

Фризы и цепные дроби

Е. Ю. Смирнов

Аннотация. Записки миникурса, прочитанного на XIX летней школе «Современная математика», Дубна, 18–29 июля 2019 г.

Фауст:

*Так пентаграмма этому виной?
Но как же, бес, пробрался ты за
мною?*

Каким путем впросак попался?

Мефистофель:

*Изволили её вы плохо начертить,
И промежуток в уголку остался,
Там, у дверей, — и я свободно мог
вскочить.*

Фауст:

*Да, случай над тобой удачно
посмеялся.*

*Так ты мой пленник, стало быть?
Вот удалось нежданно-нежданно!*

*И.-В. Гёте. Фауст.
Пер. Н. Холодковского.*

ВВЕДЕНИЕ

Фризами называются таблицы, заполненные положительными числами в соответствии с некоторым мультипликативным правилом. Эти таблицы были впервые определены в 1970-х гг. в работах Д. Кокстера и Дж. Конвея. Оказывается, что, несмотря на простоту их определения, фризы обладают рядом весьма неожиданных свойств. Они оказываются связаны со множеством других математических понятий, в числе которых — триангуляции многоугольников, числа Каталана и Фибоначчи, цепные дроби, ряды Фарея... Кроме того, оказалось, что фризы (так, конечно, тогда еще не называвшиеся) рассматривались еще в работах К.-Ф. Гаусса и Дж. Непера.

В 2000-х гг. интерес к фризам среди математиков существенно вырос в связи с появлением теории кластерных алгебр, основные понятия которой были введены в работах А. В. Зелевинского и С. В. Фомина. Оказалось, что фризы возникают в связи с представлениями колчанов, многообразиями Грассмана, эллиптическими функциями, обобщенными ассоциациями и многими другими сюжетами из современной математики.

В этой брошюре мы начнем с классических вопросов о фризах, рассматривавшихся Кокстером и Конвеем. Этому посвящены первые три главы. В первой главе мы приведем основные определения, сделаем ряд наблюдений о фризах (которые будут доказаны впоследствии), а также расскажем о предыстории вопроса — о том, как фризы появлялись в работах Гаусса и его предшественников.

Вторая глава посвящена феномену целочисленности фризов. Мы покажем, что элементы фриза вычисляются как полиномы с целыми коэффициентами — континуанты — от элементов начальной строки.

Основной результат третьей главы — классификация всех целочисленных фризов. Как будет показано, целочисленные фризы порядка n биективно соответствуют триангуляциям выпуклого n -угольника; при этом все элементы фриза можно восстановить по этой триангуляции с помощью несложного алгоритма.

В четвертой главе рассказывается о связи фризов с разложениями рациональных чисел в цепные дроби. Оказывается, разложению рационального числа в цепную дробь отвечает триангуляция многоугольника некоторого специального вида; мы покажем, что по ней и соответствующему ей фризу можно восстановить различные характеристики этой цепной дроби: подходящие дроби, длину цепной дроби и т.д.

В пятой главе мы выясним, как эти сюжеты связаны с действием модулярной группы $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ на плоскости Лобачевского. А именно, всякая триангуляция описанного вида может быть получена в качестве подграфа в так называемом графе Фарей — бесконечном графе, вершинами которого являются рациональные точки на абсолюте плоскости Лобачевского, а ребрами — прямые, соединяющие точки p/q и r/s , для которых $ps - qr = \pm 1$. Этот граф сохраняется модулярной группой $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$. Мы опишем конструкцию, которая позволяет построить по рациональному числу (или отвечающей ему триангуляции многоугольника) некоторый элемент модулярной группы, явно выраженный через её стандартные образующие. Наконец, мы выясним, как триангуляции (и обобщающие их $3d$ -разрезания) многоугольников связаны с соотношениями на образующие модулярной группы.

В основу брошюры лег миникурс из четырех лекций, прочитанных мною на XIX Летней школе «Современная математика» в Дубне в июле 2019 года. Идея рассказать о фризах возникла у меня в результате общения с В. Ю. Овсиенко и С. Морьер-Жену в ходе летней школы «Теория представлений групп Ли, математическая физика и комбинаторика» (Реймс, Франция) в июне того же года. Я благодарен организаторам и слушателям этих летних школ.

Хочу отметить, что этот текст ни в коей мере не претендует на полноту охвата литературы по фризам; для этого рекомендую читателю обратиться к обзорам и специальным статьям по этой тематике. Например, можно начать с замечательного обзора С. Морьер-Жену [4]. Кроме того, подборку ссылок на литературу о фризах и их взаимосвязях с другими областями математики можно найти на домашней странице А. А. Феликсон:

<http://www.maths.dur.ac.uk/users/anna.felikson/Projects/frieze/frieze-res.html>

Разумеется, вся эта литература написана на английском языке; единственные (кроме этого) русскоязычные тексты о фризах, известные автору — это короткая заметка Мартина Гарднера в его книге «Крестики–нолики» [9, с. 226–228] и статья Джона Конвея в журнале «Квант» [10], содержащая больше вопросов, чем ответов.

1. ФРИЗЫ

1.1. Определение и первые свойства.

Определение 1.1. Фризом порядка n называется таблица (t_{ij}) , состоящая из $n - 1$ бесконечной влево и вправо строки положительных чисел, расположенных в шахматном порядке, и удовлетворяющих следующим свойствам:

- Первая и последняя строки состоят из единиц: $t_{1j} = t_{n-1,j} = 1$;
- Унимодулярность: для любых четырех чисел a b c d в вершинах единичного ромба верно равенство $ad - bc = 1$.

Фриз называется *целочисленным*, если все числа t_{ij} целые.

Пример 1.2. Вот пример целочисленного фриза порядка 7 (такой фриз, как следует из определения, состоит из 6 строк).

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 \dots & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \dots \\
 & & \dots & 2 & & 1 & & 4 & & 2 & & 1 & & 3 & & 2 & & 2 & & 1 & & \dots \\
 \dots & 3 & & 1 & & 3 & & 7 & & 1 & & 2 & & 5 & & 3 & & 1 & & \dots \\
 & & \dots & 1 & & 2 & & 5 & & 3 & & 1 & & 3 & & 7 & & 1 & & 3 & & \dots \\
 \dots & 2 & & 1 & & 3 & & 2 & & 2 & & 1 & & 4 & & 2 & & 2 & & \dots \\
 & & \dots & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \dots
 \end{array}$$

Глядя на этот и другие примеры, можно отметить ряд замечательных свойств. Во-первых, такой фриз оказывается периодичным с периодом n — т.е. можно считать его нарисованным на цилиндре. Во-вторых, этот фриз дополнительно обладает скользящей симметрией: если перевернуть его вверх ногами и сдвинуть вбок на три с половиной позиции, он совпадет с исходным.

Наконец, фриз, очевидно, определяется своими первыми двумя строками (единичной и первой нетривиальной) — так вот, почему-то оказывается, что если все элементы второй строки будут целыми числами, то и все остальные элементы фриза являются целыми. Это совершенно неочевидно из определения: из условия унимодулярности для ромбика

$$\begin{array}{ccc}
 & b & \\
 a & & d \\
 & c &
 \end{array}$$

следует, что $c = \frac{ad-1}{b}$, т.е. для вычисления элементов приходится использовать

деление — и тем не менее, результат этого деления почему-то всегда оказывается целым числом. Наша ближайшая цель — разобраться с этими феноменами.

Замечание 1.3. Иногда бывает полезно формально дополнить фриз сверху и снизу строчками нулей: $t_{0j} = t_{nj} = 0$. Тем самым элементы двух первых и двух последних строк тоже будут включены в ромбики, для которых тривиальным образом будет выполнено условие унимодулярности.

1.2. Фризы малых порядков. Посмотрим, как могут быть устроены фризы малых порядков. При $n = 3$ фриз состоит из двух строк, то есть фриз порядка три единственен:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 \dots & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \dots \\
 & & \dots & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \dots
 \end{array}$$

Далее, фризы порядка 4 имеют вид

$$\begin{array}{cccccc}
 \dots & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \dots \\
 & & \dots & a & & b & & c & & d & & \dots \\
 \dots & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \dots
 \end{array}$$

Условие унимодулярности равносильно тому, что произведение любых двух элементов во второй строке равняется 2. Поэтому такой фриз имеет вид

$$\begin{array}{cccccc}
 \dots & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \dots \\
 & & \dots & a & & b & & a & & b & & \dots \\
 \dots & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \dots
 \end{array}$$

где $ab = 2$. В частности, целочисленных фризов порядка 4 будет два: один будет отвечать ситуации, когда $a = 2$ и $b = 1$, а другой — $a = 1$ и $b = 2$. Среди нецелочисленных фризов отметим такой:

$$\begin{array}{cccccc} \dots & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \dots \\ & \dots & \sqrt{2} & & \sqrt{2} & & \sqrt{2} & & \sqrt{2} & & \dots \\ \dots & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \dots \end{array}$$

Замечание 1.4. Заметим, что фризы порядка 4 периодичны с периодом 2, а не 4 (а период последнего фриза и вовсе равен 1). Это связано с наличием скользящей симметрии: если перевернуть фриз вверх ногами и сдвинуть на половину периода, он совпадет с исходным.

