окружность проходит через точку A). Наоборот, кривая, проецирующаяся в окружность или прямую на плоскости, обязательно является окружностью на сфере. Если этот факт неизвестен читателю, то было бы очень полезно его доказать самостоятельно.

При помощи стереографической проекции, мы получаем следующую теорему:

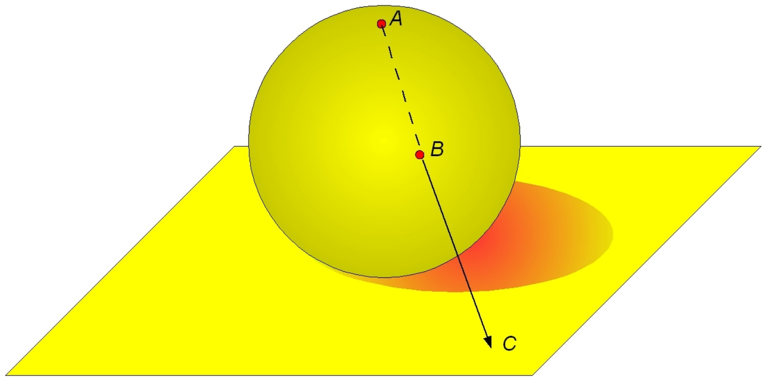

Рис. 8

Теорема. *Пусть дано конечное множество точек на плоскости. Допустим, что не все точки этого множества лежат на одной прямой, и не все точки лежат на одной окружности. Тогда найдется прямая или окружность, содержащая ровно три точки нашего множества.*

На самом деле, можно доказать более сильное утверждение, и при этом даже не нужно использовать теорему Моцкина.

Теорема. *Пусть дано конечное множество M точек на плоскости. Допустим, что не все точки множества M лежат на одной прямой, и не все лежат на одной окружности. Тогда, для всякой точки A из M, найдется прямая или окружность, содержащая A и ещё ровно две точки множества M.*

Доказательство. Ясно, что достаточно доказать следующее утверждение для сферы (оно получается из только что сформулированной теоремы стереографической проекцией). Пусть дано конечное множество точек M' на сфере, не лежащее на одной окружности. Тогда, для всякой точки A' из множества M' найдется окружность на сфере, содержащая точку A' и еще ровно две точки множества M'. Чтобы доказать это утверждение, сделаем еще одну стереографическую проекцию, на этот раз с центром в точке A'. При этой проекции, самой точке A' не соответствует никакая точка плоскости (неформально говоря, ей соответствует бесконечно удаленная точка). Все окружности, содержащие точку A', переходят в прямые. В результате нашей новой стереографической проекции, мы получаем новое множество M'' точек на плоскости, не лежащее на одной прямой (поскольку множество M' не лежало на одной окружности). Но тогда для него существует прямая Сильвестра! Спроецируем эту прямую обратно на сферу, и получим окружность, содержащую, помимо точки A', ещё ровно две точки множества M'. Теорема доказана.

Дополнение: коники[2]

Естественно попытаться обобщить задачу Сильвестра на алгебраические кривые данной степени: ведь прямые и окружности – это естественные примеры кривых первой и второй степени. Для степени 2 речь идет о *кониках* — плоских кривых, заданных квадратичными уравнениями на координаты. Квадратичное уравнение — это уравнение (скажем, относительно координат x и y), содержащее члены 1, x, y, x^2, y^2, xy с некоторыми коэффициентами. Таким образом, общая коника на плоскости задается таким уравнением:

$$a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2 = 0.$$

Здесь $a_0, \ldots, a_5$ — некоторые постоянные коэффициенты (действительные числа). Мы предполагаем, что коэффициенты a_3, a_4, a_5 не равны одновременно нулю; иначе получится не коника, а прямая. Даже если квадратичные члены присутствуют, коника может оказаться вырожденной, то есть объединением двух прямых (возможно, совпадающих) или точкой. Бывают также квадратичные уравнения, которым не удовлетворяет ни одна точка плоскости (например, $x^2 + y^2 + 1 = 0$), но мы такие уравнения рассматривать не будем.

Заметим, что если уравнение коники умножить на число, отличное от нуля, то сама коника от этого не изменится. Всего в уравнении фигурирует 6 коэффициентов, но, как мы только что видели, существенными параметрами могут быть только отношения коэффициентов, но не сами коэффициенты. Нетрудно показать, что коника в самом деле существенным образом зависит от 5 параметров. Например, через любые 5 точек проходит коника и, как правило, только одна.

Упражнение. Докажите, что через любые 5 точек на плоскости проходит некоторая коника.

[2] Это дополнение требует несколько большего запаса математических навыков, чем остальные разделы. В любом случае, читателю может быть интересна формулировка основной теоремы. Ее доказательство приведено мелким шрифтом для тех, кому остальные разделы показались простыми.

Упражнение. Пусть точки A и B лежат на конике K. Тогда пересечение коники K с прямой AB состоит либо из двух точек A и B, либо из всей прямой AB.

