# Переклейка рациональных функций

В. Тиморин*

*Jacobs University Bremen

18 февраля, 2009
Высшая Школа Экономики

# Стандартная коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Phi"'] & X \arrow[d, "\Phi"] \\ Y \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

При хирургии, приходится резать, то есть $\Phi$ будет разрывным.

# Множества Фату и Жюлиа

- Если $f : \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^1$ — рациональная функция, то $\mathbb{C}P^1$ разбивается на два вполне инвариантных множества относительно $f$: открытое множество Фату и замкнутое множество Жюлиа.
- Динамика на множестве Фату регулярна. Типичный пример: все точки притягиваются к периодическому циклу.
- Динамика на множестве Жюлиа хаотична, интересна и, как правило, сложна. Интересна также топология множества Жюлиа.

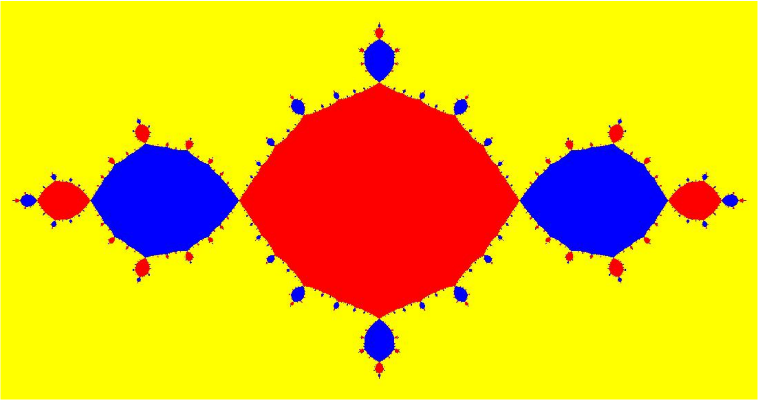
# Множества Фату и Жюлиа

- Если $f : \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^1$ — рациональная функция, то $\mathbb{C}P^1$ разбивается на два вполне инвариантных множества относительно $f$: открытое множество Фату и замкнутое множество Жюлиа.
- Динамика на множестве Фату регулярна. Типичный пример: все точки притягиваются к периодическому циклу.
- Динамика на множестве Жюлиа хаотична, интересна и, как правило, сложна. Интересна также топология множества Жюлиа.

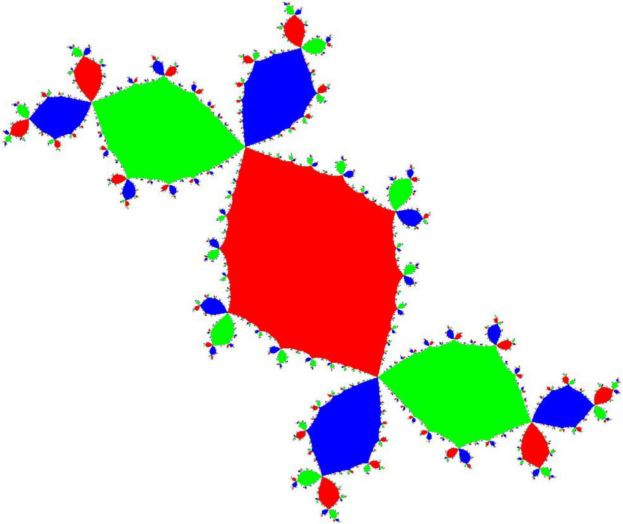
## Множества Фату и Жюлиа

- Если $f : \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^1$ — рациональная функция, то $\mathbb{C}P^1$ разбивается на два вполне инвариантных множества относительно $f$: открытое множество Фату и замкнутое множество Жюлиа.
- Динамика на множестве Фату регулярна. Типичный пример: все точки притягиваются к периодическому циклу.
- Динамика на множестве Жюлиа хаотична, интересна и, как правило, сложна. Интересна также топология множества Жюлиа.

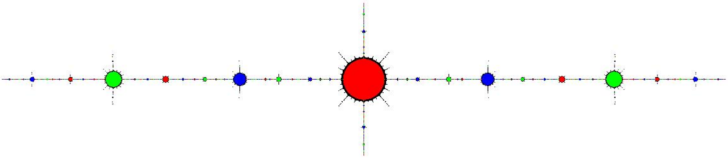
# Множество Жюлиа многочлена $z^2 - 1$



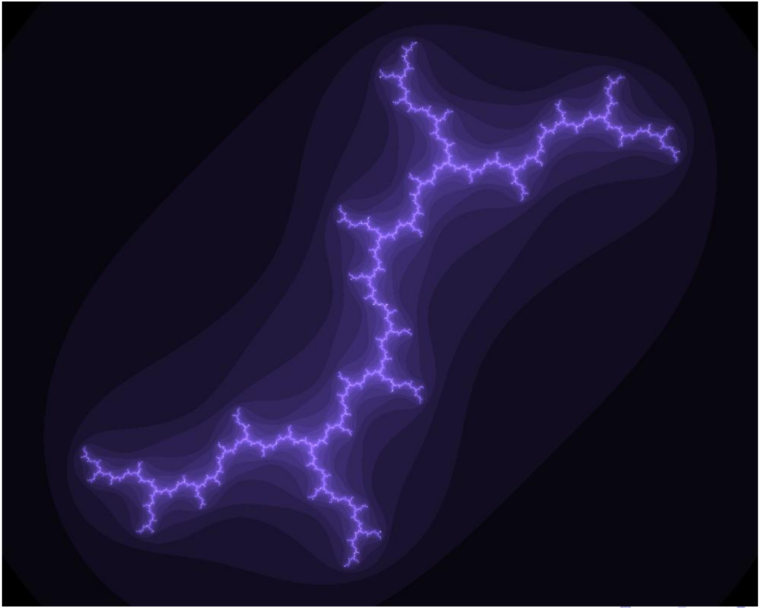
# Множество Жюлиа многочлена $z^2 - 0.12.. + 0.74..i$



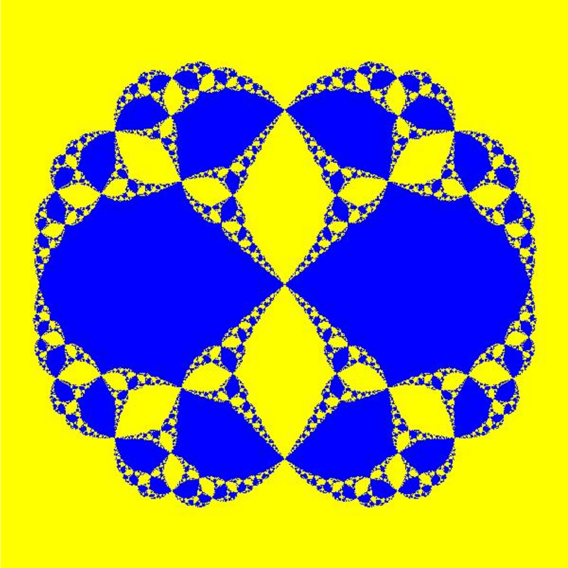
# Множество Жюлиа многочлена $z^2 - 1.32..$



# Множество Жюлиа многочлена $z^2 - i$



# Множество Жюлиа для $(z^2+2)/(z^2-1)$



# Топологические модели для рациональных функций

- Рациональная функция задана явной формулой.
- По этой формуле очень трудно понять топологическую динамику.
- Очень мало (негиперболических) рациональных функций, для которых известны явные топологические модели.
- Дуади, Хаббард, Терстон: топологические модели для многочленов $z^2 + c$ с локально связным множеством Жюлиа.
- Рис: топологические модели для гиперболических квадратичных рациональных функций.

# Топологические модели для рациональных функций

- Рациональная функция задана явной формулой.
- По этой формуле очень трудно понять топологическую динамику.
- Очень мало (негиперболических) рациональных функций, для которых известны явные топологические модели.
- Дуади, Хаббард, Терстон: топологические модели для многочленов $z^2 + c$ с локально связным множеством Жюлиа.
- Рис: топологические модели для гиперболических квадратичных рациональных функций.

# Топологические модели для рациональных функций

- Рациональная функция задана явной формулой.
- По этой формуле очень трудно понять топологическую динамику.
- Очень мало (негиперболических) рациональных функций, для которых известны явные топологические модели.
- Дуади, Хаббард, Терстон: топологические модели для многочленов $z^2 + c$ с локально связным множеством Жюлиа.
- Рис: топологические модели для гиперболических квадратичных рациональных функций.

# Топологические модели для рациональных функций

- Рациональная функция задана явной формулой.
- По этой формуле очень трудно понять топологическую динамику.
- Очень мало (негиперболических) рациональных функций, для которых известны явные топологические модели.
- Дуади, Хаббард, Терстон: топологические модели для многочленов $z^2 + c$ с локально связным множеством Жюлиа.
- Рис: топологические модели для гиперболических квадратичных рациональных функций.

# Топологические модели для рациональных функций

- Рациональная функция задана явной формулой.
- По этой формуле очень трудно понять топологическую динамику.
- Очень мало (негиперболических) рациональных функций, для которых известны явные топологические модели.
- Дуади, Хаббард, Терстон: топологические модели для многочленов $z^2 + c$ с локально связным множеством Жюлиа.
- Рис: топологические модели для гиперболических квадратичных рациональных функций.

## Чем хороши топологические модели?

- Любое свойство топологической динамики эффективно проверяется.
- Можно найти инвариантные семейства кривых, хорошие разбиения Маркова и т.д.
- Найденные структуры могут оказаться устойчивыми относительно малых изменений параметра!