1.3. Фризы порядка 5. Такие фризы удобно восстанавливать не по верхней строке, а по диагонали. Рассмотрим фриз вида

$$\begin{array}{cccccc} \dots & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \dots \\ & \dots & x & & z & & v & & t & \dots \\ & & \dots & y & & u & & w & \dots \\ \dots & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \dots \end{array}$$

Выразим все его значения последовательно через x и y . Мы получим, что

$$z = \frac{1+y}{x}; \quad u = \frac{1+z}{y} = \frac{1+x+y}{xy}; \quad v = \frac{1+u}{z} = \frac{1+x+y+xy}{xy} \cdot \frac{x}{1+y} = \frac{1+x}{y};$$

$$w = \frac{1+v}{u} = \frac{1+x+y}{y} \cdot \frac{xy}{1+x+y} = x; \quad t = \frac{1+w}{v} = (1+x) \cdot \frac{y}{1+x} = y.$$

Мы опять получили x и y , но уже на другой диагонали. Видим, что фриз опять получается периодичным с периодом 5, и он вновь обладает скользящей симметрией.

Упражнение 1.5. Перечислите все целочисленные фризы порядка 5. Сколько их?

Замечание 1.6. Если, как мы и делали, рассматривать элементы фриза как рациональные функции от x и y , то в знаменателе этих рациональных функций всегда оказывается одночлен. Иными словами, они оказываются *многочленами Лорана*: многочленами, в которых разрешено использовать и отрицательные целые степени переменных. Поскольку мы зачастую делим вовсе не на одночлен — можно отметить, что «загадочным образом» деление всегда происходит нацело, правда, уже в кольце многочленов Лорана. Это наблюдение, известное как *феномен Лорана*, имеет далеко идущие обобщения в теории кластерных алгебр.

Упражнение 1.7. Выразите элементы фриза порядка 6 через значения на диагонали. Будет ли в этом случае иметь место феномен Лорана?

Упражнение 1.8. Рассмотрим фриз порядка 5, у которого $x = y = \tau$. Покажите, что $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, и найдите остальные элементы этого фриза.

Последний фриз получается путем применения к правильному пятиугольнику *теоремы Птолемея*: эта теорема из школьного курса планиметрии гласит, что для вписанного четырехугольника $ABCD$ верно равенство $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$. Действительно, рассмотрим правильный пятиугольник, все стороны которого равны 1 (рис. 1.1). Пусть его диагональ равна τ . Запишем теорему Птолемея для равнобокой трапеции $ABCD$: в ней $AB = BC = CD = 1$, а $AD = AC = BD = \tau$. Мы получим уравнение

$$1 \cdot \tau + 1 \cdot 1 = \tau \cdot \tau, \quad \text{т.е.} \quad \tau^2 - \tau - 1 = 0.$$

Положительный корень этого уравнения как раз равен $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; это знаменитое *золотое сечение*.

Упражнение 1.9. Рассмотрим правильный n -угольник со стороной 1 и многократно применим к нему теорему Птолемея. Какой фриз порядка n мы получим? Чему равны элементы в его k -й строке?

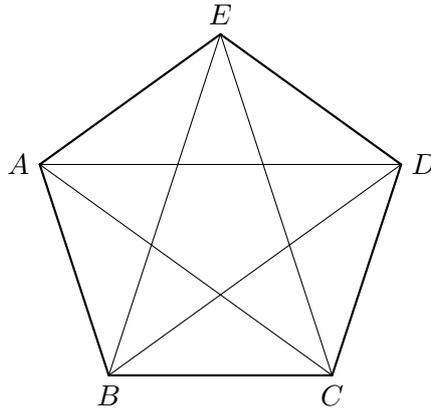
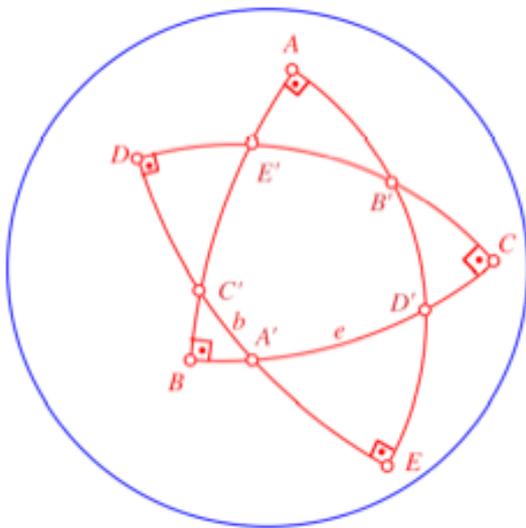


Рис. 1.1. Правильный пятиугольник

1.4. **Pentagramma mirificum.** Впервые фризы порядка 5 появились в связи со сферической тригонометрией в работах Натаниэла Тарпорли¹ и Джона Непера². Дальнейшее развитие они получили в работах Карла-Фридриха Гаусса. Их появление было связано со следующей задачей сферической геометрии.

Рассмотрим пятиконечную звезду на сфере, все углы которой являются прямыми (см. рис. 1.2). В частности, это значит, что точка A' является полюсом для большого круга CD , B' — для DE , и т.д.



4 "This uniformitie of the Circular parts, most manifestly appeareth in right-angled triangles made on the superficies of a globe, of five great circles, the first whereof cutteth the second, the second the third, the third the fourth, the fourth the fifth: and lastly, the fifth the first, at right angles. But all the other Sections shall bee made at oblique angles.

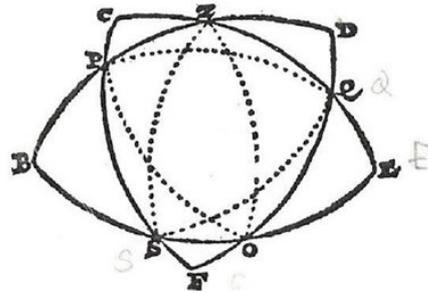


Рис. 1.2. Pentagramma mirificum. Справа рисунок из работы Непера, 1614 г.

Обозначим через α, \dots, ϵ квадраты тангенсов длин сторон пятиугольника:

$$\alpha = \operatorname{tg}^2 B'E', \quad \beta = \operatorname{tg}^2 E'C', \quad \gamma = \operatorname{tg}^2 A'C', \quad \delta = \operatorname{tg}^2 A'D', \quad \epsilon = \operatorname{tg}^2 D'B'.$$

Оказывается, что эти пять величин связаны следующими соотношениями, позволяющими получить по любым двум из них остальные три:

$$(1) \quad 1 + \alpha = \gamma\delta; \quad 1 + \beta = \delta\epsilon; \quad 1 + \gamma = \epsilon\alpha; \quad 1 + \delta = \alpha\beta; \quad 1 + \epsilon = \beta\gamma.$$

Упражнение 1.10 (необязательное, для любителей сферической геометрии). Проверьте эти формулы.

¹Nathaniel Torporley, тж. Torporley (1564–1632). Английский математик, астроном и астролог. Некоторое время работал во Франции секретарем Франсуа Виета.

²John Napier (1550–1617). Шотландский математик. Известен как изобретатель логарифмов и десятичной точки.

Таким образом, эти величины являются элементами следующего фриза порядка 5:

$$\begin{array}{cccccccc}
 \dots & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \dots \\
 & & \dots & \alpha & & \beta & & \gamma & & \delta & & \epsilon & \dots \\
 & & & \dots & \delta & & \epsilon & & \alpha & & \beta & & \gamma & \dots \\
 \dots & & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \dots
 \end{array}$$

Упражнение 1.11. Используя соотношения (1), покажите следующее равенство (также принадлежащее Гауссу):

$$\alpha\beta\gamma\delta\epsilon = 3 + \alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon = \sqrt{(1 + \alpha)(1 + \beta)(1 + \gamma)(1 + \delta)(1 + \epsilon)}.$$

Это равенство в работе Гаусса названо *schöne Gleichung*, т.е. «красивым тождеством».

