Числа Бернулли — Лекция 10

$$1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}.$$

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}.$$

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{n^4}{4}+\frac{n^3}{2}+\frac{n^2}{4}.$$

Вопрос: $1^k+2^k+\ldots+n^k = S_k(n) = ?$

Теорема
- $S_k(n)$ – многочлен от n степ. $k+1$
- $S_k(n) = \frac{n^{k+1}}{k+1}+\frac{n^k}{2}+\ldots$, $S_k(0)=0$, $S_k(1)=1$.

Д-во. Пусть мы нашли многочлен $S_k(n) = \sum_{j=1}^{n} j^k$.

$$S_k(n)-S_k(n-1) = n^k.$$

$$S_k(x) = a_{k+1}x^{k+1}+a_k x^k+\ldots+a_1 x.$$

$$S_k(x-1) = a_{k+1}(x-1)^{k+1}+a_k(x-1)^k+\ldots+a_1(x-1).$$

Найдем S_k: $S_k(x)-S_k(x-1) = x^k$.

$[x^{k+1}]$: $\cancel{a_{k+1}}-\cancel{a_{k+1}} = 0$

$[x^k]$ $\cancel{a_k}+a_{k+1}\cdot(k+1)-\cancel{a_k} = 1.$

$[x^{k-1}]$ $-a_{k+1}\cdot\frac{k(k+1)}{2}+a_k\cdot k = 0$

$\ldots$

$$[x^{k+1-j}]:\quad a_{k+1}\binom{k+1}{j} - a_k\binom{k}{j-1} + a_{k-1}\binom{k-1}{j-2} + \dots + (-1)^i\binom{k+1-i}{j-i}a_{k+1-i} + \dots + (-1)^{j+1}a_{k+1-j}(k+1-j) = 0.$$

Это система ур-й на $a_{k+1}, a_k, \dots, a_1$.

Она треуг. $\Rightarrow$ ед. решение $\Rightarrow$ есть мн-н $S_k(x)$ с такими св-вами.

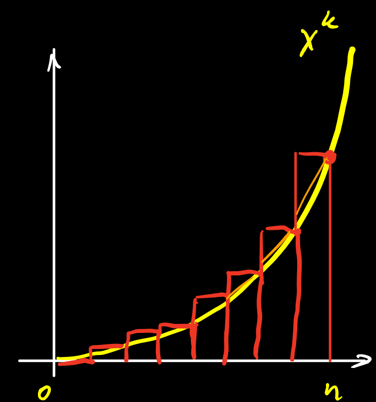
Начнем решать эту систему:

$$a_{k+1}(k+1) = 1 \qquad a_{k+1} = \frac{1}{k+1}.$$

$$-\frac{1}{\cancel{k+1}}\cdot\frac{\cancel{k(k+1)}}{2} + a_k\cdot\cancel{k} = 0 \qquad a_k = \frac{1}{2}.$$

Упр. С помощью этой процедуры найдите формулы для $\sum j^4$, $\sum j^5$.

$$\sum_{j=1}^{n} j^k \approx \int_0^n x^k\,dx = \frac{n^{k+1}}{k+1}.$$



Упр. Приблизить этот интеграл площадью набора трапеций (а не прямоугольников).

Ответ: получится $\frac{n^{k+1}}{k+1} + \frac{n^k}{2}$.

$$\frac{d}{dx}\Big(\underbrace{\int_0^x t^k\,dt}_{S_k(x)}\Big) = x^k = k\cdot\Big(\underbrace{\frac{x^k}{k}}_{S_{k-1}(x)}\Big).$$

$$\frac{d}{dx} S_3(x) = \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{4}\right)' = x^3 + \frac{3x^2}{2} + \frac{x}{2} =$$

$$= 3\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6}\right) = 3S_2(x).$$

$$\frac{d}{dx} S_2(x) = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6}\right)' = x^2 + x + \frac{1}{6} = 2S_1(x) + \frac{1}{6}.$$

Предл. $(S_k(x))' = k \cdot S_{k-1}(x) + B_k^*$.

Д-во. D, Δ, Σ: — опер. на многочленах.

$D P(x) = P'(x)$ — дифф-е

$\Sigma P(n) = P(1) + P(2) + \ldots + P(n)$. — суммирование

увел. deg на 1. $\Sigma x^k = S_k(x)$.

уменьш. deg на 1 $\Delta P(x) = P(x) - P(x-1)$ — разность

$\Delta \Sigma = I$. I — тожд. опер.

$\Delta D = D\Delta$: $f'(x) - f'(x-1) = (f(x) - f(x-1))'$.

$\Delta P = 0 \iff P = \text{const}$.

Докажем, что $\Delta(S_k(x)') = \Delta(k(S_{k-1}(x)))$.

