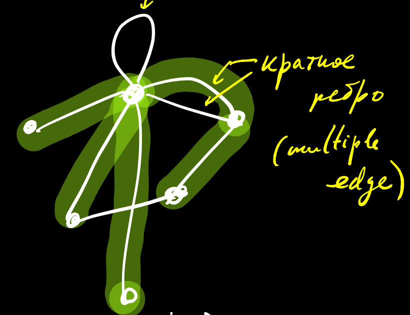
Перечисление деревьев

22.05.20
ДМ, лекция 9

Граф: $\Gamma = (V, E, I)$



V - вершины, (vertices)

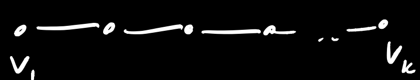
E - ребра (edge)

$I : E \longrightarrow V^2$ ← множество неупорядоченных пар вершин.

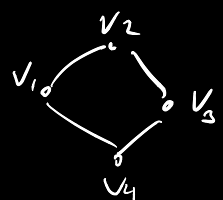
(можно брать отобр. в упорядоченные пары вершин - тогда получим ориентированный граф).

Определения:

→ v_1 и v_2 смежные.



$v_1, v_2, \ldots v_k$, v_i и v_{i+1} смежны — путь из v_1 в v_k.



$v_1 = v_k$ - цикл.

Если $\forall\, v, w \in V$ сущ. путь из v в w, то Γ связен.

Связный граф без циклов — дерево.

(не обяз. связный)  — лес

Остовное дерево графа Γ - это $\Gamma' \subset \Gamma$,
(spanning tree) $V(\Gamma) = V(\Gamma')$, $E(\Gamma) \supset E(\Gamma')$,
Γ' - дерево.

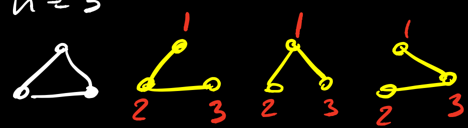
Вопрос: пусть $\Gamma = K_n$ - полный граф на n вершинах (любые две вершины соед. единств. ребром).

Сколько в нём остовных деревьев? $T(n)$.

$n = 2$

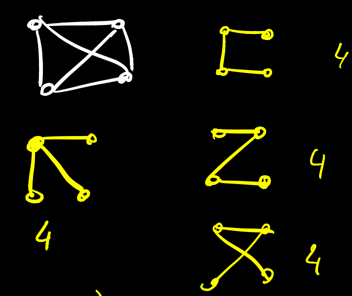
$T(2) = 1.$

$n = 3$



$T(3) = 3.$

$n = 4$

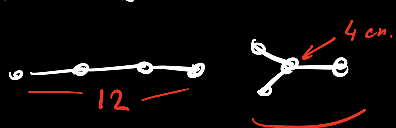


$T(4) = 16$

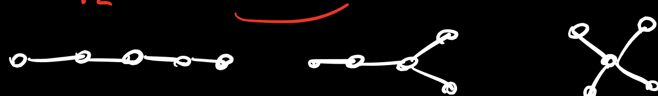
Какие бывают (~~неизом.~~) деревья на n вершинах?

$n = 3$:

$n = 4$



$n = 5$:



Теорема Кэли. Число деревьев с n пронумерованными вершинами равно $T(n) = n^{n-2}$.