В более современных терминах можно сказать, что фризмы описывают *пространство модулей* $\mathcal{M}_{0,5}$ пятерок точек на проективной прямой \mathbb{P}^1 . А именно, рассмотрим пять попарно различных точек z_1, \dots, z_5 на \mathbb{P}^1 , с точностью до действия группы $\text{PGL}(2)$. Для любых четырех из них можно записать их двойное отношение. Пусть

$$u_1 = [z_1 : z_2 : z_3 : z_4] = \frac{(z_3 - z_1)(z_4 - z_2)}{(z_3 - z_2)(z_4 - z_1)}, \quad u_2 = [z_2 : z_3 : z_4 : z_5], \dots$$

и т.д. Таким образом мы получаем пять двойных отношений u_1, \dots, u_5 . Можно показать, что они удовлетворяют соотношениям, аналогичным (1). Тем самым такие пятерки (а значит, и фризмы порядка 5) параметризуют пятерки точек на \mathbb{P}^1 с точностью до проективных замен координат. Детали оставляются в качестве упражнения для заинтересованного читателя.

2. КОНТИНУАНТЫ

2.1. Рекуррентное соотношение. Теперь перейдем к фризам произвольного порядка. Наша ближайшая цель — получить выражение для элементов третьей и последующих строк фриза через элементы второй строки.

Пусть дан фриз со второй строкой $\dots, a_1, a_2, a_3, \dots$. Ясно, что каждый из элементов третьей строки выражается через два элемента второй строки, стоящие непосредственно над ним (слева и справа). Далее, каждый элемент четвертой строки можно найти по правилу унимодулярности уже через *три* стоящих над ним элемента второй строки, и так далее. Обозначим элементы третьей, четвертой и т.д. строк через $v_2(a_i, a_{i+1})$, $v_3(a_i, a_{i+1}, a_{i+2})$, и т.д., как показано ниже:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 \dots & 1 & & 1 & & & 1 & & & 1 & & 1 & \dots \\
 & \dots & a_1 & & & a_2 & & & a_3 & & & a_4 & \dots \\
 & & \dots & v_2(a_1, a_2) & & & v_2(a_2, a_3) & & & v_2(a_3, a_4) & & \dots & \\
 & & & \dots & v_3(a_1, a_2, a_3) & & & v_3(a_2, a_3, a_4) & & \dots & & & \\
 & & & & \dots & v_4(a_1, a_2, a_3, a_4) & & \dots & & & & &
 \end{array}$$

Нетрудно найти выражение для элементов третьей строки:

$$v_2(a_1, a_2) = a_1 a_2 - 1, \quad v_2(a_2, a_3) = a_2 a_3 - 1,$$

а из них уже выразить элементы четвертой:

$$v_3(a_1, a_2, a_3) = (v_2(a_1, a_2)v_2(a_2, a_3) - 1)/a_2 = a_1 a_2 a_3 - a_1 - a_3,$$

пятой:

$$\begin{aligned}
 v_4(a_1, a_2, a_3, a_4) &= (v_3(a_1, a_2, a_3)v_3(a_2, a_3, a_4) - 1)/v_2(a_2, a_3) = \dots \\
 &\dots = a_1 a_2 a_3 a_4 - a_1 a_2 - a_1 a_4 - a_3 a_4 + 1,
 \end{aligned}$$

шестой:

$$v_5(a_1, \dots, a_5) = a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 - a_1 a_2 a_3 - a_1 a_2 a_5 - a_1 a_4 a_5 - a_3 a_4 a_5 + a_1 + a_3 + a_5.$$

(проделайте эти вычисления самостоятельно!).

Внимательно посмотрев на эти выражения, можно заметить закономерность, которой они подчиняются.

2.2. Коды Морзе. Рассмотрим n расположенных в ряд точек, которые занумеруем переменными a_1, \dots, a_n . Теперь соединим между собой какие-нибудь пары соседних точек, с условием, что каждую точку можно соединить не более чем с одной соседней. Мы получим «код Морзе» из точек и тире: конфигурацию наподобие следующей.

$$\begin{array}{ccccccc}
 a_1 & - & a_2 & & a_3 & & a_4 & & a_5 & - & a_6 & & a_7 \\
 \circ & & \circ
 \end{array}$$

Такой конфигурации сопоставим моном (т.е. одночлен): произведение переменных, которые стоят в *точках*, взятое со знаком «плюс» или «минус» в зависимости от четности числа *тире*. Будем называть этот моном *весом* кода Морзе c и обозначать через $w(c)$. Так, конфигурации с предыдущего рисунка будет отвечать выражение $w(c) = (-1)^2 a_3 a_4 a_7 = a_3 a_4 a_7$.

Пример 2.1. Все коды Морзе и соответствующие им мономы при n от 1 до 5 представлены в таблице 1.

Определение 2.2 (правило Эйлера). *Континуантой* $V_n(a_1, \dots, a_n)$ порядка n называется сумма одночленов, соответствующих всевозможным кодам Морзе на n вершинах.

Замечание 2.3. Положим континуанту нулевого порядка (не зависящую от каких-либо аргументов) равной $V_0 = 1$. Более того, иногда бывает удобно считать, что $V_n = 0$, если n отрицательно.

$n = 1$	○	a_1
$n = 2$	○ ○ ○ — ○	$a_1 a_2$ -1
$n = 3$	○ ○ ○ ○ ○ — ○ ○ — ○ ○	$a_1 a_2 a_3$ $-a_1$ $-a_3$
$n = 4$	○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ — ○ ○ ○ — ○ ○ ○ — ○ ○ ○ ○ — ○ ○ — ○	$a_1 a_2 a_3 a_4$ $-a_1 a_2$ $-a_1 a_4$ $-a_3 a_4$ 1
$n = 5$	○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ — ○ ○ ○ ○ — ○ ○ ○ ○ — ○ ○ ○ ○ — ○ ○ ○ ○ ○ ○ — ○ ○ — ○ ○ — ○ ○ ○ — ○ ○ — ○ ○ — ○ ○	$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$ $-a_1 a_2 a_3$ $-a_1 a_2 a_5$ $-a_1 a_4 a_5$ $-a_3 a_4 a_5$ a_1 a_3 a_5

ТАБЛИЦА 1. Коды Морзе при $n \leq 5$

Таблица 1 позволяет нам вычислить континуанты порядков, не превосходящих 5. Мы видим, что у нас получаются в точности те же выражения, что и для $f_n(a_1, \dots, a_n)$. Вскоре мы докажем это утверждение, но сначала установим еще некоторые свойства континуант. Начнем с рекуррентного соотношения.

Предложение 2.4. *Континуанты удовлетворяют рекуррентному соотношению*

$$(2) \quad V_n(a_1, \dots, a_n) = a_1 V_{n-1}(a_2, \dots, a_n) - V_{n-2}(a_3, \dots, a_n).$$

Доказательство. Возьмем какой-нибудь код Морзе на n вершинах. Посмотрим на первую вершину. Возможны два варианта. Либо ей отвечает точка, и тогда всякая конфигурация c получается как код Морзе c' на вершинах $2, \dots, n$; при этом $w(c) = a_1 w(c')$, поскольку в коде c первая вершина учитывается, а в конфигурации c' нет. Либо же, напротив, первая вершина соединена со второй при помощи тире; в таком случае обозначим код Морзе на вершинах $3, \dots, n$ через c'' , а веса кодов c и c'' отличаются знаком: $w(c) = -w(c'')$.

Стало быть, все коды, начинающиеся с точки, дадут в континуанту $V_n(a_1, \dots, a_n)$ вклад, равный $a_1 V_{n-1}(a_2, \dots, a_n)$, а все начинающиеся с тире — вклад, равный $-V_{n-2}(a_3, \dots, a_n)$. Это и дает нам искомое соотношение (2). \square

Дальнейшие свойства континуант мы оставим в качестве упражнения для читателя.

Упражнение 2.5. Докажите следующие равенства:

- (1) $V_n(a_1, \dots, a_n) = V_n(a_n, \dots, a_1)$;
- (2) $V_n(a_1, \dots, a_{n-1}, 0) = V_{n-1}(a_1, \dots, a_{n-1})$;
- (3) $V_n(a_1, \dots, a_n) = a_n V_{n-1}(a_1, \dots, a_{n-1}) - V_{n-2}(a_1, \dots, a_{n-2})$.

2.3. Соотношение унимодулярности для континуант.