# Чем хороши топологические модели?

- Любое свойство топологической динамики эффективно проверяется.
- Можно найти инвариантные семейства кривых, хорошие разбиения Маркова и т.д.
- Найденные структуры могут оказаться устойчивыми относительно малых изменений параметра!

# Чем хороши топологические модели?

- Любое свойство топологической динамики эффективно проверяется.
- Можно найти инвариантные семейства кривых, хорошие разбиения Маркова и т.д.
- Найденные структуры могут оказаться устойчивыми относительно малых изменений параметра!

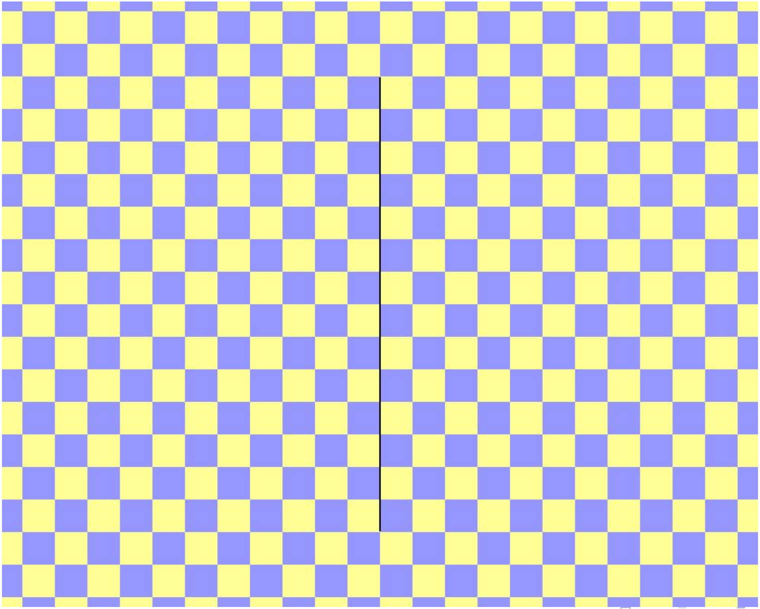
# Пример переклейки

Ветвь аналитической функции

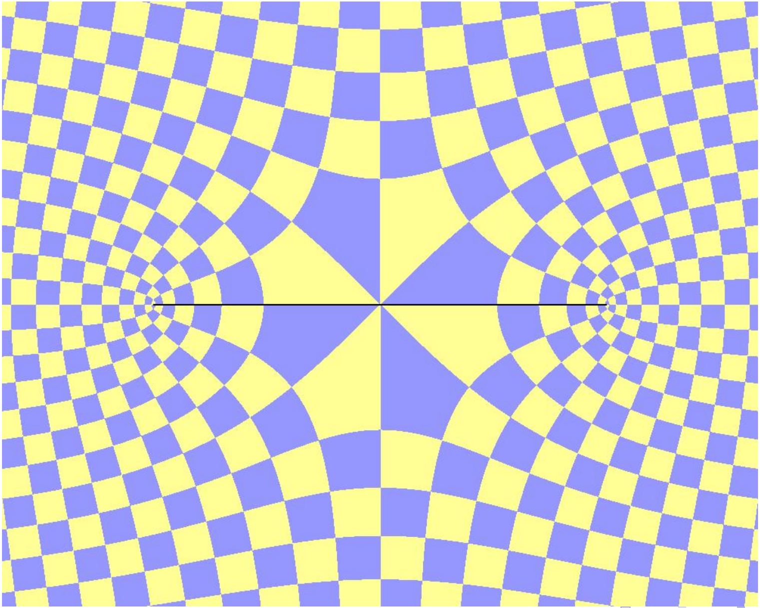
$$j(z) = \sqrt{z^2 + 1}$$

определена на дополнении к $[-i, i]$. Она переклеивает $[-i, i]$ в $[-1, 1]$.

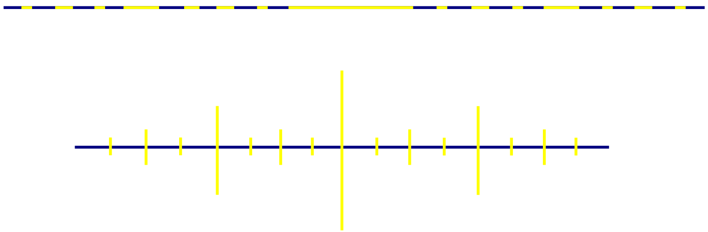
# Переклейка: до



# Переклейка: после

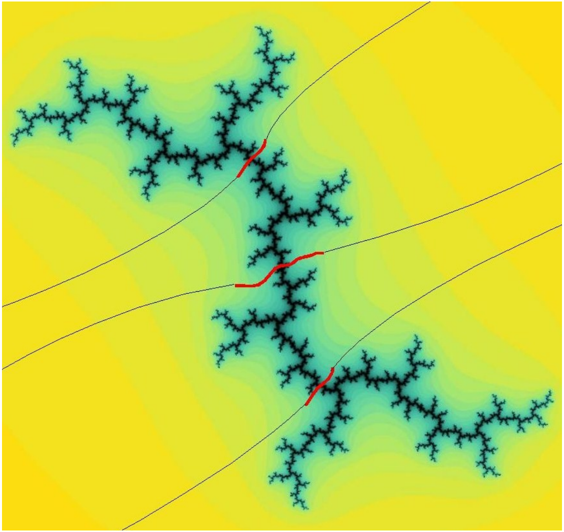


Множество Жюлиа многочлена $z \mapsto z^2 - 3$ — канторово множество в $\mathbb{R}$. Переклеим все дополнительные интервалы. Получим отображение $z \mapsto z^2 - 2$, у которого множество Жюлиа — отрезок!

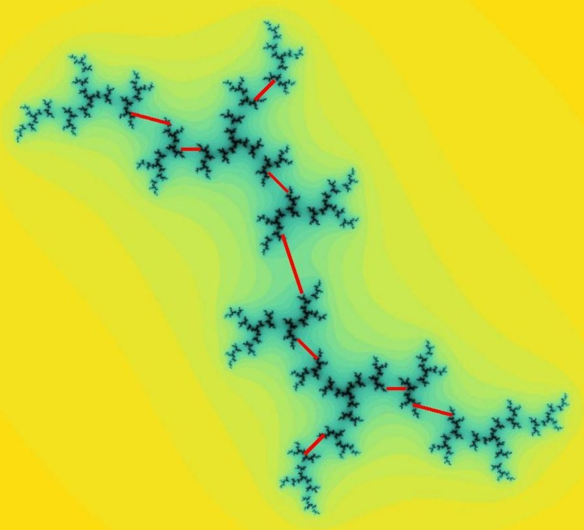


Вообще, многочлен $z^2 + c$ с локально связным множеством Жюлиа и только отталкивающими периодическими точками можно переклеить в многочлен $z^2 + c'$ с канторовым множеством Жюлиа.

# Переклейка: до



# Переклейка: после



## Переклейка:

- дает топологические модели для широкого класса негиперболических рациональных функций,
- задает частичное соответствие между классами кривых и пространством параметров рациональных функций,
- устанавливает топологическую связь между различными множествами Жюлиа.

# Переклейка:

- дает топологические модели для широкого класса негиперболических рациональных функций,
- задает частичное соответствие между классами кривых и пространством параметров рациональных функций,
- устанавливает топологическую связь между различными множествами Жюлиа.

# Переклейка:

- дает топологические модели для широкого класса негиперболических рациональных функций,
- задает частичное соответствие между классами кривых и пространством параметров рациональных функций,
- устанавливает топологическую связь между различными множествами Жюлиа.

# Существование топологической переклейки

Пусть $X$ — компактное метрическое пространство, и $\mathcal{A}$ — семейство компактных подмножеств $X$. Скажем, что $\mathcal{A}$ *сжимается*, если для любого $\varepsilon > 0$, только конечное число элементов $\mathcal{A}$ имеют диаметр $> \varepsilon$.

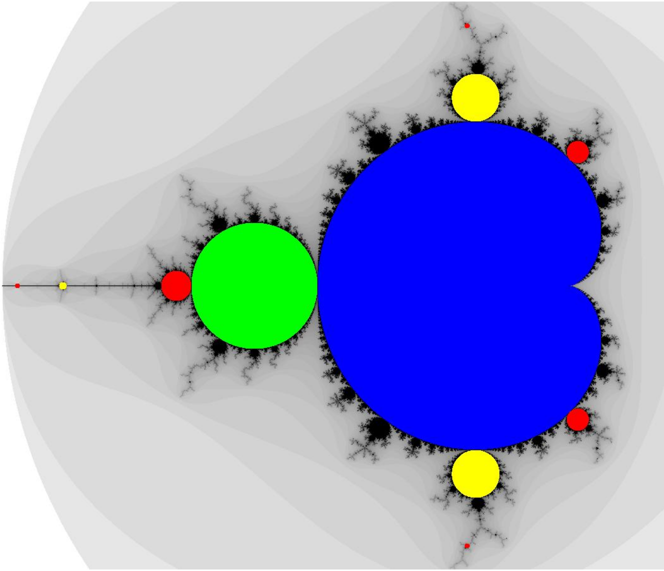
## Теорема

*Пусть $\mathcal{A}$ — сжимающееся семейство непересекающихся простых кривых в $S^2$. Существует гомеоморфизм $\Phi : S^2 - \bigcup \mathcal{A} \to S^2 - \bigcup \mathcal{B}$, переклеивающий $\mathcal{A}$ в другое семейство $\mathcal{B}$ непересекающихся простых кривых.*

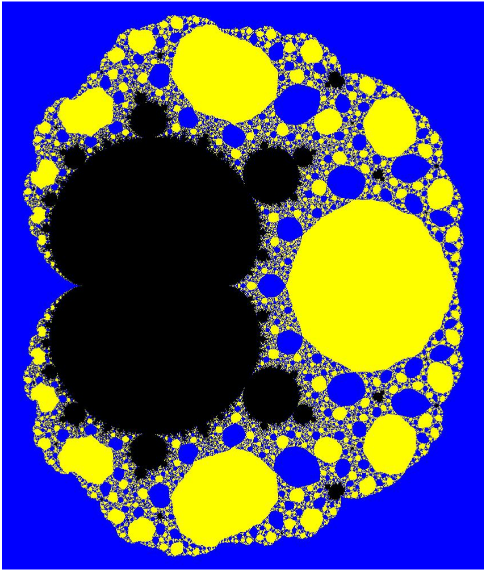
# Срезы пространства параметров

$Per_k(0) = \{$классы квадратичных рациональных функций $f$ с отмеченными критическими точками $c_1$, $c_2$, такие, что $f^{\circ k}(c_1) = c_1\}$.

