Диаграммы Юнга и разбиения

Задача 1. а) Докажите, что производящая функция для последовательности Фибоначчи удовлетворяет уравнению

$$F(q) = 1 + qF(q) + q^2F(q).$$

б) Найдите такие a и b, для которых

$$\frac{1}{1-q-q^2} = \frac{a}{1-\varphi q} + \frac{b}{1-\bar{\varphi} q},$$

где φ и $\bar{\varphi}$ определяются из условия $1 - q - q^2 = (1 - \varphi q)(1 - \bar{\varphi} q)$.

в) Докажите *формулу Бине* для n-го числа Фибоначчи:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right).$$

Задача 2. Докажите, что число трёхмерных диаграмм Юнга в параллелепипеде $2 \times m \times n$ равняется

$$\mathcal{B}_{2,m,n} = \prod_{i=1}^{n} \frac{(m+i)(m+i+1)}{i(i+1)}.$$

Указание. Конечно же, можно пользоваться доказанной в лекции формулой $\mathcal{B}_{2,m,n} = (C_{m+n}^{m})^2 - C_{m+n}^{m-1} \cdot C_{m+n}^{m+1}$.

Задача 3. Докажите, что:

а) количество разбиений числа n в сумму не более k слагаемых равно количеству разбиений на слагаемые, не превосходящие k;

б) количество разбиений числа n в сумму нечётных слагаемых равно количеству разбиений в сумму различных слагаемых.