Вайзман и Вильсон [WW] доказали в 1988 году такую теорему:

Теорема. *Рассмотрим конечное множество точек M на плоскости. Допустим, что не все точки множества M принадлежат одной конике. Тогда найдется коника, содержащая ровно 5 точек множества M, и определяющаяся этими точками (т.е. нет никакой другой коники, проходящей через те же 5 точек).*

Мы представим в виде ряда упражнений новое доказательство теоремы Вайзмана–Вильсона. Оно более элементарно, чем оригинальное доказательство. Большинство упражнений являются скорее тестами на понимание, чем содержательными задачами — читателю просто рекомендуется прочесть внимательно условия всех упражнений, и понять, почему они очевидны. Отдельные упражнения покрывают отдельные шаги в доказательстве.

Упражнение. Рассмотрим три точки A, B и C на плоскости, не лежащие на одной прямой. Другими словами, мы имеем дело с вершинами треугольника ABC. Поместим массы 1, u, v в точки A, B, C, соответственно. Обозначим через $X(u, v)$ центр масс трёх рассматриваемых точек. Пару чисел (u, v) можно считать координатами точки $X(u, v)$. Таким образом, мы ввели другую систему координат на плоскости. (Заметим, что центр масс можно определить даже в том случае, когда u и/или v равны нулю или даже меньше нуля; проблема возникает только в том случае, когда сумма всех трёх масс равна нулю, то есть $1 + u + v = 0$). Докажите, что в новой системе координат любая коника тоже представляется квадратичным уравнением.

Упражнение. Рассмотрим конику, проходящую через все три вершины треугольника ABC. В этом случае уравнение коники имеет специальный вид. А именно, некоторые коэффициенты обращаются в нуль. Запишем сначала уравнение коники в общем виде:

$$b_0 + b_1u + b_2v + b_3u^2 + b_4uv + b_5v^2 = 0.$$

Теперь попробуем понять, какое ограничение на коэффициенты накладывает тот факт, что наша коника проходит через точку A. Точка A имеет координаты $(0, 0)$ (то есть $u = v = 0$). Значит, при $u = v = 0$, уравнение должно быть верным. Это произойдет только в том случае, когда $b_0 = 0$. Точки B и C накладывают следующие соотношения на коэффициенты: $b_3 = b_5 = 0$. Докажите это (рассуждение сложнее, чем для точки A, поскольку точки B и C не соответствуют никаким конечным значениям координат (u, v) — для рассмотрения этих точек придется поместить в точку A нулевую массу). Уравнение коники, описанной вокруг треугольника ABC, тем самым сведётся к такому:

$$au + bv + cuv = 0$$

(мы здесь переобозначили коэффициенты).

Упражнение. Рассмотрим теперь все коники, описанные вокруг треугольника ABC, и докажем аналог теоремы Сильвестра–Галлаи для таких коник. Заметим (проверьте это утверждение!), что через любые две точки, не лежащие на прямых AB, BC и AC, можно провести конику, описанную вокруг треугольника ABC, и притом только одну. (На самом деле, как мы уже упоминали, конику можно провести всегда; однако, если обе точки лежат на прямой, содержащей сторону треугольника ABC, то единственность нарушается). Рассмотрим теперь некоторое конечное множество точек на плоскости, не принадлежащих прямым AB, BC и AC, и удовлетворяющих следующему условию: на конике, описанной вокруг треугольника ABC и содержащей две точки нашего множества, лежит ещё по крайней мере одна точка нашего множества. В этом случае, все точки нашего множества лежат на одной и той же конике, описанной вокруг треугольника ABC.

Указание: Рассмотрите систему координат (u, v), связанную с треугольником ABC и описанную выше. Уравнение любой коники, описанной вокруг треугольника ABC, имеет вид $au + bv + cuv = 0$. Поделим это уравнение на uv, мы получим $av^{-1} + bu^{-1} + c = 0$. Значит, если вместо координат u и v, ввести координаты $1/v$ и $1/u$, то в новых координатах уравнения коник, описанных вокруг треугольника ABC, будут линейными. Это значит, что на плоскости с координатами $1/v$ и $1/u$, такие коники изобразятся прямыми. Примените к этим прямым классическую теорему Сильвестра–Галлаи.

Скажем, что пятёрка точек на плоскости *определяет конику*, если есть только одна коника, содержащая эти пять точек.

Упражнение. Пусть дано конечное множество M точек на плоскости. Допустим, что для каждых пяти точек множества M, определяющих конику, найдется некоторая шестая точка множества M на той же конике. Мы хотим доказать теорему Вайзмана–Вильсона, которая говорит, что в этом случае все точки множества M лежат на одной и той же конике. Докажите пока следующее утверждение: для любой тройки точек A, B и C множества M, не лежащих на одной прямой, всё множество M содержится в объединении прямых AB, BC, AC, и некоторой коники, описанной вокруг треугольника ABC.

Рассмотрим конечное множество M точек на плоскости, такое, как в предыдущем упражнении. Если все точки множества M лежат на одной и той же прямой, то теорема Вайзмана–Вильсона доказана (прямая всегда является частью вырожденной коники). Допустим, что это не так. Тогда найдется три точки A, B и C множества M, не лежащих на одной прямой. Согласно приведенному выше упражнению, все точки множества M содержатся в объединении прямых AB, BC, AC и некоторой коники K, описанной вокруг треугольника ABC.