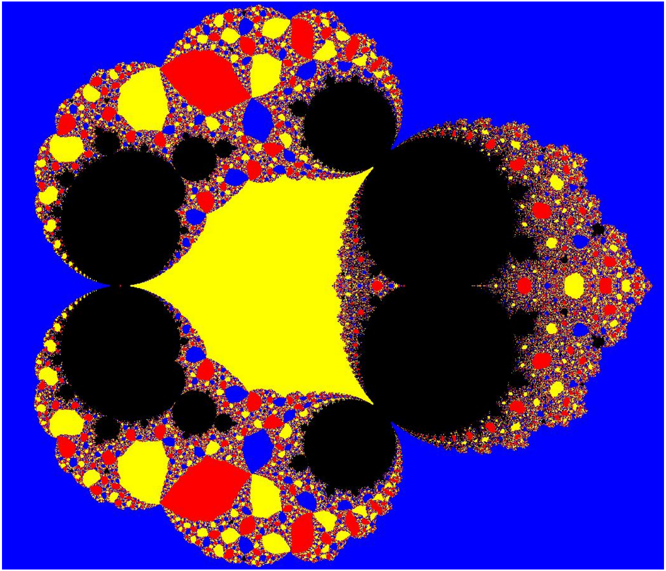
# $Per_1(0)$



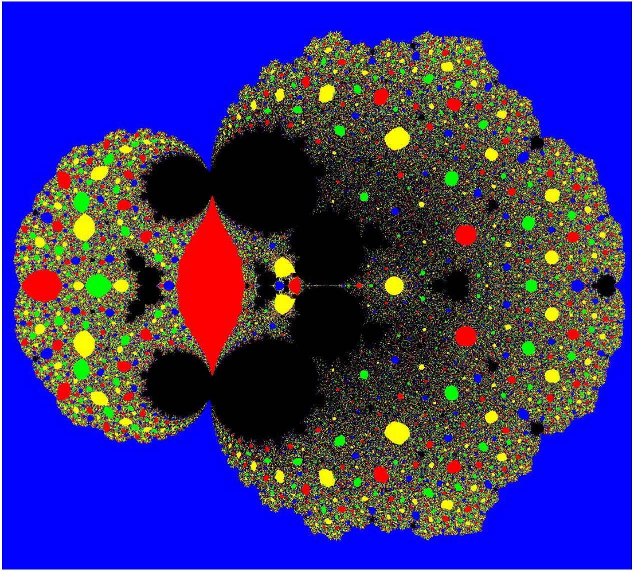
# $Per_2(0)$



# $Per_3(0)$



# $Per_4(0)$



- Пусть $k > 1$, и $f$ — квадратичная рациональная функция с $k$-периодической критической точкой $c_1$ и свободной критической точкой $c_2$.
- $f$ — *гиперболическая функция типа B*, если $c_2$ лежит в непосредственной области притяжения цикла $c_1$, $f(c_1)$, $\ldots f^{\circ k-1}(c_1)$ (но не в той же компоненте).
- $f$ — *гиперболическая функция типа C*, если $c_2$ притягивается к циклу точки $c_1$, но не лежит в его непосредственной области притяжения.
- Множество гиперболических функций разбивается *гиперболические компоненты*.
- Гиперболические компоненты типов B и C состоят из гиперболических функций соответствующих типов.

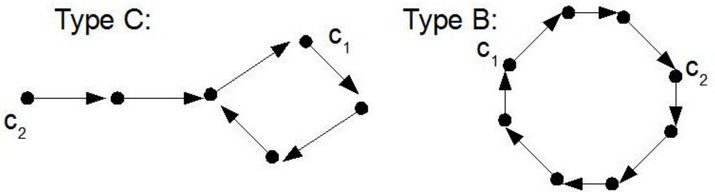
- Пусть $k > 1$, и $f$ — квадратичная рациональная функция с $k$-периодической критической точкой $c_1$ и свободной критической точкой $c_2$.
- $f$ — *гиперболическая функция типа* $B$, если $c_2$ лежит в непосредственной области притяжения цикла $c_1$, $f(c_1)$, $\ldots f^{\circ k-1}(c_1)$ (но не в той же компоненте).
- $f$ — *гиперболическая функция типа* $C$, если $c_2$ притягивается к циклу точки $c_1$, но не лежит в его непосредственной области притяжения.
- Множество гиперболических функций разбивается *гиперболические компоненты*.
- Гиперболические компоненты типов B и C состоят из гиперболических функций соответствующих типов.

- Пусть $k > 1$, и $f$ — квадратичная рациональная функция с $k$-периодической критической точкой $c_1$ и свободной критической точкой $c_2$.
- $f$ — *гиперболическая функция типа B*, если $c_2$ лежит в непосредственной области притяжения цикла $c_1$, $f(c_1)$, $\ldots f^{\circ k-1}(c_1)$ (но не в той же компоненте).
- $f$ — *гиперболическая функция типа C*, если $c_2$ притягивается к циклу точки $c_1$, но не лежит в его непосредственной области притяжения.
- Множество гиперболических функций разбивается *гиперболические компоненты*.
- Гиперболические компоненты типов B и C состоят из гиперболических функций соответствующих типов.

- Пусть $k > 1$, и $f$ — квадратичная рациональная функция с $k$-периодической критической точкой $c_1$ и свободной критической точкой $c_2$.
- $f$ — *гиперболическая функция типа B*, если $c_2$ лежит в непосредственной области притяжения цикла $c_1$, $f(c_1)$, $\dots f^{\circ k-1}(c_1)$ (но не в той же компоненте).
- $f$ — *гиперболическая функция типа C*, если $c_2$ притягивается к циклу точки $c_1$, но не лежит в его непосредственной области притяжения.
- Множество гиперболических функций разбивается *гиперболические компоненты*.
- Гиперболические компоненты типов B и C состоят из гиперболических функций соответствующих типов.

- Пусть $k > 1$, и $f$ — квадратичная рациональная функция с $k$-периодической критической точкой $c_1$ и свободной критической точкой $c_2$.
- $f$ — *гиперболическая функция типа B*, если $c_2$ лежит в непосредственной области притяжения цикла $c_1$, $f(c_1)$, $\ldots f^{\circ k-1}(c_1)$ (но не в той же компоненте).
- $f$ — *гиперболическая функция типа C*, если $c_2$ притягивается к циклу точки $c_1$, но не лежит в его непосредственной области притяжения.
- Множество гиперболических функций разбивается *гиперболические компоненты*.
- Гиперболические компоненты типов B и C состоят из гиперболических функций соответствующих типов.

# Типы гиперболических компонент



### Теорема

*Если $f$ лежит на границе гиперболической компоненты типа $C$, но не на границе гиперболической компоненты типа $B$, то $\Phi \circ f = h \circ \Phi$, где $h$ — функция из компоненты типа $C$, граница которой содержит $f$, а $\Phi$ — переклейка.*

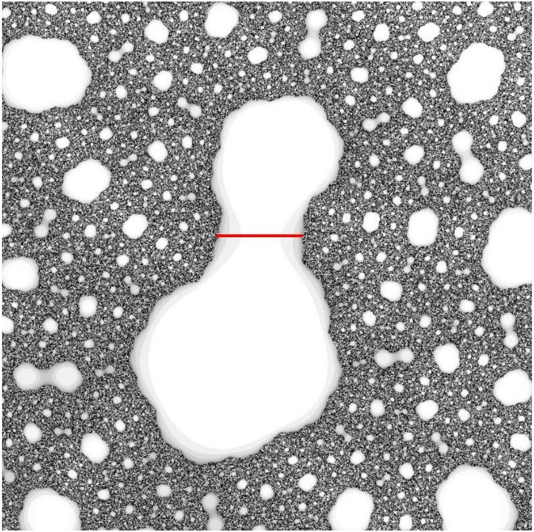
# Топологические модели для функций на границе компонент типа C

- Семейство кривых, которые нужно переклеить, определено явно.
- Топологические модели для гиперболических квадратичных рациональных функций известны (М. Рис).