Теорема 2.6. *Для любых a_1, \dots, a_{n+1} имеет место соотношение*

$$V_n(a_1, \dots, a_n) V_n(a_2, \dots, a_{n+1}) = V_{n-1}(a_2, \dots, a_n) V_{n+1}(a_1, \dots, a_{n+1}) + 1.$$

Доказательство. Рассмотрим каждую из континуант в левой части равенства как сумму мономов, отвечающим кодам Морзе на множествах $\{1, \dots, n\}$ и $\{2, \dots, n+1\}$ соответственно. Будем изображать эти коды Морзе на одном рисунке, только относящиеся к первому коду тире будем изображать пунктирными линиями, а ко второму — сплошными, как показано на рисунке ниже. Таким образом, пунктирные тире могут стоять на всех возможных

местах, кроме последнего, а сплошные — на всех, кроме первого. Таким образом, левая часть равна сумме мономов, полученным по всевозможным парам кодов Морзе с такими условиями.



Рис. 2.1. Пара кодов Морзе

Сделаем то же для произведения континуант в правой части: каждое произведение мономов из $V_{n-1}(a_2, \dots, a_n)$ и $V_{n+1}(a_1, \dots, a_{n+1})$ можно интерпретировать как пару кодов Морзе на множестве $\{1, \dots, n + 1\}$ — причем первый код (будем его обозначать пунктирными тире) не может иметь тире на первой и последней позициях, а на второй (обозначим его сплошными тире) никаких ограничений не накладывается.

Рассмотрим какую-либо конфигурацию (c_1, c_2) , где c_1 и c_2 — коды Морзе на $\{1, \dots, n\}$ и $\{2, \dots, n + 1\}$ соответственно. Ей отвечает моном $w(c_1)w(c_2)$ из левой части равенства. Построим по ней новую конфигурацию (c'_1, c'_2) , где c'_1 будет кодом Морзе на $\{1, \dots, n + 1\}$, а c'_2 — кодом на $\{2, \dots, n\}$.

Если между 1 и 2 в коде c_1 нет (пунктирного) тире, то c_1 можно рассматривать как код на вершинах $2, \dots, n$. В то же время код из сплошных тире c_2 можно рассматривать как код на вершинах $1, \dots, n + 1$, у которого на первом месте нет тире. В таком случае положим $(c'_1, c'_2) = (c_1, c_2)$.

Пусть теперь вершины 1 и 2 соединены входящим в код c_1 пунктирным тире. Поскольку в код c_2 входят вершины, начинающиеся со 2-й, то между вершинами 1 и 2 нет сплошного тире. Построим по паре кодов (c_1, c_2) пару кодов (c'_1, c'_2) следующим образом: рассмотрим путь, выходящий из 1-й вершины и состоящий из пунктирных и сплошных тире. Ясно, что они могут только чередоваться. Заменяем в нем каждое пунктирное тире на сплошное, а сплошное на пунктирное. Мы получим новую пару кодов (c'_1, c'_2) , у которой на первом месте стоит сплошное тире и нет пунктирного. Эта пара будет иметь тот же вес, что и (c_1, c_2) .

На рис. 2.2 показана пара кодов, которые получаются такой операцией из изображенных на рис. 2.1.



Рис. 2.2. Результат применения инволюции к паре кодов Морзе

При этом пара (c'_1, c'_2) будет «почти всегда» отвечать моному из правой части. Далее, эту процедуру «почти всегда» можно обратить: по «почти» каждой паре кодов (c'_1, c'_2) можно единственным образом восстановить ту пару (c_1, c_2) , по которой она построена, причем веса этих пар будут равны.

Осталось разобраться с тем, что значат слова «почти всегда». Здесь нужно будет рассмотреть два случая: когда n четно и когда оно нечетно.

Пусть n четно. Тогда единственная конфигурация (c_1, c_2) , для которой описанная процедура не сработает (т.е. подходящего монома в правой части не найдется), будет иметь следующий вид:



В ней все вершины будут соединены чередующимися пунктирными и сплошными тире, причем и первое, и последнее тире будут пунктирными (число вершин четно, значит, число тире между ними нечетно), а вес конфигурации (c_1, c_2) будет равен $(-1)^{n-1} = -1$. Поэтому произведение континуант в левой части равенства будет на 1 меньше, чем произведение континуант в правой части.

Если же, напротив, число вершин нечетно, то у каждой конфигурации (c_1, c_2) будет единственным образом (c'_1, c'_2) — и найдется ровно одна конфигурация из правой части, у

которой не будет прообраза. Она изображена ниже:

$$\circ - - - \circ \text{ — } \circ - - - \circ \text{ — } \circ$$

В таком случае произведение континуант в правой части будет опять-таки на 1 больше, чем произведение континуант в левой части. \square

2.4. Целочисленность фриз. Полученные результаты можно подытожить в виде следующей теоремы.

Теорема 2.7. *Элемент $(n + 1)$ -й строки фриза, над которым во второй строке стоят числа a_1, \dots, a_n , равняется континуанте $V_n(a_1, \dots, a_n)$.*

Эта теорема немедленно объясняет отмеченный нами выше «феномен целочисленности»: все элементы фриза с целочисленной второй строкой (a_1, a_2, \dots) оказываются целыми числами, хотя, казалось бы, чтобы их вычислить, приходится совершать деление.

Следствие 2.8. *Фриз, элементы второй строки которого являются целыми положительными числами, является целочисленным.*

Действительно, континуанта — это многочлен от (a_1, a_2, \dots) с целыми коэффициентами.

2.5. Восстановление второй строки по диагонали. Итак, мы нашли способ вычислять диагональ фриза, зная вторую строку: это делается с помощью континуанты. Решим теперь обратную задачу: найдем (в обозначениях §2.1) вторую строку a_1, \dots, a_n , зная диагональ v_2, \dots, v_{n-1} .

Это непосредственно следует из рекуррентного соотношения для континуант. Следующая теорема — просто переформулировка предложения 2.4.

Теорема 2.9. *Пусть $a_1, a_2, a_3 \dots$ — вторая строка фриза, а $v_1 = a_1, v_2, v_3 \dots$ — его диагональ. Тогда имеют место равенства*

$$a_k = \frac{v_{k-2} + v_k}{v_{k-1}}.$$

(Напомним, что мы формально полагаем $v_0 = 1, v_{-1} = 0$ — тогда эта формула применима при любых $k > 0$).

Иногда эту теорему полезно формулировать в таком виде:

Следствие 2.10. *Последовательность v_k является решением разностного уравнения («уравнения Хилла» или «дискретного уравнения Штурма-Лиувилля»)*

$$V_k = a_k V_{k-1} - V_{k-2},$$

где a_1, a_2, \dots — коэффициенты, V_1, V_2, \dots — неизвестные.

2.6. Периодичность и скользящая симметрия. Рассмотрим фриз порядка n . Напомним, что такой фриз состоит из $n - 1$ строки; последняя его строка состоит из единиц, а «следующая за последней», то есть n -я, состоит из нулей. Таким образом, для его диагонали $1, v_1, \dots, v_{n-1}$ имеют место равенства

$$v_{n-2} = 1; \quad v_{n-1} = 0.$$

Запишем последнее из рекуррентных соотношений. Оно имеет вид

$$v_{n-1} = a_{n-1} v_{n-2} - v_{n-3},$$

т.е.

$$v_{n-3} = a_{n-1}.$$

Итак, мы получаем, что предпоследний ненулевой элемент диагонали V_{n-3} равняется элементу a_{n-1} из второй строки. Аналогично следующий за ним в строке элемент равняется

элементу a_n . Получается, что предпоследняя ненулевая строка фриза совпадает со второй, сдвинутой на $n/2$ позиций, и фриз имеет вид

$$(3) \quad \begin{array}{cccccccc} \dots & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \dots \\ & \dots & a_1 & & a_2 & & a_3 & & a_4 & \dots \\ & & \dots & v_2 & & \dots & & & & & \\ & & & \dots & v_3 & & \dots & & & & \\ & & & & \dots & \dots & \dots & & & & \\ & & & & & \dots & a_{n-1} & & a_n & & \dots \\ & & & & & \dots & 1 & & 1 & & \dots \\ & & & & & \dots & 1 & & 1 & & \dots \end{array}$$

А значит, из условия унимодулярности получается, что фриз можно строить не от второй строки вниз, а от предпоследней — вверх, и результат будет тем же.

Следствие 2.11. *Фриз порядка n обладает скользящей симметрией: его k -я строка, сдвинутая на $n/2$ позиций, совпадает с $(n - k)$ -й строкой.*

Следствие 2.12. *Фриз порядка n является периодичным с периодом n .*

Доказательство. Сдвиг фриза на n является результатом применения двух скользящих симметрий со сдвигом на $n/2$. □

Упражнение 2.13. Каким тождествам на континуанты эквивалентна симметричность фриза?

В оставшейся части этой главы рассказывается о связи континуант с определителями и объясняются некоторые альтернативные способы получения результатов, о которых шла речь выше. Читатель может пропустить эту часть без ущерба для понимания всего остального текста.

