Лекция 7.

A – факториальное кольцо

<u>Теор.</u> (цель №1): $A[x]$ тоже факториально.

Знаем: $A = \mathbb{Z}$. $\mathbb{Z}[x]$ факториально.

<u>Вопросы:</u> 1) $НОД(x,y) = ?$

2) Что такое аналог $\mathbb{Q} \supset \mathbb{Z}$?

В A любой эл-т x предст. в виде

$x = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r}$, p_i неприв.

$y = c \cdot p_1^{l_1} p_2^{l_2} \dots p_r^{l_r}$. $k_i, l_i \geq 0$.

$z = НОД(x,y) \iff x \vdots z,\ y \vdots z,$

$\forall$ общ. дел. x, y w

$z \vdots w$.

$z = p_1^{m_1} \dots p_r^{m_r}$ $x \vdots z \iff \forall i\ k_i \geq m_i$.

$y \vdots z \iff l_i \geq m_i$.

Пусть $m_i = \min(k_i, l_i)$ – тогда

z явл. $НОД(x,y)$.

Поле частных.

A – произв целостное кольцо.

Цель – придумать поле $\mathbb{K} \hookleftarrow A$.

Рассм. мн-во пар (x,y), $x \in A$, $y \in A \setminus \{0\}$.

"$(x,y) = \frac{x}{y}$".

$\frac{x}{y} = \frac{x'}{y'} \Leftrightarrow xy' = x'y$.

Рассм. $\sim$ на этих парах:

$(x,y) \sim (x',y') \Leftrightarrow xy' = x'y$. (эквив.-упр.)

Мн-во классов эквив. - Quot A. quotient

Quot A — поле частных кольца A.

$$\left.\begin{aligned} (x,y)\cdot(z,w) &= (xz, yw). \\ (x,y)+(z,w) &= (xw+yz, yw) \end{aligned}\right\} \text{операции на Quot } A.$$

$(0,y)$ - нуль в Quot A.

$A \hookrightarrow \mathrm{Quot}\, A$. $\qquad a \mapsto \frac{a}{1}$.

$a \longmapsto (a,1)$

$(x,y)^{-1} = (y,x)$

Примеры: $\mathbb{Q} = \mathrm{Quot}\, \mathbb{Z}$.

$\mathrm{Quot}\, \mathbb{K}[x] = \{f/g\}$ - поле рац. функций

Упр. Д-ть, что $\mathrm{Quot}\, \mathbb{K}[[x]] = \mathbb{K}[[x, x^{-1}]] =$

$= \{a_{-n}x^{-n} + \ldots + a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\}$

Теор. A – факториальное кольцо.
Тогда $A[x]$ тоже факториально.

Д-во. Пусть $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$

Содержание f: $\operatorname{cont} f = \text{НОД}(a_n, \dots a_0)$.

Опр. $f(x)$ примитивный, если $\operatorname{cont} f = 1$.

Лемма Гаусса. $\operatorname{cont} f \cdot \operatorname{cont} g = \operatorname{cont} fg$.

Д-во. Если p неприводим, то $A/(p)$ обл. цел.

Очев., что $\operatorname{cont} fg \vdots \operatorname{cont} f$
$\vdots \operatorname{cont} g$.

Надо д-ть: если $\operatorname{cont} f = \operatorname{cont} g = 1$, то
$\operatorname{cont} fg = 1$.

Пусть $\operatorname{cont} fg \vdots p$, p неприводим.

$$\begin{array}{ccccc} A/(p) & \rightsquigarrow & (A/(p))[x] \ni \bar{f} & & \bar{f}\cdot\bar{g}. \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ A & & A[x]. \ni f, & & f\cdot g \end{array}$$

Если f и g прим., то $\bar{f} \neq 0$, $\bar{g} \neq 0$.

$A/(p)$ целостное $\Rightarrow$ $(A/(p))[x]$ тоже целостное

$\overline{fg} = 0$, $\bar{f}, \bar{g} \neq 0$. $\square$

Пусть $\operatorname{Quot} A = K$.

Можно рассм. мн-ны с коэф. из A как мн-ны с коэф. из $\mathbb{K}$.

<u>Предл.</u> Всякий мн-н с коэф. из $\mathbb{K}[x]$ предст. ед. образом в виде

$$f(x) = \frac{a}{b}\tilde{f}(x), \quad \text{где } a, b \in A \text{ вз. просты,}$$

$\tilde{f}(x)$ примитивен.

$\mathbb{K}$ — поле $\Rightarrow$ $\mathbb{K}[x]$ факториально!