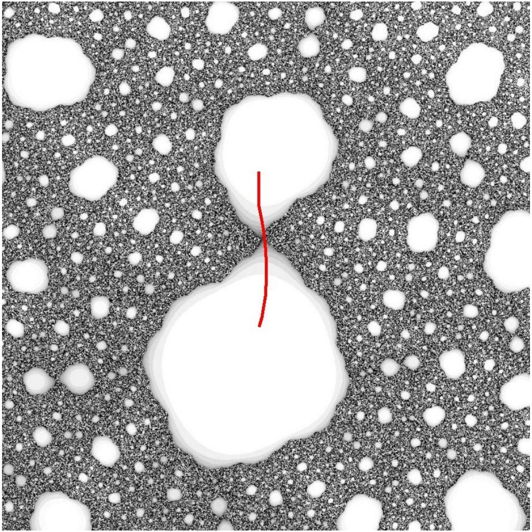
# Топологические модели для функций на границе компонент типа C

- Семейство кривых, которые нужно переклеить, определено явно.
- Топологические модели для гиперболических квадратичных рациональных функций известны (М. Рис).

# Переклейка: до



# Переклейка: после



# Обобщенная голоморфность

Пусть $Z$ — счетное объединение непересекающихся простых кривых. Предположим, что $Z$ имеет нулевую меру Лебега. Скажем, что отображение $\Phi : \mathbb{C} - Z \to \mathbb{C}$ *голоморфно по модулю* $Z$, если существует функция $\Psi : Z \to \mathbb{C}$, такая, что

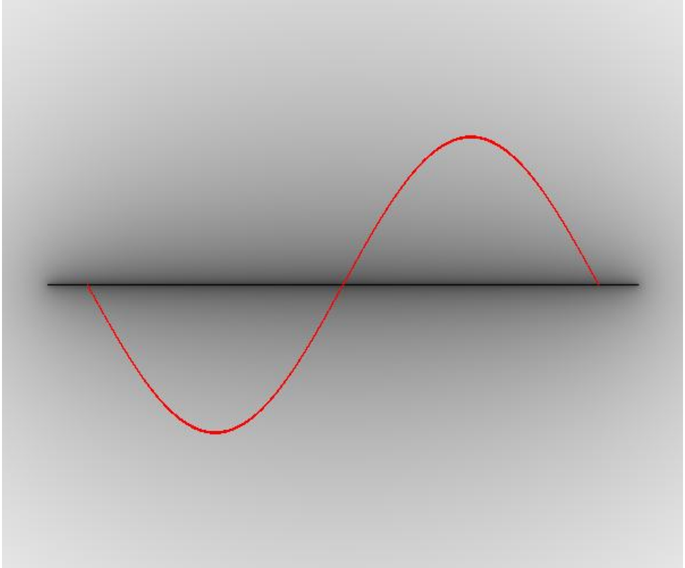
$$\int_{\mathbb{C}-Z} \Phi \, \overline{\partial} \omega = \int_Z \Psi \, \omega$$

для всякой гладкой (1,0)-формы $\omega$ на $\mathbb{C}$ с компактным носителем.

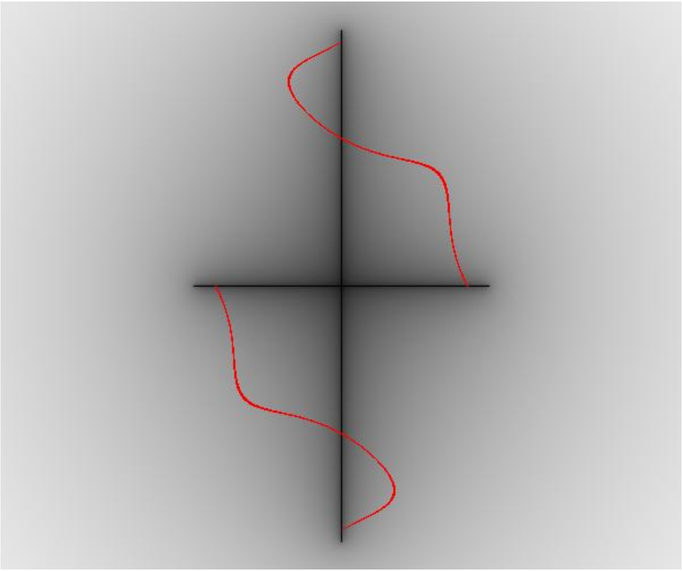
## Теорема

*Рассмотрим многочлен* $f : z \mapsto z^2 + c$ *со связным множеством Жюлиа, такой, что критическое значение c достижимо из области притяжения бесконечности. Тогда для явного объединения* $Z$ *простых кривых с нулевой мерой Лебега, и явного квадратного многочлена* $g$ *с канторовым множеством Жюлиа, имеем* $\Phi \circ f = g \circ \Phi$ *на* $\mathbb{C} - Z$*, где* $\Phi : \mathbb{C} - Z \to \mathbb{C}$ *голоморфно по модулю* $Z$*.*

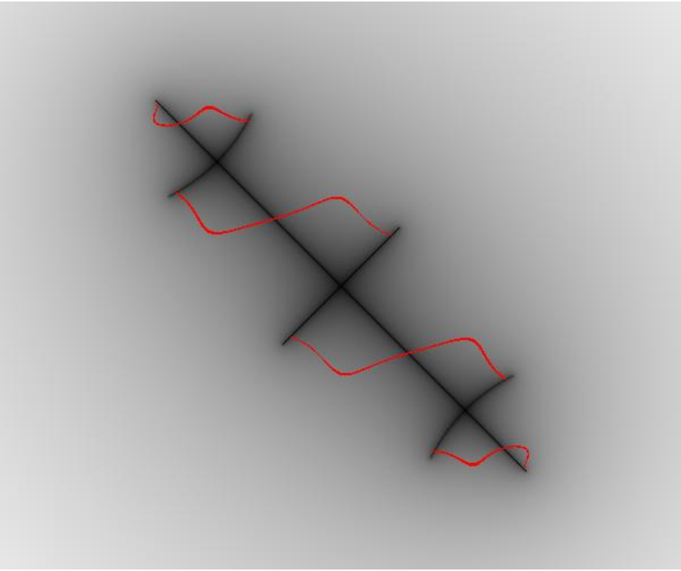
# Переклейка $z^2 - 2$ в $z^2 - 2$: шаг 0



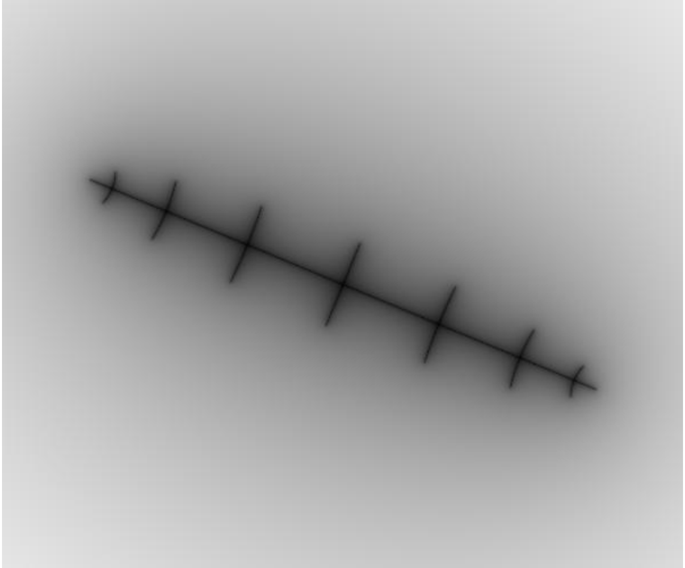
# Переклейка $z^2 - 2$ в $z^2 - 2$: шаг 1



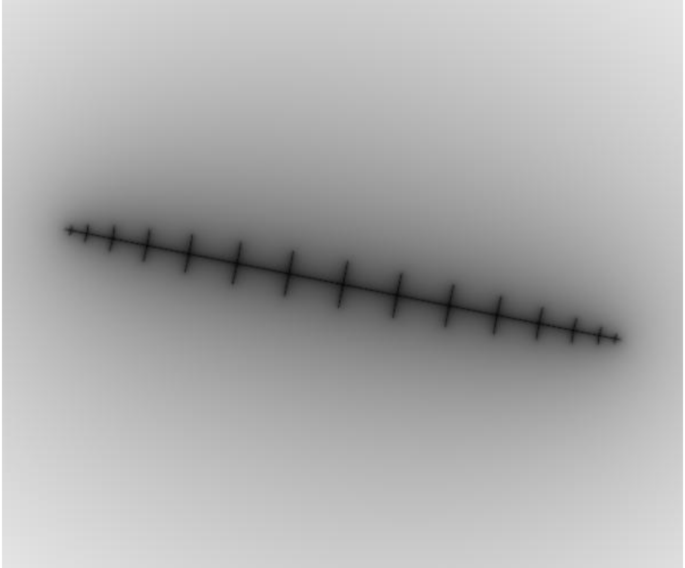
# Переклейка $z^2 - 2$ в $z^2 - 2$: шаг 2



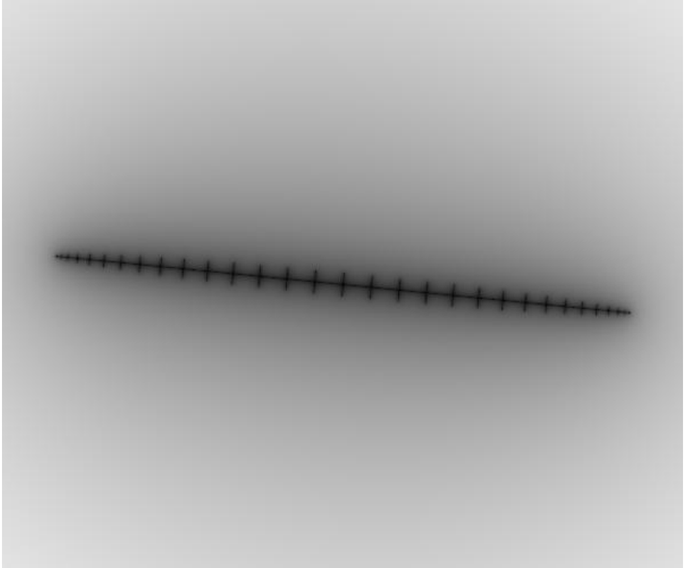
# Переклейка $z^2 - 2$ в $z^2 - 2$: шаг 3