Упражнение. Предположим сначала, что найдется точка D из множества M, не лежащая в объединении прямых AB, BC, AC. Точка D, следовательно, обязана принадлежать конике K. Если все точки множества M принадлежат конике K, то теорема доказана. Допустим, что некоторые точки принадлежат объединению трёх прямых AB, BC и AC, но не конике K. Например, пусть множество M содержит точку C_1, лежащую на прямой AB, но отличную от точек A и B. Докажите, что пять точек A, B, C, C_1, D определяют конику. Эта коника вырожденная; она совпадает с объединением прямых AB и CD.

Упражнение. Если в объединении прямых AB и CD нет других точек множества M, кроме точек A, B, C, C_1, D, то теорема доказана. Допустим, что есть какая-то шестая точка C_2. Эта точка обязана принадлежать прямой AB.

Упражнение. Либо C_1, либо C_2 не принадлежит прямой CD. Допустим, что это C_1. Мы знаем, что все точки множества M лежат в объединении прямых, содержащих стороны треугольника ADC, и некоторой коники K_1, описанной вокруг треугольника ADC. В частности, точки B и C_1 должны принадлежать конике K_1. Отсюда следует, что коника K_1 сводится к объединению прямых AB и CD. Таким образом, все точки множества M принадлежат объединению прямых AB, CD и AC (прямые AD и DC не могут иметь общих точек с коникой K, отличных от вершин треугольника ADC). Другими словами, все точки множества лежат в объединении прямых, содержащих стороны некоторого невырожденного треугольника.

Упражнение. Теперь достаточно рассмотреть случай, когда все точки множества M принадлежат объединению прямых AB, BC и AC. Поскольку M не может содержаться в объединении двух прямых, найдутся точки A_1, B_1, C_1 на прямых BC, AC, AB, соответственно, не совпадающие с вершинами треугольника ABC. Предположим, что точки A_1, B_1, C_1 не лежат на одной прямой. Тогда, согласно доказанному выше, все точки множества M лежат в объединении прямых A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1 и некоторой коники, описанной вокруг треугольника $A_1B_1C_1$. Покажите, однако, что никакая коника, описанная вокруг треугольника $A_1B_1C_1$, не может содержать точки A, B и C одновременно. Противоречие.

Упражнение. Таким образом, точки A_1, B_1 и C_1 коллинеарны. Более того, множество M состоит только из шести точек A, B, C, A_1, B_1 и C_1. (В самом деле, если бы была ещё одна точка во множестве M, то можно было бы заменить A_1, B_1 или C_1 на эту точку, и получить невырожденный треугольник.) Но в этом случае пять точек A, B, A_1, B_1, C_1 определяют вырожденную конику, которая не содержит никаких других точек множества M.

Мы, таким образом, завершили доказательство теоремы Вайзмана–Вильсона.

Список литературы

[B] P. Borwein, « On Sylvester's problem and Haar spaces », Pacific J. of Math. Vol **109** (1983), No. 2

[BZ] L. Bouttier, M. Zaidenberg, « Le problème de Sylvester », Quadrature, Janvier–Mars 2008

[C48] H.S.M. Coxeter, « A problem of collinear points », Amer. Math. Monthly **55** (1948) 26–28.

[C59] Г.С.М. Кокстер, « Действительная проективная плоскость », М.: Физматгиз, 1959

[C66] Г.С.М. Кокстер, « Введение в геометрию », М.: Наука, 1966

[Ch] G.D. Chakerian, « Sylvester's problem on collinear points and a relative », Amer. Math. Monthly **77** (1970) 164–167.

[E] P. Erdös, « Problem 4065 », Amer. Math. Monthly **50** (1943) 65.

[KM] L. Kelly, W. Moser, « On the number of ordinary lines determined by n points », Canad. J. Math. **1**: 210–219 (1958)

[Me] E. Melchior, « Über Vielseite der projektiven Ebene », Deutsche Math. **5** (1941), 461—475

[M] T. Motzkin, « The lines and planes connecting the points of a finite set », Trans. Amer. Math. Soc. **70** (1951) 451-464.

[P] K. Parshall, « James Joseph Sylvester: Jewish mathematician in a Victorian world ». John Hopkins University Press, Baltimore, 2006

[S] J.J. Sylvester, « Mathematical Question 11851 », Educational Times **59** (1893) 98.

[Ш] Д.О. Шклярский, Н.Н. Ченцов, И.М. Яглом, « Геометрические оценцки и задачи из комбинаторной геометрии ». Биб-ка матем. кружка, вып. 17, М.: Наука, 1974

[U] P. Ungar, « $2N$ Noncollinear Points Determine at Least $2N$ Directions » Journal of Combinatorial Theory, Series A **33** (1982), 343–347

[WW] J.A. Wiseman, P.R. Wilson, « A Sylvester theorem for conic sections », Discrete and Comput. Geom. **3**: 295–305 (1988)