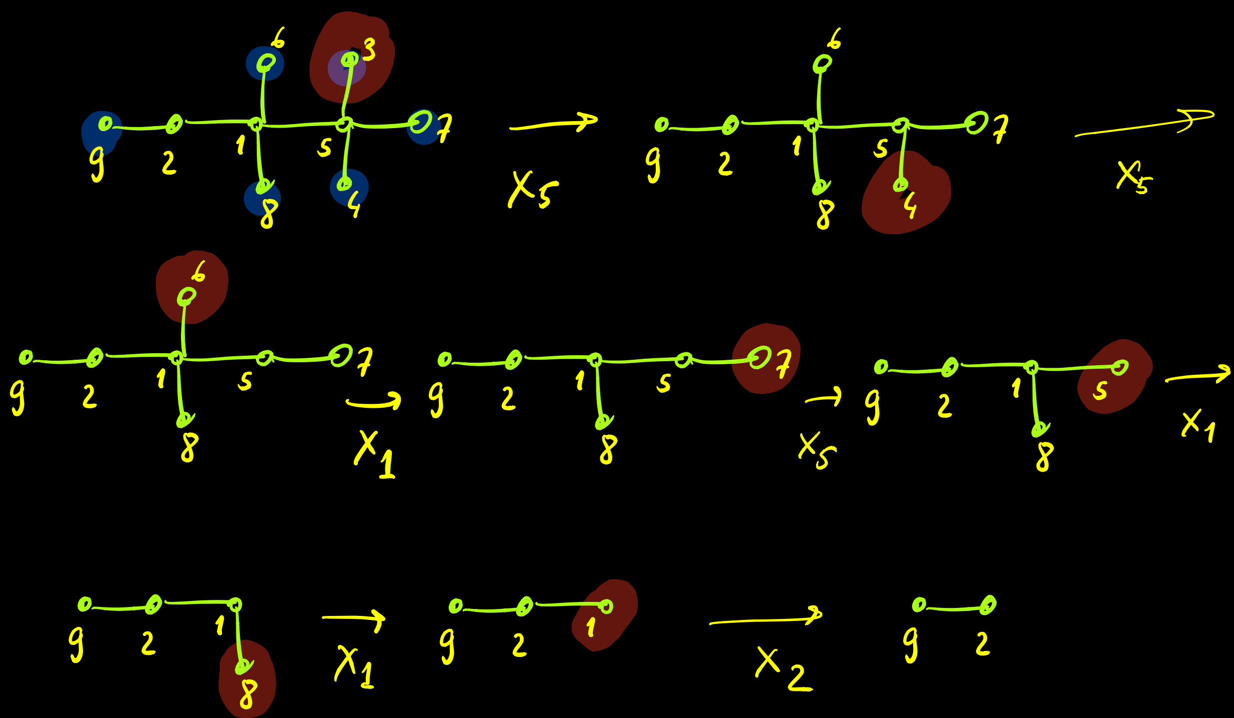
Д-во № 1: коды Прюфера.

Пусть дано дерево с пронумер. вершинами. Сопоставим ему слово из $n-2$ букв в алфавите $x_1, \dots x_n$.

Лист - вершина, из к-рой исходит одно ребро.

Алгоритм: • Возьмем лист с min номером, выбросим его и запишем в слово номер вершины, с которой он смежен.

• Повторим, пока не останется одно ребро.



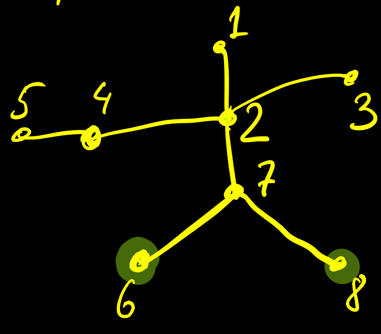
$$x_5\, x_5\, x_1\, x_5\, x_1\, x_1\, x_2$$

Инъективное отобр.: деревья $\longrightarrow$ слова длины $n-2$.

Обратно: $x_2\, x_2\, x_4\, x_2\, x_7\, x_7$

Листья: 1, 3, 5, 6, 8

степени:	
2	4
4	2
7	3.



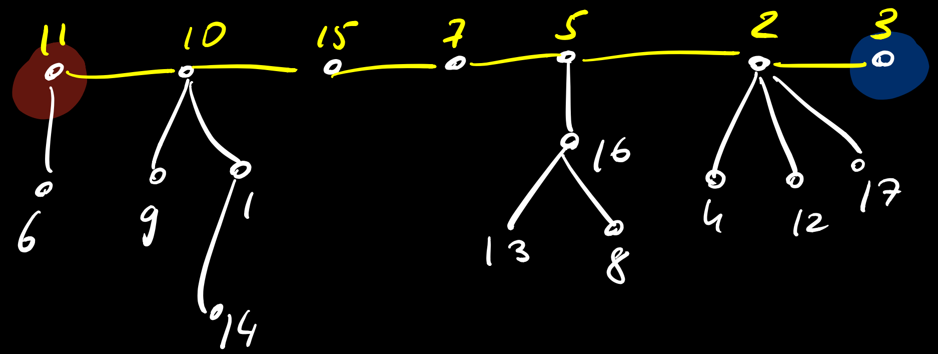
Значит, $T(n)$ равно числу кодов Прюфера, т.е. n^{n-2}. $\square$

Д-во №2 (Joyal). Биотмеченные деревья.