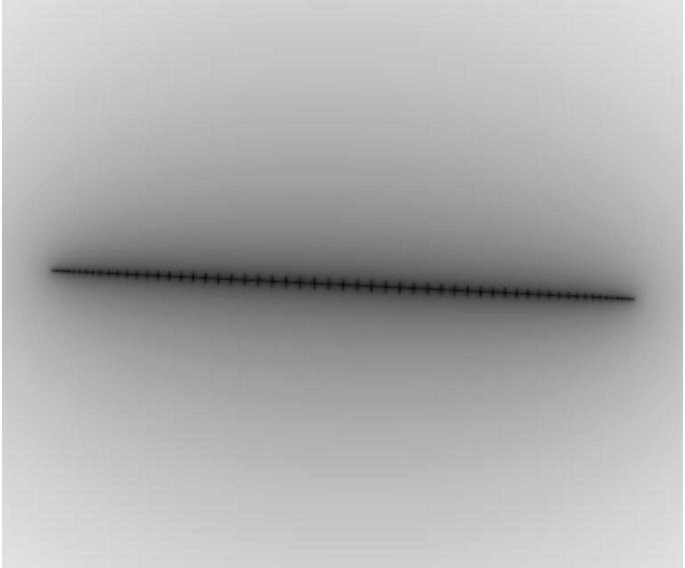
# Переклейка $z^2 - 2$ в $z^2 - 2$: шаг 4



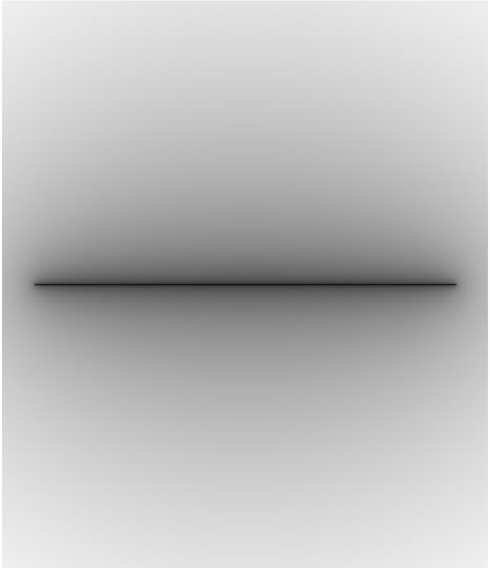
# Переклейка $z^2 - 2$ в $z^2 - 2$: шаг 5



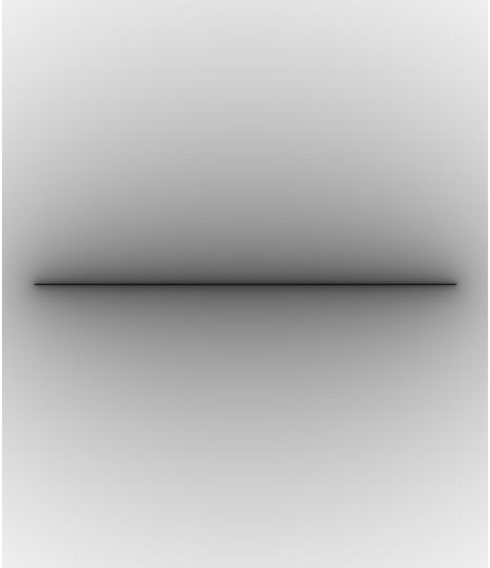
# Переклейка $z^2 - 2$ в $z^2 - 2$: шаг 6



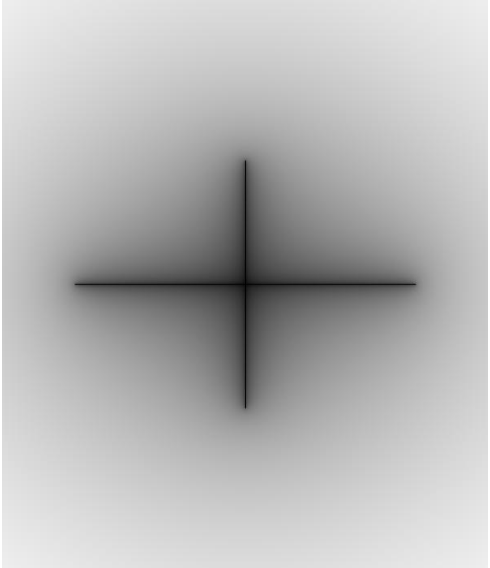
# Переклейка $z^2 - 2$ в $z^2 - 2$: предел



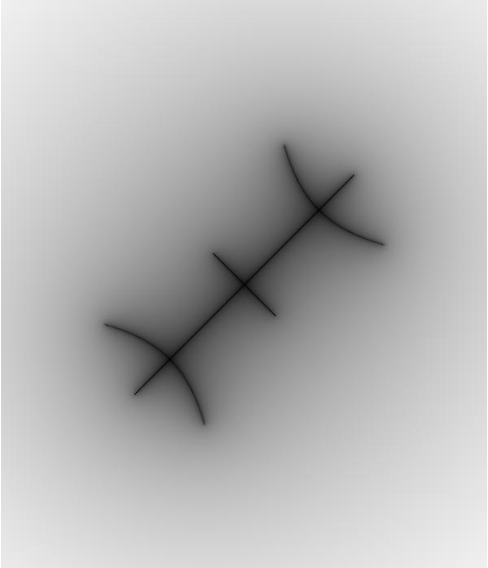
# Переклейка $z^2 - 2$ в $z^2 + i$: шаг 0



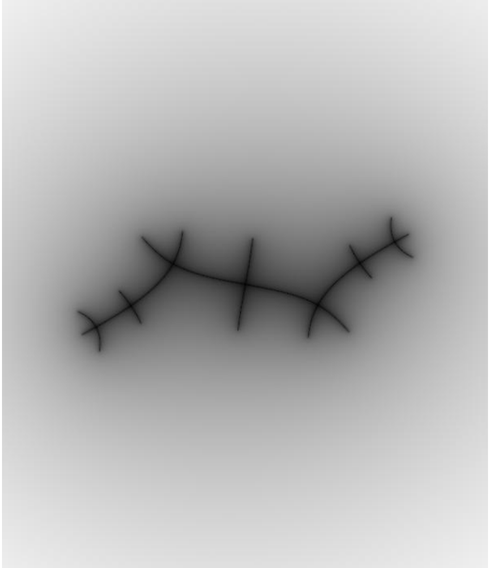
# Переклейка $z^2 - 2$ в $z^2 + i$: шаг 1



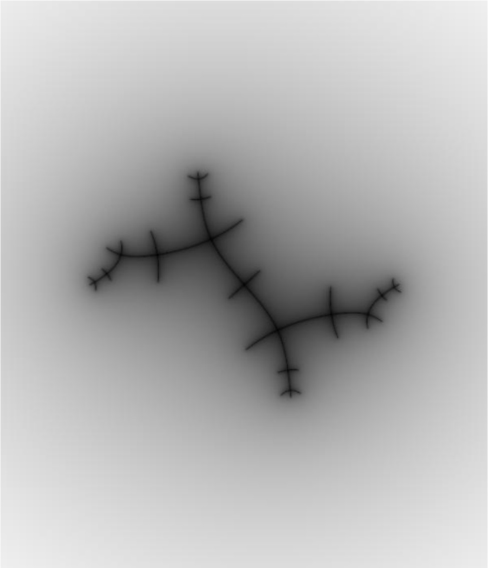
# Переклейка $z^2 - 2$ в $z^2 + i$: шаг 2



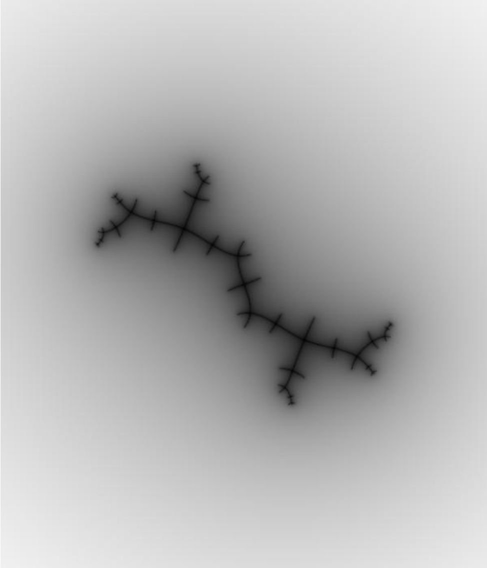
# Переклейка $z^2 - 2$ в $z^2 + i$: шаг 3



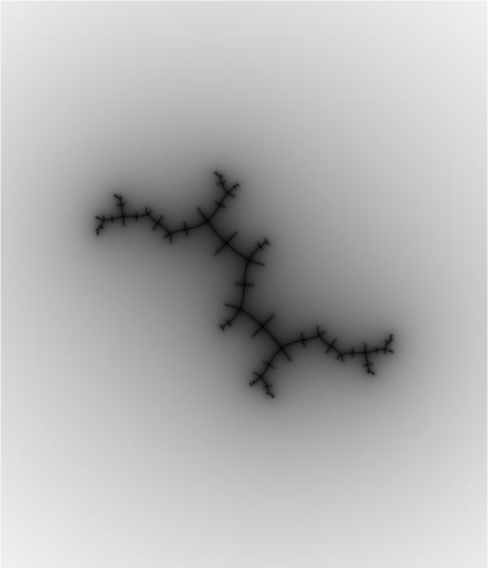
# Переклейка $z^2 - 2$ в $z^2 + i$: шаг 4