2.7. Детерминантное выражение для континуант. Для континуант имеется еще одно полезное выражение: континуанта порядка n выражается как определитель трехдиагональной матрицы того же порядка.

Предложение 2.14. *Имеет место равенство*

$$V_n(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a_2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_n \end{vmatrix}.$$

Доказательство. Докажем это равенство по индукции. База при $n = 0$ и $n = 1$ очевидна. А разложив определитель из правой части равенства по первой строке, мы получим в точности рекуррентное соотношение (2). □

Из этого представления для континуант также можно получить условие унимодулярности. Для этого нам потребуется матричное тождество, известное как *тождество Льюиса Кэрролла*³.

³Lewis Carroll (Charles Lutwidge Dodgson, 1832–1898) — английский математик, писатель и фотограф, автор книг «Алиса в Стране Чудес» и «Алиса в Зазеркалье». Упомянутое тождество использовалось в его работе 1865 г., однако было получено раньше, в работах Деснано и Якоби.

2.8. Тождество Льюиса Кэрролла. Пусть $A = (a_{ij})$ — произвольная матрица порядка n . Обозначим через M ее определитель; кроме того, обозначим через $M_{i_1, \dots, i_k}^{j_1, \dots, j_k}$ ее минор порядка $n - k$, полученный вычеркиванием из A строк с номерами i_1, \dots, i_k и столбцов с номерами j_1, \dots, j_k . Тождество Льюиса Кэрролла устанавливает связь между M и минорами порядка $n - 1$ и $n - 2$:

Теорема 2.15 (тождество Льюиса Кэрролла). *Имеет место равенство*

$$M \cdot M_{1,n}^{1,n} = M_1^1 \cdot M_n^n - M_n^1 \cdot M_1^n.$$

Мы не будем приводить здесь доказательства этого тождества; читатель может придумать его самостоятельно или найти в литературе. Отметим комбинаторное доказательство Д. Зельбергера [8]; оно идейно близко приведенному выше доказательству теоремы 2.6. Оно также воспроизведено в брошюре [12].

2.9. Вычисление континуанты. Вычислим определитель $M = V_n(a_1, \dots, a_n)$ с помощью тождества Льюиса Кэрролла. Замечательное свойство континуанты состоит в том, что участвующие в тождестве Льюиса Кэрролла миноры будут либо континуантами меньшего порядка, либо единицами:

$$M_1^1 = V_{n-1}(a_2, \dots, a_n); \quad M_n^n = V_{n-1}(a_1, \dots, a_{n-1}); \quad M_{1,n}^{1,n} = V_{n-2}(a_2, \dots, a_{n-1});$$

наконец, M_1^n и M_n^1 равны 1 как верхне- и нижнетреугольная матрица с единицами на диагонали соответственно. Поэтому тождество Льюиса Кэрролла переписывается в виде:

$$V_n(a_1, \dots, a_n) \cdot V_{n-2}(a_2, \dots, a_{n-1}) = V_{n-1}(a_1, \dots, a_{n-1}) \cdot V_{n-1}(a_2, \dots, a_n) - 1.$$

Иначе говоря,

$$(4) \quad 1 = V_n(a_1, \dots, a_n) \cdot V_{n-2}(a_2, \dots, a_{n-1}) - V_{n-1}(a_1, \dots, a_{n-1}) \cdot V_{n-1}(a_2, \dots, a_n) = \\ = \begin{vmatrix} V_{n-1}(a_1, \dots, a_{n-1}) & V_{n-2}(a_2, \dots, a_{n-1}) \\ V_n(a_1, \dots, a_n) & V_{n-1}(a_2, \dots, a_n) \end{vmatrix}.$$

Это и есть условие унимодулярности. Мы получили еще одно доказательство теоремы 2.6.

3. ЦЕЛОЧИСЛЕННЫЕ ФРИЗЫ

3.1. Сущность целочисленного фриза. В этой главе мы опишем все фризы, состоящие исключительно из целых элементов.

Будем называть *сущностью* (quiddity) фриза его вторую строку (a_1, \dots, a_n) . Очевидно, она не может содержать двух единиц подряд — это противоречило бы унимодулярности. Однако оказывается, что хотя бы одна единица в этой строке обязательно должна быть.

Предложение 3.1. *Вторая строка целочисленного фриза обязательно содержит 1.*

Доказательство. Предположим, что это не так, и что найдется фриз, все элементы во второй строке которого отличны от 1: $a_k \geq 2$. Тогда для элементов его (скажем, первой) диагонали имеет место неравенство

$$v_k = a_k v_{k-1} - v_{k-2} \geq 2v_{k-1} - v_{k-2},$$

откуда

$$v_k - v_{k-1} \geq v_{k-1} - v_{k-2}.$$

Но это верно для всех k . Стало быть,

$$v_k - v_{k-1} \geq v_{k-1} - v_{k-2} \geq \dots \geq v_2 - v_1 = a_2 - 1 \geq 1,$$

то есть последовательность v_k строго возрастающая. Это противоречит тому, что в какой-то момент она в силу замкнутости фриза должна принять значение 1 (и тем более 0). \square

Следующая лемма позволит нам делать из данного целочисленного фриза порядка n новый фриз порядка $n + 1$.

Лемма 3.2. *Пусть (a_1, \dots, a_n) — сущность целочисленного фриза порядка n , и $1 \leq k \leq n$. Тогда:*

- (1) *набор $(a_1, \dots, a_{k-1} + 1, 1, a_k + 1, a_{k+1}, \dots, a_n)$ является сущностью целочисленного фриза порядка $n + 1$;*
- (2) *если $1, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ — первая диагональ исходного фриза, и $v_1 = a_1$, то соответствующая диагональ нового фриза имеет вид*

$$1, v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_{k-1} + v_k, v_k, \dots, v_{n-2}.$$

Доказательство. Начнем с доказательства пункта (2). Посмотрим, как будет устроена первая диагональ нового фриза: обозначим ее через $1, w_1, \dots, w_{n-1}$.

Ясно, что при $i \leq k - 2$ диагонали этих двух фризов совпадают: $w_i = v_i$. При этом на $(k - 1)$ -м месте нового фриза будет стоять

$$w_{k-1} = (a_{k-1} + 1)v_{k-2} - v_{k-3} = v_{k-1} + v_{k-2}.$$

Далее,

$$w_k = w_{k-1} - w_{k-2} = v_{k-1} + v_{k-2} - v_{k-2} = v_{k-1}.$$

Следующий элемент диагонали будет равен

$$w_{k+1} = (a_k + 1)w_k - w_{k-1} = (a_k + 1)v_{k-1} - v_{k-1} - v_{k-2} = a_k v_{k-1} - v_{k-2} = v_k.$$

При всех $j > k + 1$ будет иметь место равенство $w_j = v_{j-1}$. В частности, $(n - 2)$ -й и $(n - 1)$ -й члены этой последовательности будут равны 1 и 0, соответственно, то есть фриз оборвется — а диагональ будет содержать n положительных элементов. То же самое рассуждение применимо и к любой другой диагонали. Стало быть, в результате такой вставки получится целочисленный фриз на единицу большего порядка. Часть (1) также доказана. \square

Замечание 3.3. Эта конструкция очевидным образом является обратимой: если $(\dots, b_{k-1}, 1, b_{k+1}, \dots)$ — сущность целочисленного фриза, то и $(\dots, b_{k-1} - 1, b_{k+1} - 1, \dots)$ будет сущностью фриза на единицу меньшего порядка (обратите внимание, что в силу отсутствия двух единиц подряд оба числа $b_{k-1} - 1$ и $b_{k+1} - 1$ положительны).

3.2. Фризы и триангуляции. Рассмотрим выпуклый n -угольник с пронумерованными вершинами. Его *триангуляцией* будем называть его разбиение на треугольники с помощью диагоналей, не пересекающихся нигде, кроме вершин.

Замечание 3.4. Число триангуляций n -угольника называется $(n - 2)$ -м *числом Каталана* (это одно из их многочисленных эквивалентных определений). Для них справедлива формула $C(n) = \frac{1}{n-1} \binom{2n-4}{n-2}$ (см., например, [11]).

Рассмотрим произвольную триангуляцию n -угольника. Ей можно сопоставить набор чисел (c_1, \dots, c_n) , где c_i — число треугольников, сходящихся в n -й вершине. Будем называть такой набор *сущностью триангуляции*. Триангуляция однозначно восстанавливается по своей сущности (почему?).