Будем доказывать, что к-во деревьев с 2 отмеч. вершинами равно n^n.

Ясно, что это равно $T(n)\cdot n^2$.

$$n^n = \# \mathrm{Map}(\{1,\dots n\} \to \{1,\dots n\}).$$



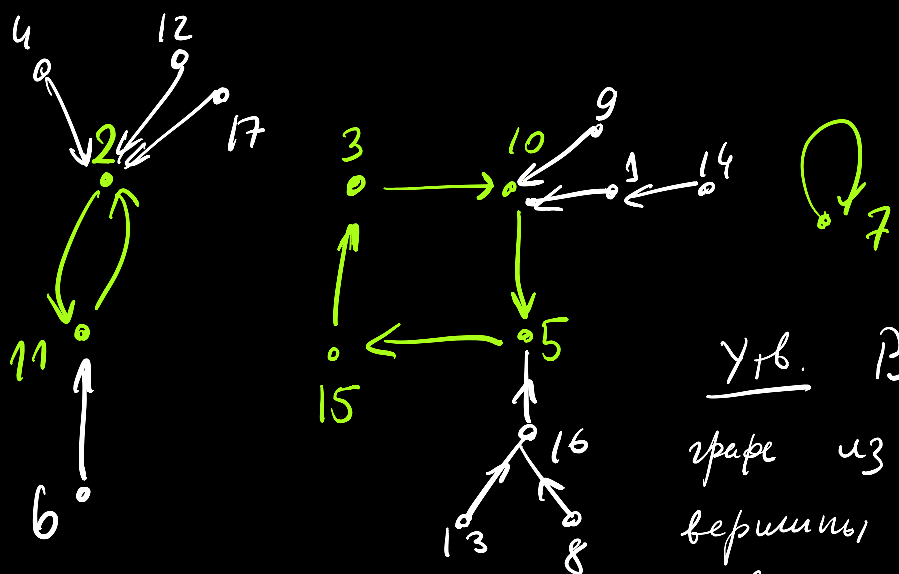
Пусть путь из красной вершины в синюю сост. из вершин с номерами $b_1, b_2, b_3 \dots b_k$

Пусть $a_1 \dots a_k$ - те же номера в порядке возрастания.

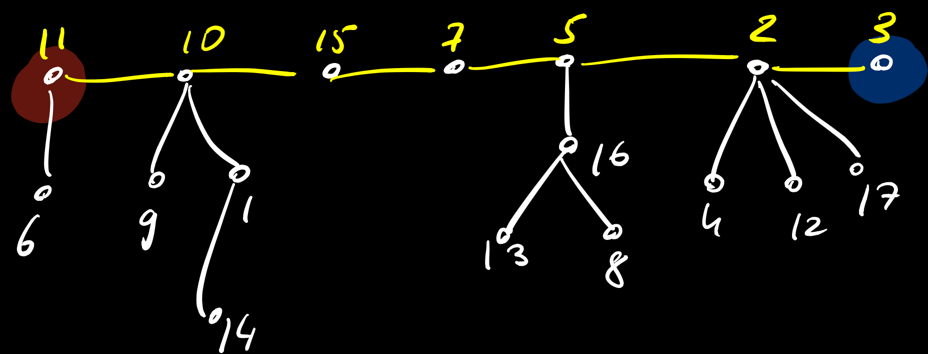
$$\begin{array}{ccccccc} 2 & 3 & 5 & 7 & 10 & 11 & 15 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 11 & 10 & 15 & 7 & 5 & 2 & 3 \end{array}$$

Рассм. отобр. $a_i \mapsto b_i$

Получилась $\sigma : \{2, 3, 5, 7, 10, 11, 15\} \circlearrowleft$



<u>Утв.</u> В полученном графе из каждой вершины исходит ровно одна стрелка.



По дереву с 2 отм. вершинами построим <u>ориент.</u> граф, в к-ром <u>исх</u> степень каждой вершины равна 1.

Это то же самое что отобр.

$\{1, \ldots n\} \longrightarrow \{1, \ldots n\}$. Таких отобр. n^n.

Всего деревьев в n^2 раз меньше, т.е. $T(n) = n^{n-2}$. $\square$