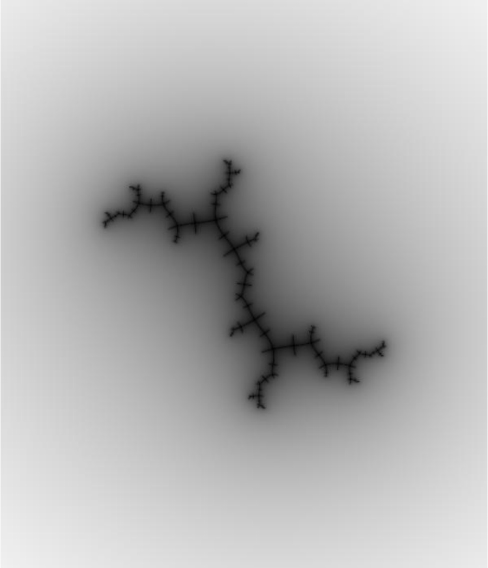
# Переклейка $z^2 - 2$ в $z^2 + i$: шаг 5



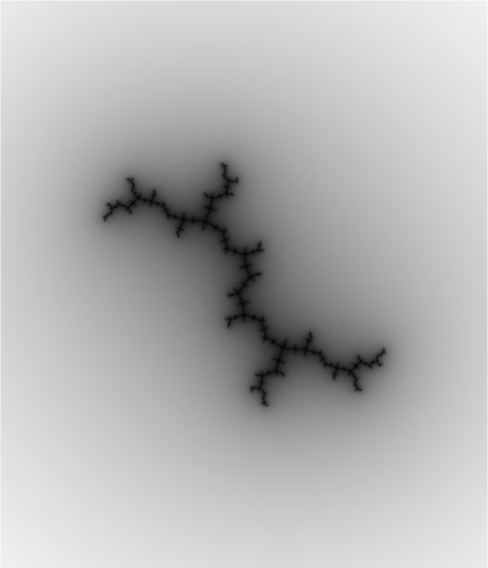
# Переклейка $z^2 - 2$ в $z^2 + i$: шаг 6



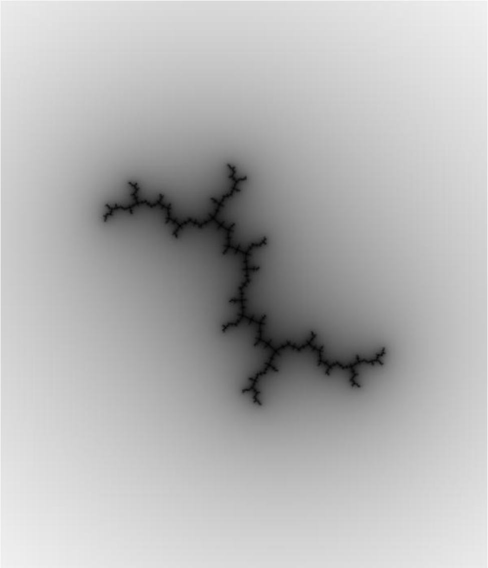
# Переклейка $z^2 - 2$ в $z^2 + i$: шаг 7