<u>Предл.</u> Если $f(x) \in A[x]$ расл. на неприв. как мн-н из $\mathbb{K}[x]$, то он расл. на неприв. той же степени и над $A[x]$

<u>Д-во.</u> Пусть $f(x) = g(x)h(x)$, $g, h \in \mathbb{K}[x]$. $\quad f(x) = c\cdot\tilde{f}(x)$, $c \in A$, $\operatorname{cont}\tilde{f} = 1$.

$$g(x) = \frac{a}{b}\tilde{g}(x), \quad g \in A[x] \text{ примит.}$$

$$h(x) = \frac{a'}{b'}\tilde{h}(x) \quad h \in A[x] \text{ примит.}$$

$$f = c\cdot\tilde{f}(x) = \frac{aa'}{bb'}\tilde{g}(x)\cdot\tilde{h}(x).$$

← примит. по л. Гаусса

$$c = \frac{aa'}{bb'}, \qquad cbb' = aa'.$$

$a \vdots b'$

$a' \vdots b.$

$$f(x) = c\cdot\left(\frac{a}{b}\tilde{g}(x)\right)\cdot\left(\frac{a'}{b}\tilde{h}(x)\right) \text{ — разл. в } A[x].$$

<u>Сл-е:</u> если мн-н $f(x) \in A[x]$ дел. на прим. мн-н $g(x) \in A[x]$ над $\mathbb{K}[x]$, то $f(x) \vdots g(x)$ и над $A[x]$.

<u>Сл-е:</u> $\mathbb{K}[x_1, \dots x_n]$ и $\mathbb{Z}[x_1, \dots x_n]$ факториальны.

<u>Д-во:</u> $\mathbb{K}[x,y] = (\mathbb{K}[x])[y]$.

значит, и это тоже факториально

факториальна

<u>Пример:</u> вычислим определитель Вандермонда:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

<u>Пример:</u> $n = 2$: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)$

$n = 3$: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} = \cdot x_1$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & x_2(x_2-x_1) & x_3(x_3-x_1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x_2-x_1 & x_3-x_1 \\ 0 & x_2(x_2-x_1) & x_3(x_3-x_1) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_2-x_1 & x_3-x_1 \\ x_2(x_2-x_1) & x_3(x_3-x_1) \end{vmatrix} = (x_2-x_1)(x_3-x_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_2 & x_3 \end{vmatrix} =$$

$$= (x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_3-x_2).$$

Док., что

$$V(x_1,\dots x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)$$

$\frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$ сомн.

Vandermonde

Cauchy.

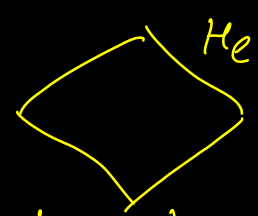
<u>Д-во Комп.</u> $V(x_1,\dots x_n) \in \mathbb{K}[x_1,\dots x_n]$.

Предп., что $x_1 = x_2$. Тогда $V(x_1, x_1, x_3, \dots x_n) = 0$

<u>Лемма.</u> Пусть $\ell(x) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n$.

Пусть $P(x_1,\dots x_n)|_{He} = 0$.

Тогда $P(x_1 \dots x_n) \vdots \ell(x)$.



$H(\ell) = \{(x_1 \dots x_n) \mid \ell(x) = 0\}$

Д-во. Линейной заменой приведём $\ell(x)$ к виду x_1. $H_\ell: x_1 = 0$.

$$P(x_1 \dots x_n)\Big|_{x_1=0} \equiv 0.$$

Значит, $P(x_1 \dots x_n) = x_1 \cdot Q(x_1 \dots x_n)$.

Стало быть, $P \vdots x_1$. $\square$.

$$V(x_1, x_2, \dots x_n) \vdots x_1 - x_2.$$

Аналогично $V(x_1, \dots x_n) \vdots x_i - x_j$. ← вз. просты при $i \neq j$

Значит, $V(x_1 \dots x_n) \vdots \prod\limits_{i<j} (x_j - x_i)$

$\deg V(x) = 0+1+2+\dots+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$.

$\deg = \frac{n(n-1)}{2} = \#\{(i,j) \mid i<j\}$.

$$V(x_1 \dots x_n) = C \cdot \prod_{i<j} (x_j - x_i), \quad C \in \mathbb{R}.$$

$C = ?$

Посчитаем коэф-т при мономе

гл. диаг. det: $x_2 x_3^2 x_4^3 \dots x_n^{n-1}$. → коэф. равен 1:

коэф. тоже равен 1.

Мораль:

$$V(x_1, \dots x_n) = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i).$$

Задача: посчитать $V(x_1 \dots x_n)$ явно по индукции.