Теорема 3.5 (Дж. Конвей, Д. Кокстер). *Набор (c_1, \dots, c_n) , построенный по триангуляции n -угольника, является сущностью целочисленного фриза порядка n ; это отображение устанавливает биекцию между триангуляциями n -угольника и целочисленными фризами n -го порядка.*

Доказательство. Будем доказывать эту теорему по индукции по n . База $n = 3$ очевидна: имеется лишь одна триангуляция треугольника и единственный фриз 3-го порядка с сущностью $(1, 1, 1)$. (Читатель, которого это не убеждает, может начать с $n = 4$).

Рассмотрим некоторую триангуляцию n -угольника. Выберем в ней «ухо» — вершину, примыкающую к единственному треугольнику (в силу принципа Дирихле таких вершин не менее двух). Пусть эта вершина имеет номер k , а в вершинах $k - 1$ и $k + 1$ сходятся b_{k-1} и b_{k+1} треугольников соответственно. Таким образом, сущность этой триангуляции имеет вид $(\dots, b_{k-1}, 1, b_{k+1}, \dots)$. Выбросим треугольник, примыкающий к k -й вершине, из этой триангуляции, получим триангуляцию $(n - 1)$ -угольника, сущность которой равна $(\dots, b_{k-1} - 1, b_{k+1} - 1, \dots)$. Эта триангуляция, по предположению индукции, определяет фриз с той же сущностью. Но по лемме 3.2, тогда и набор $(\dots, b_{k-1}, 1, b_{k+1}, \dots)$ определяет целочисленный фриз.

Биективность полученного соответствия следует из замечания 3.3: из сущности каждого фриза порядка n можно удалить единицу, сведя дело к фризу на единицу меньшего порядка. \square

3.3. Восстановление фриза по триангуляции. Наша ближайшая цель — описать комбинаторный смысл элементов фриза, получаемого по заданной триангуляции. Теорема Конвея–Кокстера утверждает, что каждый элемент второй строки фриза — это количество треугольников, сходящихся при соответствующей вершине триангуляции. А как восстановить остальные элементы фриза?

Пусть дан целочисленный фриз, который мы будем обозначать в соответствии с формулой (3) со с. 11: его вторая строка равна (a_1, a_2, \dots, a_n) , а через $v_0 = 1, v_1, v_2, \dots, v_{n-2}$ обозначены элементы диагонали, начинающейся в a_1 , т.е. $v_1 = a_1$. Удобно также считать, что $v_{-1} = 0$.

Рассмотрим триангуляцию n -угольника, вершины которого пронумерованы числами от 1 до n , с сущностью (a_1, \dots, a_n) . По ней можно восстановить (v_0, v_1, v_2, \dots) посредством следующего алгоритма:

- напишем в вершинах 1 и 2 числа 0 и 1 соответственно;
- далее расставим числовые отметки во всех остальных вершинах многоугольника по такому правилу: для каждого треугольника, в двух вершинах которого уже стоят числа a и b , поставим в третьей его вершине число $a + b$.

Упражнение 3.6. Докажите, что во всех вершинах, соединенных с первой диагональю или стороной, будут написаны единицы.

Предложение 3.7. *Полученная по этому алгоритму отметка в i -й вершине будет равна элементу v_{i-2} диагонали фриза.*

Доказательство. Данной триангуляции n -угольника сопоставим двойственный граф на $n - 2$ вершинах: вершины его будут соответствовать треугольникам из триангуляции, причем две вершины будут соединены ребром, если у двух треугольников имеется общая сторона. Такой граф является деревом, валентности всех его вершин не превосходят трех, а висячие вершины отвечают «ушам» триангуляции.

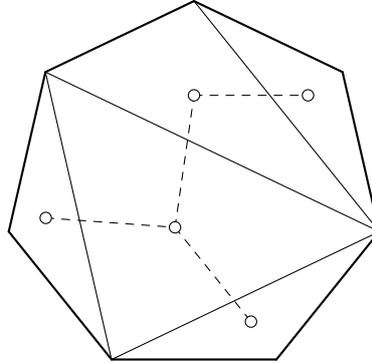


Рис. 3.1. Триангуляция и отвечающее ей дерево

Далее, запись чисел в вершинах треугольников в соответствии с нашим алгоритмом можно рассматривать как обход вершин дерева, отвечающего триангуляции: на первом шаге алгоритма мы берем треугольник, содержащий вершины 1 и 2, и записываем число в его третьей вершине (для первого шага это число будет единицей). Сделав это, отметим отвечающую этому треугольнику вершину дерева как посещенную.

На каждом следующем шаге мы рассматриваем какую-то вершину, смежную с уже посещенными; ей отвечает треугольник, в двух вершинах которого уже стоят какие-то числа. Записав в третьей вершине треугольника их сумму, отметим как посещенную вершину дерева, которая отвечает этому треугольнику.

Докажем наше предложение по индукции по n . База при $n = 3$ очевидна: мы получаем треугольник, в вершинах которого записаны 0, 1 и 1. Он отвечает единственному фризу порядка 3.

Индуктивный переход: пусть наше предложение доказано для всевозможных триангуляций n -угольника, а мы хотим доказать его для $(n + 1)$ -угольника. Посмотрим на последний шаг алгоритма; в его ходе мы обязаны посетить какую-то висячую вершину дерева триангуляции, т.е. добавить к триангуляции n -угольника «ухо». Пусть данный n -угольник имеет сущность (a_1, \dots, a_n) , а «ухо» на последнем шаге приклеивается к стороне $(k - 1, k)$. По предположению индукции, построенный в результате выполнения алгоритма набор отметок в вершинах (v_0, \dots, v_{n-1}) будет стоять на диагонали фриза с сущностью (a_1, \dots, a_n) . Далее, на последнем шаге между вершинами $k - 1$ и k будет добавлена вершина с отметкой $v_{k-1} + v_k$. При этом триангуляция $(n + 1)$ -угольника будет иметь сущность $(\dots, b_{k-1} + 1, 1, b_k + 1, \dots)$ — что согласуется с результатом леммы 3.2 об элементах фриза. Предложение доказано. \square

Упражнение 3.8. Рассмотрим триангуляцию n -угольника, все диагонали которой образуют зигзаг (иными словами, все элементы сущности этой триангуляции не превосходят 3). Докажите, что все элементы соответствующего фриза будут числами Фибоначчи.

Упражнение 3.9. Рассмотрим триангуляцию, в которой имеется вершина, где сходятся не менее 4 треугольников. Докажите, что соответствующий фриз содержит число 4.

3.4. Допустимые пути. Еще один способ вычисления элементов фриза, изложенный в работе [1], основан на подсчете числа так называемых допустимых путей.

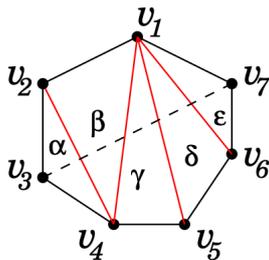
Определение 3.10. *Допустимым путем* из вершины $i - 1$ в вершину $j + 1$ называется упорядоченная последовательность попарно различных треугольников τ_i, \dots, τ_j , где треугольник τ_ℓ инцидентен вершине ℓ .

Предложение 3.11. Элемент фриза $V_{j-i+1}(a_i, \dots, a_j)$ равен числу допустимых путей из $i-1$ в $j+1$.

Мы не будем доказывать это предложение; читатель может попробовать восстановить доказательство сам или прочесть его в работе [1].

Замечание 3.12. Отметим, что путь из $(i-1)$ -й вершины в $(i+1)$ -ю по определению состоит из одного треугольника, проходящего через вершину i . Тогда число допустимых путей между этими вершинами есть просто a_i . Далее, путь из $(i-1)$ -й вершины в i -ю единственен: он состоит из нуля треугольников, поэтому $V_0 = 1$.

Пример 3.13. Рассмотрим следующую триангуляцию семиугольника.



Пусть $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ — входящие в нее треугольники. Перечислим все допустимые пути (τ_1, τ_2) между вершинами 7 и 3. Это будут

$$(\epsilon, \beta), (\epsilon, \alpha), (\delta, \beta), (\delta, \alpha), (\gamma, \beta), (\gamma, \alpha), (\beta, \alpha).$$

Это дает значение $V_2(a_1, a_2) = 7$. (Заметим, что в этом примере $a_1 = 4, a_2 = 2$).

Полезно отметить, что полученное значение не зависит от порядка вершин. Действительно, если (τ_1, τ_2) — допустимый путь из 7 в 3, то $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon\} \setminus \{\tau_1, \tau_2\}$ определяет допустимый путь из 3 в 7. Это соответствует скользящей симметрии фриза.

Замечание 3.14. Большинство результатов из этого раздела можно найти в двух работах Дж. Конвея и Д. Кокстера [2], [3]. Эти работы, опубликованные в двух последовательных номерах посвященного вопросам математического образования журнала *The Mathematical Gazette*, по форме представляют собой привычный ученикам математических классов листок с задачами: в первой статье ряд утверждений о фризах сформулирован в виде последовательности из примерно трех десятков задач, а во второй статье приводятся их решения или достаточно подробные указания.