# Переклейка $z^2 - 2$ в $z^2 + i$: шаг 8

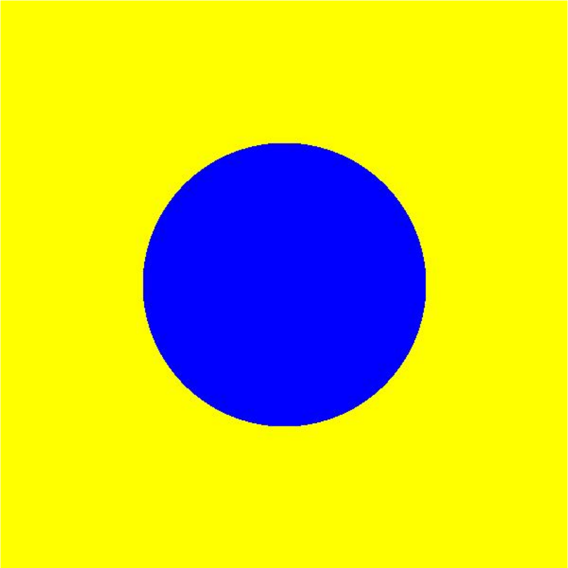


# Переклейка $z^2 - 2$ в $z^2 + i$: шаг 9

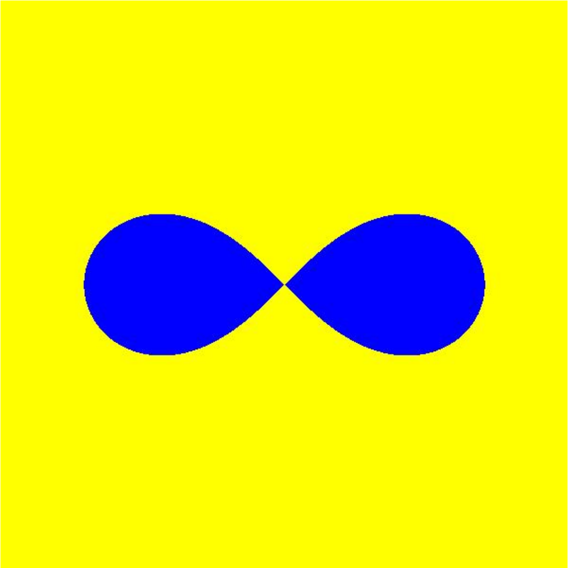


# Переклейка $z^2 - 2$ в $z^2 + i$: предел

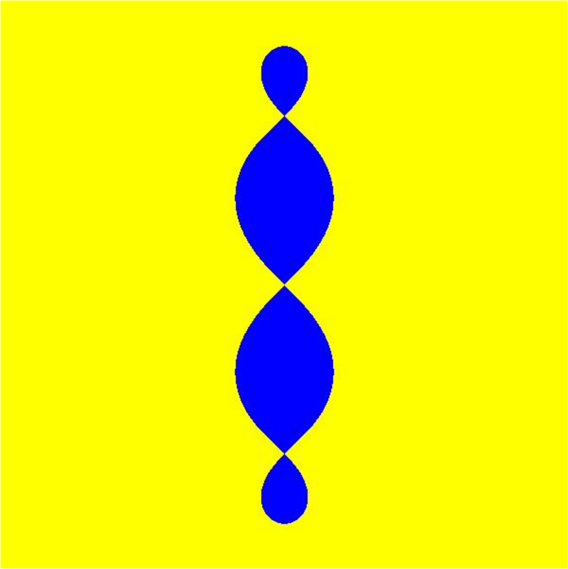
# Переклейка $z^2$ в $z^2 - 2$: шаг 0



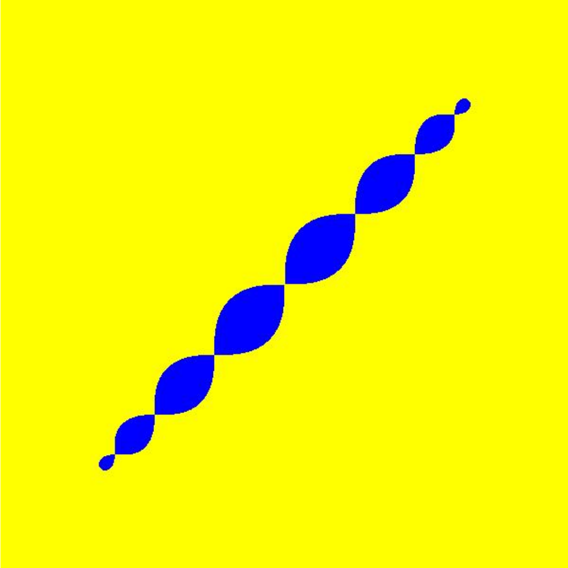
# Переклейка $z^2$ в $z^2 - 2$: шаг 1



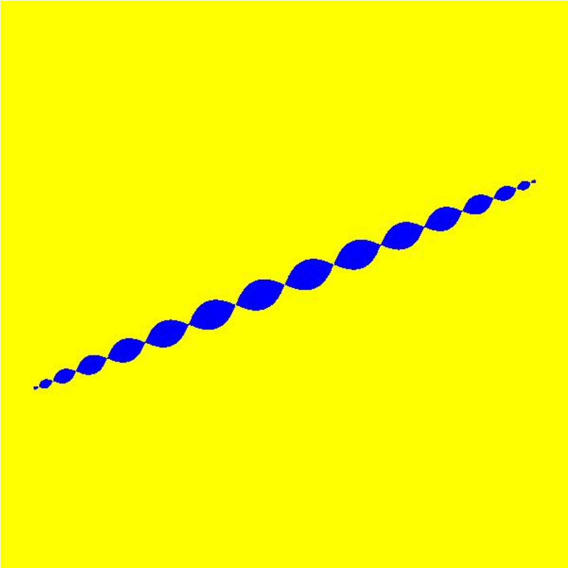
# Переклейка $z^2$ в $z^2-2$: шаг 2



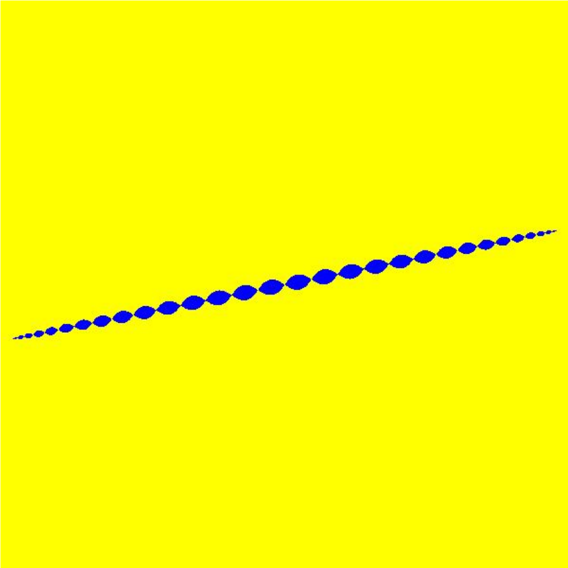
# Переклейка $z^2$ в $z^2 - 2$: шаг 3



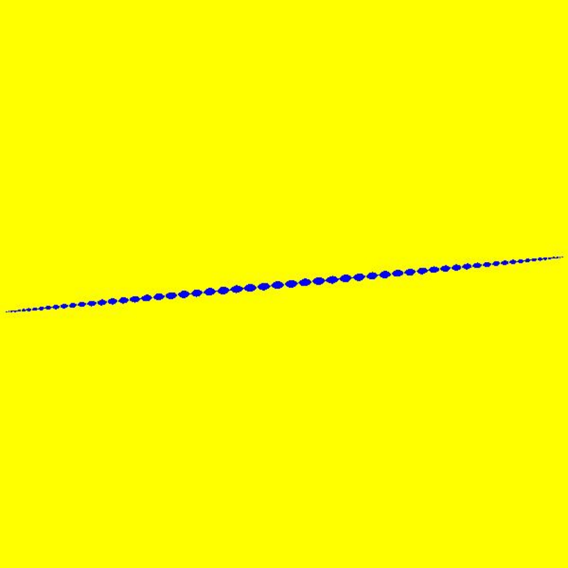
# Переклейка $z^2$ в $z^2 - 2$: шаг 4



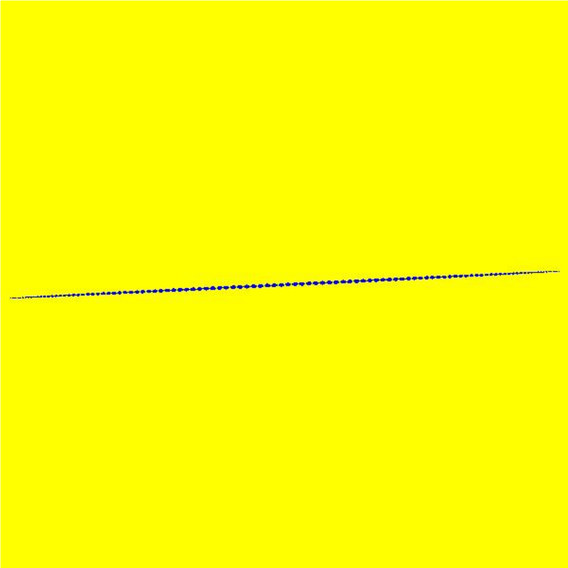
# Переклейка $z^2$ в $z^2 - 2$: шаг 5



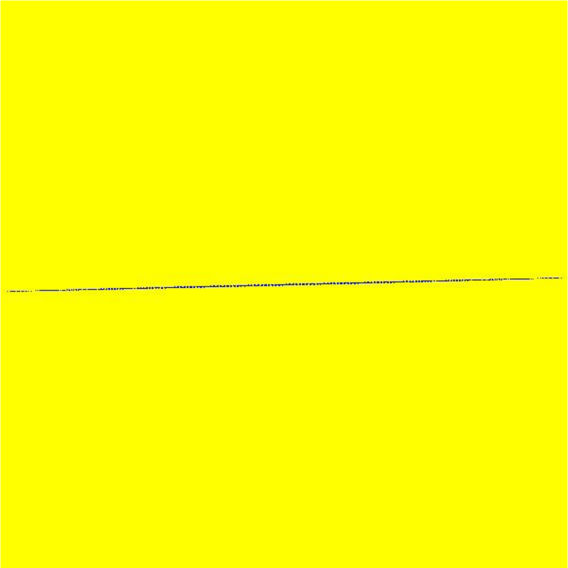
# Переклейка $z^2$ в $z^2 - 2$: шаг 6



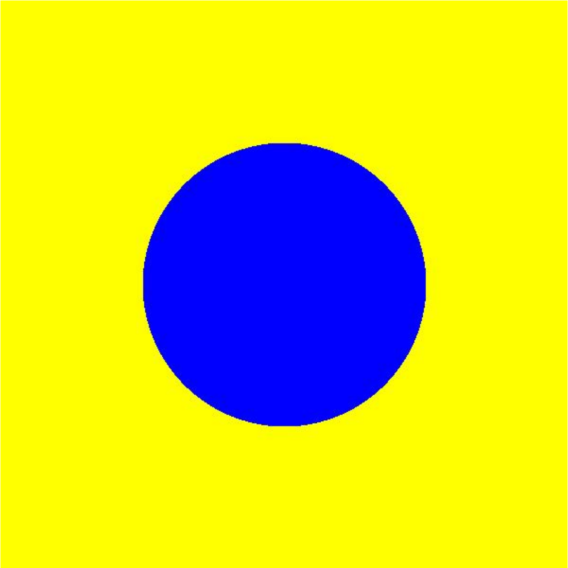
# Переклейка $z^2$ в $z^2 - 2$: шаг 7



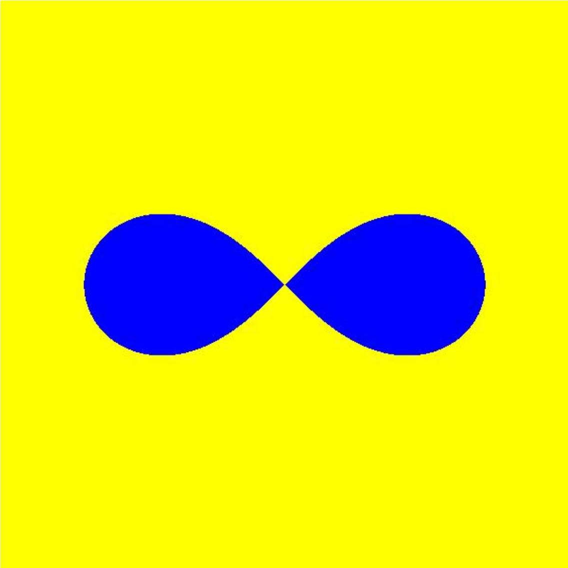
# Переклейка $z^2$ в $z^2 - 2$: шаг 8



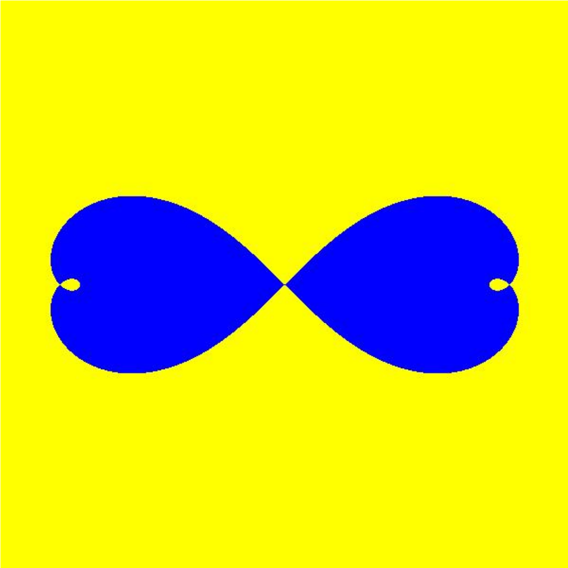
# Переклейка $1/z^2$ в $(z^2+2)/(z^2-1)$: шаг 0



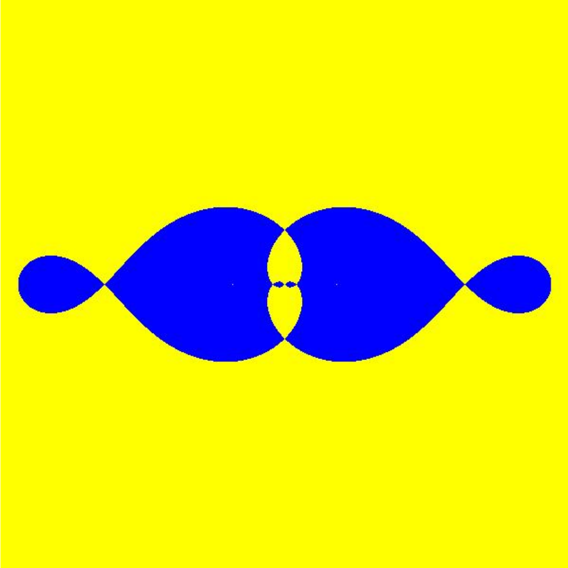
# Переклейка $1/z^2$ в $(z^2+2)/(z^2-1)$: шаг 1