Отсюда будет следовать, что они отл. на const.

$$\Delta\left(D\left(\Sigma x^k\right)\right) = (D\Delta\Sigma)x^k = Dx^k = kx^{k-1} =$$

$$= (\Delta\Sigma)(kx^{k-1}) = k\Delta(\Sigma x^{k-1}) = k\Delta(S_{k-1}). \quad \square$$

Предл. Коэффициент при n^{k+1-i} в $S_k(n)$ имеет вид $B_i^* \cdot \frac{k(k-1)\dots(k+2-i)}{i!}$.

Эквив. образом,

$$(*)\quad S_k(n) = \frac{1}{k+1} n^{k+1} + \frac{n^k}{2} + \dots + B_i^* \frac{k(k-1)\dots(k+2-i)}{i!} n^{k+1-i} + \dots + B_k^* n.$$

Д-во. Упр на дифференцирование.

Тем самым мы можем находить коэф-ты $S_k(x)$, пользуясь условием $S_k(1)=1$ и находя отсюда B_k^*.

Опр. Числа Бернулли: $B_1 = -B_1^*$, $B_k = B_k^*$, $k>1$.

$$S_k(n-1) = S_k(n) - n^k = \frac{1}{k+1} n^{k+1} - \frac{n^k}{2} + \dots + B_i \frac{k(k-1)\dots(k+2-i)}{i!} n^{k+1-i} + \dots + B_k n.$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
B_n	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{5}{66}$	0	$-\frac{691}{2730}$

$$\frac{k(k-1)\dots(k+2-i)}{i!} = \frac{1}{k+1}\binom{k+1}{i}.$$

$$S_k(n-1) = \frac{1}{k+1}\left(n^{k+1} + (k+1)B_1 n^k + \dots + \binom{k+1}{i} B_i n^{k+1-i} + \dots + (k+1) B_k n\right).$$

$B_k \to B^k$.

$$S_k(n-1) = \frac{1}{k+1}\Big(n^{k+1} + (k+1)B^1 n^k + \ldots + \binom{k+1}{i} B^i n^{k+1-i} +$$

(*: $n=1$)

$$+ \ldots + (k+1)B^k n + B^{k+1} - B^{k+1}\Big) =$$

$$= \frac{1}{k+1}\left[(n+B)^{k+1} - B^{k+1}\right]$$

$n=1$: $\quad (B+1)^{k+1} - B^{k+1} = 0.$

$$\boxed{B_k = -\sum_{i<k} \binom{k+1}{i} \frac{B_i}{k+1}.}$$

рекурр. соотн. для чисел Бернулли

Упр. Д-ть формулу Эйлера - Маклорена: $f(x)$, -ия-и $f(x) = F'(x)$.

$$f(0) + \ldots + f(n-1) = F(B+n) - F(B) = \int_0^n f(x+B)\,dx.$$

$$f(n) = q^n \qquad F(n) = \frac{q^n}{\ln q}.$$

$$f(0) + \ldots + f(n-1) = 1 + \ldots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q-1} = \frac{q^{B+n} - q^B}{\ln q} =$$

$$= q^B \cdot \frac{q^n - 1}{\ln q}. \qquad q^B = \frac{\ln q}{q-1}. \qquad q = e^s.$$

$$e^{sB} = \frac{s}{e^s-1}. \qquad e^{sB} = \sum_{k\geq 0} \frac{s^k \cdot B_k}{k!}.$$

Теор. $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \frac{B_k s^k}{k!} = \frac{s}{e^s-1}$ ← ряд Тодда.

Д-во. $\displaystyle\left(\sum_{k\geq 0} \frac{B_k s^k}{k!}\right)\left(s + \frac{s^2}{2!} + \frac{s^3}{3!} + \ldots\right) = s.$

Это буквально рекуррента для чисел Бернулли. $\square$

Утв. $B_k = 0$ при k неч... > 1.

Д-во. $\displaystyle\frac{s}{e^s-1} + \frac{s}{2}$ имеет нулевые неч. к-ты, т.е. явл. четной ф-цией.

Действ: $\displaystyle\frac{s}{e^s-1} + \frac{s}{2} = \frac{s}{2}\left(\frac{2}{e^s-1} + \frac{e^s-1}{e^s-1}\right) =$

$$= \left(\frac{e^s+1}{e^s-1}\right) \cdot \frac{s}{2} = \left(\frac{e^{s/2}+e^{-s/2}}{e^{s/2}-e^{-s/2}}\right) \cdot \frac{s}{2} = \frac{\operatorname{ch} s/2}{\operatorname{sh} s/2} \cdot \frac{s}{2} =$$

четная ф-я.

$$= \frac{s}{2} \operatorname{cth} \frac{s}{2}. \qquad \square$$

$$s \operatorname{cth} s = \frac{2s}{e^{2s}-1} + \frac{2s}{2} = \sum B_{2n} \frac{(2s)^{2n}}{(2n)!} = \sum 4^n B_{2n} \frac{s^{2n}}{(2n)!}$$

$\square$