4. ЦЕПНЫЕ ДРОБИ

В этой главе мы увидим, как континуанты, триангуляции многоугольников и фризы возникают в связи с классической задачей о разложении числа в цепную (или, как еще говорят, непрерывную) дробь.

4.1. Положительные и отрицательные цепные дроби. Пусть дана несократимая дробь r/s , большая единицы. Ее можно разложить в *цепную дробь*, выделив целую часть, а потом обратив дробную часть и применив к ней ту же процедуру:

$$\frac{r}{s} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\dots}}} = [a_1, a_2, a_3 \dots].$$

Здесь $a_i \geq 1$. Такое разложение почти однозначно: знаменатель последней дроби можно представить либо в виде a_i , либо как $(a_i - 1) + \frac{1}{1}$. Условимся выбирать одно из этих условий исходя из того правила, что в разложении рационального числа в цепную дробь всегда должно быть *четное* число компонент.

Это не единственный способ раскладывать число в цепную дробь: можно брать его целые части не с недостатком, а с *избытком*. Такое разложение мы будем называть *отрицательной цепной дробью*; иногда его также называют *цепной дробью Хирцебруха*⁴. «Обычную» цепную дробь мы, чтобы избежать путаницы, будем также именовать *положительной цепной дробью*.

При этом все компоненты отрицательной цепной дроби будут натуральными числами, не меньшими 2; такое разложение уже будет однозначно. Будем обозначать его двойными квадратными скобками.

$$\frac{r}{s} = c_1 - \frac{1}{c_2 - \frac{1}{c_3 - \frac{1}{\dots}}} = [[c_1, c_2, c_3 \dots]].$$

Пример 4.1. Ниже приведены два разложения числа $7/5$ в цепную дробь: положительную и отрицательную.

$$\begin{aligned} \frac{7}{5} &= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}} = [1, 2, 1, 1] \\ \frac{7}{5} &= 2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{3}} = [[2, 2, 3]] \end{aligned}$$

4.2. Подходящие дроби и континуанты. Каждое из разложений числа r/s — как в положительную, так и в отрицательную цепную дробь — можно оборвать на каком-либо из предыдущих шагов. Так будет получаться последовательность *подходящих дробей*, которые будут все лучше и лучше приближать r/s . Так, в нашем примере для разложения числа $7/5$ в положительную цепную дробь $[1, 2, 1, 1]$ подходящими дробями будут

$$1, \quad [1, 2] = \frac{3}{2}, \quad [1, 2, 1] = \frac{4}{3}, \quad [1, 2, 1, 1] = \frac{7}{5},$$

а для его же разложения в отрицательную — дроби

$$2, \quad [[2, 2]] = \frac{3}{2}, \quad [[2, 2, 3]] = \frac{7}{5}.$$

Нетрудно понять, какова связь между подходящими дробями и континуантами:

⁴Friedrich Hirzebruch (1927–2012) — немецкий математик, один из основателей Математического института им. Макса Планка в Бонне.

Предложение 4.2. Пусть $r/s = [[c_1, \dots, c_k]]$ — разложение рационального числа в отрицательную цепную дробь. Тогда i -я подходящая дробь равняется отношению континуант

$$[[c_1, c_2, \dots, c_i]] = \frac{V_i(c_1, \dots, c_i)}{V_{i-1}(c_2, \dots, c_i)}.$$

Упражнение 4.3. Докажите это предложение.

Кроме того, можно определить и аналоги континуант, которые будут отвечать разложениям в положительную цепную дробь. Определим *положительную континуанту* посредством рекуррентного правила: $K_0 = 1$, $K_1(a_1) = a_1$,

$$K_n(a_1, \dots, a_n) = a_1 K_{n-1}(a_2, \dots, a_n) + K_{n-2}(a_3, \dots, a_n).$$

Упражнение 4.4. Докажите, что j -я подходящая дробь к положительной цепной дроби $[a_1, \dots, a_m]$ равняется

$$[a_1, \dots, a_j] = \frac{K_j(a_1, \dots, a_j)}{K_{j-1}(a_2, \dots, a_j)}.$$

Упражнение 4.5. Сформулируйте и докажите аналог правила Эйлера (см. определение 2.2) для вычисления положительных континуант $K_n(a_1, \dots, a_n)$.

4.3. Отрицательные цепные дроби и фризы. В этом разделе установим связь между рациональными числами и триангуляциями многоугольника, удовлетворяющими некоторому дополнительному условию.

Напомним, что «ухом» триангуляции n -угольника называется треугольник, две стороны которого являются также сторонами исходного n -угольника. Рассмотрим множество $\mathbb{Q}_{\geq 1} \cup \{\frac{0}{1}, \frac{1}{0}\}$ несократимых дробей, больших 1, к которому добавлены еще два дополнительных элемента: $1/0$ и $0/1$, и установим биекцию между этим множеством и множеством триангуляций многоугольников с двумя «ушами».

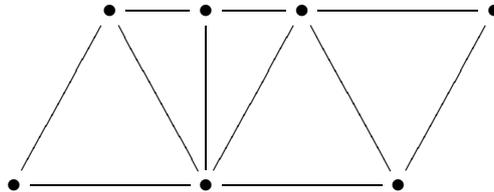
Кстати, дерево, отвечающее такой триангуляции, будет представлять собой цепочку последовательно соединенных между собой вершин⁵ — все они, кроме двух крайних, будут иметь степень 2.

Будем рисовать треугольники между двумя параллельными прямыми: основание у каждого треугольника будет на одной из прямых, а противоположная вершина на другой. Таким образом, треугольники бывают двух типов: одни направлены острием вверх, а другие острием вниз.

Рассмотрим триангуляцию многоугольника, у которого самая левая вершина на нижней прямой и самая правая вершина на верхней прямой являются «ушами», а в вершинах на верхней прямой сходятся $c_1, c_2, \dots, c_k, 1$ треугольников.

Упражнение 4.6. Докажите, что триангуляция однозначно восстанавливается по таким данным. Как восстановить число треугольников в триангуляции, зная c_1, \dots, c_k ?

Пример 4.7. На рисунке изображена триангуляция 7-угольника, отвечающая набору $(c_1, c_2, c_3) = (2, 2, 3)$.



Построенная таким образом триангуляция дает простой способ вычислить соответствующую ей дробь. А именно, введем на дробях операцию «суммы Фарея»: $\frac{r}{s} \oplus \frac{p}{q} = \frac{r+p}{q+s}$ (т.е. числитель складывается с числителем, а знаменатель со знаменателем⁶).

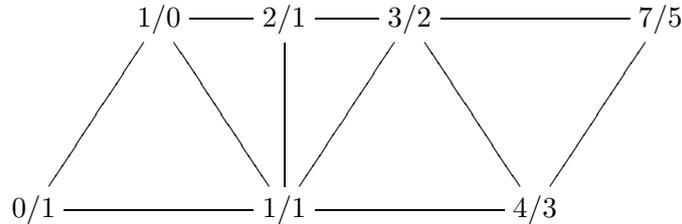
Следующая теорема описывает связь между триангуляциями и цепными дробями.

⁵Иногда такое дерево называют *бамбуком*.

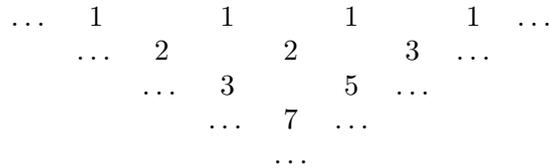
⁶Иногда сумму Фарея еще называют *медиантой* этих дробей.

Теорема 4.8. Рассмотрим триангуляцию с двумя «ушами», в верхней строке которой сходятся $c_1, c_2, \dots, c_k, c_{k+1} = 1$ треугольников. Разместим в левой верхней и левой нижней вершинах триангуляции числа $0/1$ и $1/0$ соответственно. Далее будем поочередно писать в вершинах триангуляции дроби по следующему правилу: для треугольника, в котором уже заполнены две вершины, в третьей вершине разместим сумму Фарея чисел, стоящих в этих двух вершинах. Тогда в последней вершине (отвечающей второму «уху» триангуляции) будет дробь, равная $[[c_1, \dots, c_k]]$.

Пример 4.9. Вот заполнение числами триангуляции из примера 4.7:



Возьмем фриз, отвечающий триангуляции из предыдущего примера. Он содержит следующий фрагмент:



На диагоналях стоят пары $(1, 0)$, $(2, 1)$, $(3, 2)$ и $(7, 5)$, которые в точности являются подходящими дробями к отрицательной цепной дроби числа $7/5$.