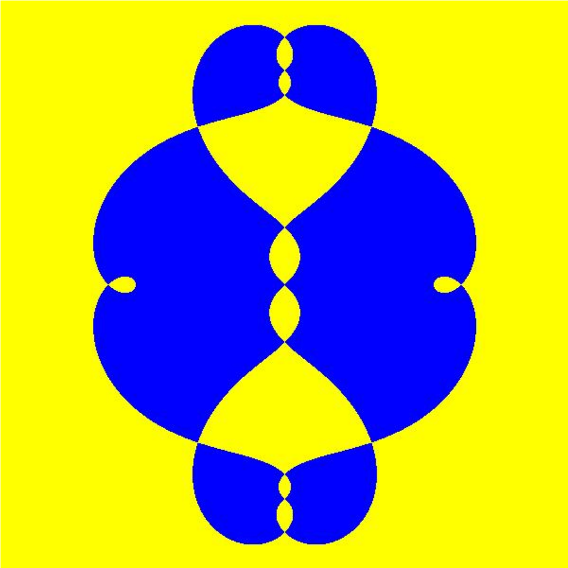
# Переклека $1/z^2$ в $(z^2+2)/(z^2-1)$: шаг 2



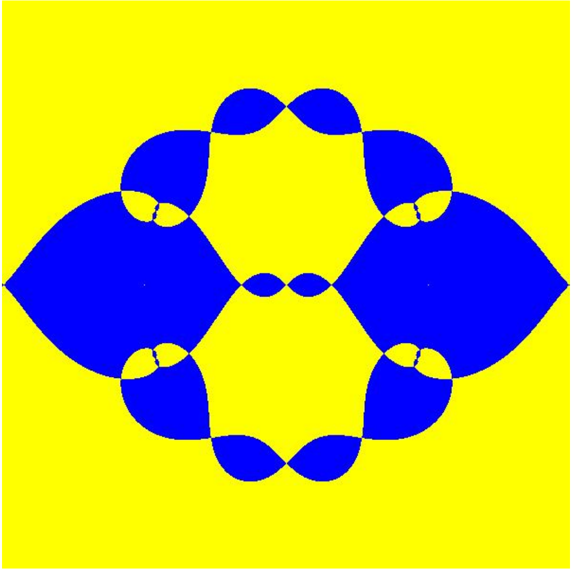
# Переклейка $1/z^2$ в $(z^2+2)/(z^2-1)$: шаг 3



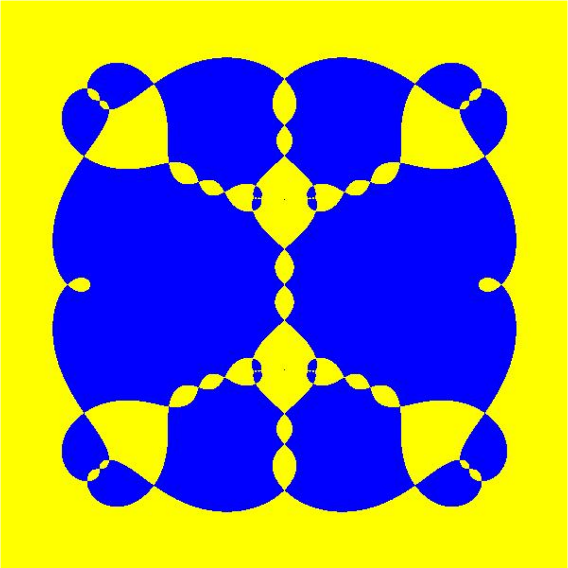
# Переклейка $1/z^2$ в $(z^2+2)/(z^2-1)$: шаг 4



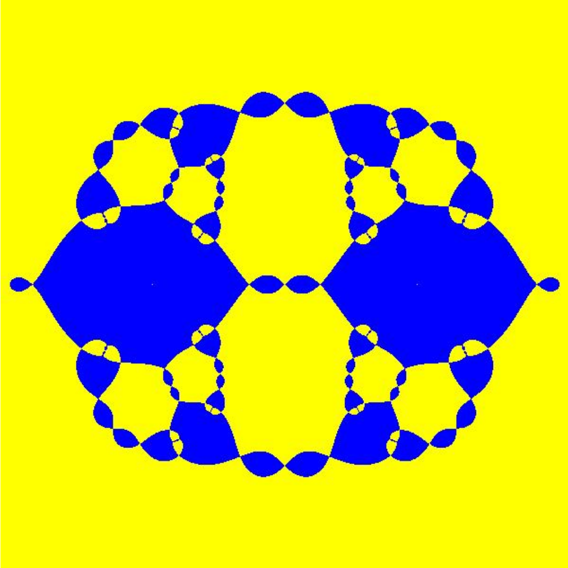
# Переклейка $1/z^2$ в $(z^2+2)/(z^2-1)$: шаг 5



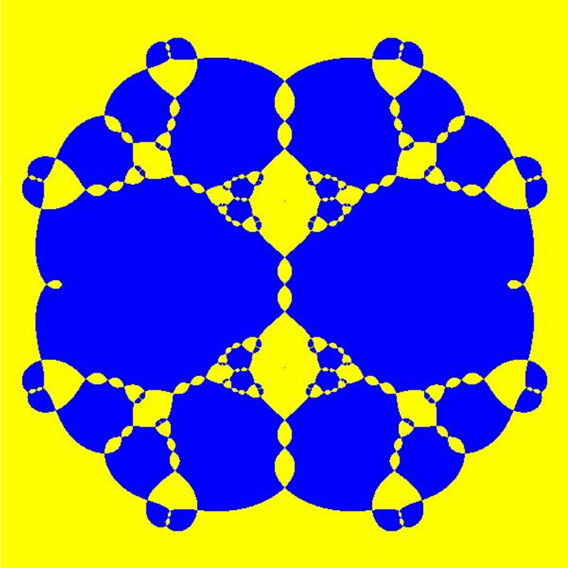
# Переклейка $1/z^2$ в $(z^2+2)/(z^2-1)$: шаг 6



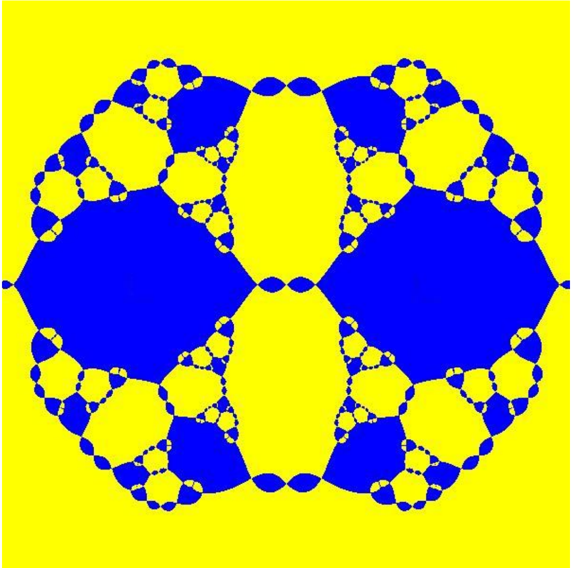
# Переклейка $1/z^2$ в $(z^2+2)/(z^2-1)$: шаг 7



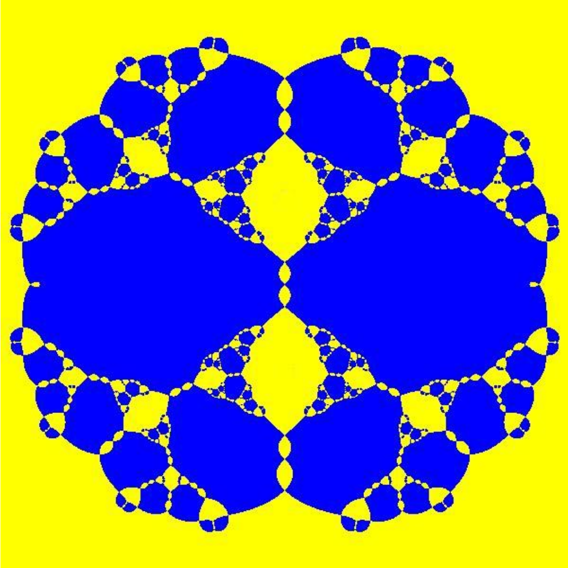
# Переклейка $1/z^2$ в $(z^2+2)/(z^2-1)$: шаг 8



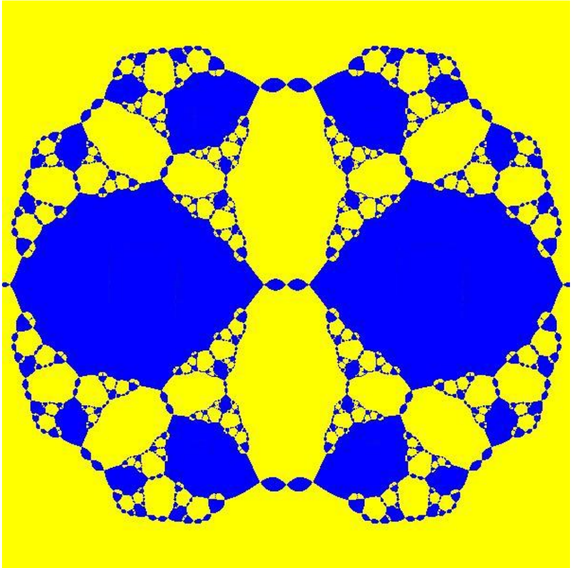
# Переклейка $1/z^2$ в $(z^2+2)/(z^2-1)$: шаг 9



# Переклейка $1/z^2$ в $(z^2+2)/(z^2-1)$: шаг 10



# Переклейка $1/z^2$ в $(z^2+2)/(z^2-1)$: шаг 11



# Переклейка $1/z^2$ в $(z^2+2)/(z^2-1)$: предел