Доказательство теоремы 4.8. Рассмотрим фриз, отвечающий этой триангуляции — т.е. фриз, сущность которого содержит фрагмент $(c_1, c_2, \dots, c_k, 1, \dots)$. Числители и знаменатели дробей, которые складываются по Фарею при выполнении описанного в теореме алгоритма, будут образовывать две идущие подряд диагонали этого фриза, которые начинаются от c_1 и c_2 соответственно. Действительно, и числители, и знаменатели вычисляются в точности по правилу, описанному в разделе 3.3 — только в первом случае мы начинаем с пары $(0, 1)$, написанной на самой левой стороне, а во втором — с пары $(1, 0)$.

Но, как мы знаем, элементы фриза являются континуантами от элементов второй строки. Стало быть, i -й элемент первой диагонали при любом $i \leq k$ будет равен $V(c_1, \dots, c_i)$, а $(i - 1)$ -й элемент второй диагонали окажется равным $V(c_2, \dots, c_i)$. А согласно предложению 4.2, их отношение в точности равно i -й подходящей дроби $[[c_1, \dots, c_i]]$. Положив $i = k$, получаем требуемое утверждение. \square

4.4. Положительные цепные дроби и триангуляции. Оказывается, что по триангуляции с двумя «ушами» можно восстановить не только отрицательную, но и положительную цепную дробь. Для этого заметим, что в триангуляции, нарисованной между двумя прямыми, каждый треугольник направлен либо острием вверх (в частности, таков первый, самый левый треугольник), либо острием вниз (таков последний треугольник). Пусть наша триангуляция состоит из a_1 треугольников, направленных вверх, a_2 треугольников, смотрящих вниз, потом a_3 треугольников, смотрящих вниз, и т.д. Это другой способ задания триангуляции, альтернативный заданию сущностей вершин на верхней прямой.

В последнем разделе брошюры мы докажем, что число, отвечающее такой триангуляции, равно *положительной* цепной дроби $[a_1, \dots, a_{2m}]$. Тем самым мы получим следующую теорему, которая устанавливает связь между положительными и отрицательными цепными дробями для одного и того же числа.

Теорема 4.10. Пусть $[a_1, \dots, a_{2m}] = [[c_1, \dots, c_k]]$. Тогда

$$(c_1, \dots, c_k) = (a_1 + 1, \underbrace{2, \dots, 2}_{a_2-1}, a_3 + 2, \underbrace{2, \dots, 2}_{a_4-1}, \dots, a_{2m-1} + 2, \underbrace{2, \dots, 2}_{a_{2m}-1}).$$

5. ГРАФ ФАРЕЯ И ДЕЙСТВИЕ $SL_2(\mathbb{Z})$

В этом разделе мы установим связь между цепными дробями и элементами группы $SL_2(\mathbb{Z})$. Наше изложение будет очень близко следовать статье [5], которую мы рекомендуем изучить заинтересованному читателю. Я также благодарен её авторам за разрешение использовать приведенные ниже рисунки.

5.1. Граф Фарей. Рассмотрим множество рациональных чисел \mathbb{Q} , каждое из которых мы представляем себе как несократимую дробь r/s , и добавим к нему элемент $1/0$ («бесконечность»). Получим множество $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$.

Определим *граф Фарей* как бесконечный граф, вершинами которого являются элементы $\overline{\mathbb{Q}}$. Условимся, что две вершины p/q и r/s соединяются ребром тогда и только тогда, когда $ps - qr = \pm 1$.

Упражнение 5.1. Покажите, что всякий треугольник (три вершины, попарно соединенные ребрами) в графе Фарей имеет вид $(p/q, r/s, (p+q)/(r+s))$.

Граф Фарей удобно рисовать на гиперболической плоскости. Мы будем использовать для этого модель в верхней полуплоскости; вкратце напомним основные понятия, связанные с ней.

Пусть $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z > 0\}$ — множество комплексных чисел с положительной мнимой частью. Будем называть его *гиперболической плоскостью*. Вещественную прямую, пополненную точкой ∞ , будем называть *абсолютом*: ее можно воспринимать как множество «бесконечно удаленных точек» (или «асимптотических направлений») гиперболической плоскости. *Прямыми* на \mathbb{H} будем называть полуокружности с центром на абсолюте (т.е. перпендикулярные вещественной прямой) и вертикальные полупрямые с началом на абсолюте.

Поместим вершины графа Фарей на абсолют и изобразим каждое ребро прямой (именно прямой, а не отрезком!) на \mathbb{H} .

Упражнение 5.2. Покажите, что нарисованный таким образом на верхней полуплоскости граф «планарен»: его ребра пересекаются только в вершинах.

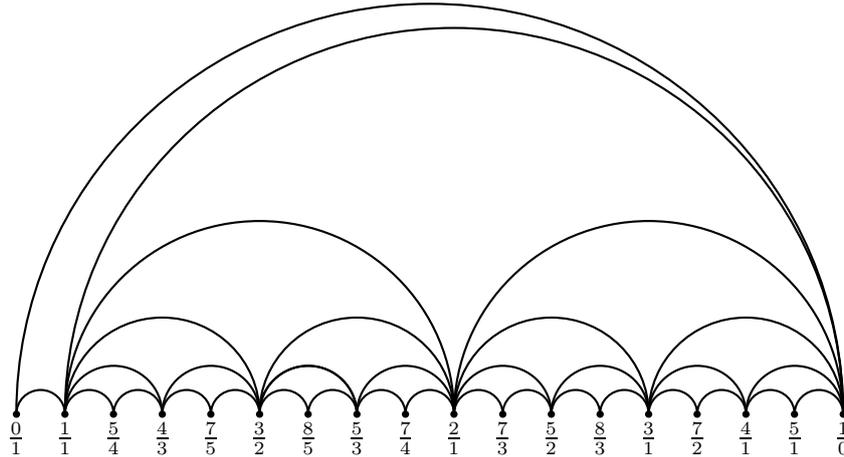


Рис. 5.1. Фрагмент графа Фарей

Тем самым граф Фарей разбивает всю плоскость на треугольники с вершинами на абсолюте. Триангуляцию многоугольника наподобие той, что мы рассматривали в примере 4.9, удобно представлять себе как подграф графа Фарей. Триангуляция, определяемая дробью r/s , получается как наименьший подграф в графе Фарей, содержащий вершины $0/1$, $1/0$ и r/s . Вот как это будет выглядеть для дроби $7/5$:

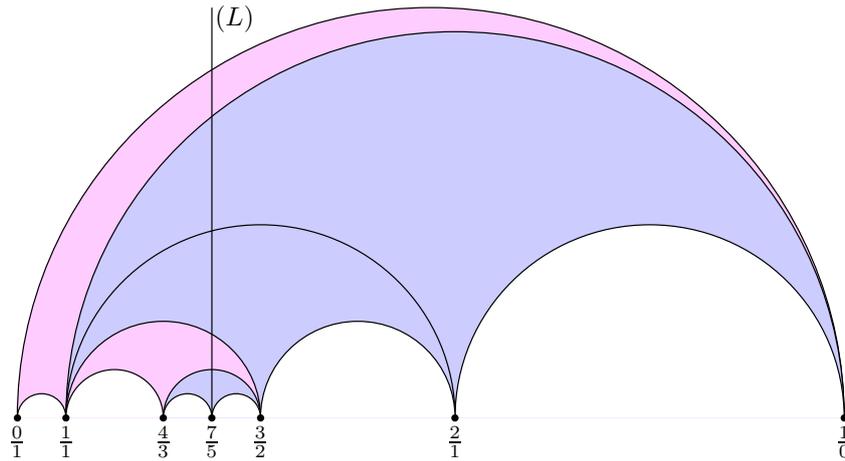


Рис. 5.2. Триангуляция, отвечающая дроби 7/5

Заметим, что треугольники, направленные вершиной вверх или вниз, превращаются в треугольники, вершина которых находится соответственно справа или слева от вертикальной прямой $y = 7/5$ (они изображены розовым и синим цветами соответственно). При этом последний треугольник (с вершиной в $7/5$) можно считать как розовым, так и синим.

5.2. Действие $PSL_2(\mathbb{Z})$ на \mathbb{H} . На комплексной плоскости можно определить действие дробно-линейных преобразований: $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$, где $ad - bc \neq 0$. Будем рассматривать дробно-линейные преобразования с вещественными коэффициентами. Это взаимно-однозначные отображения $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ на себя. Они, очевидно, сохраняют вещественную прямую. Значит, верхняя и нижняя полуплоскости по соображениям непрерывности либо сохраняются, либо меняются местами. Нетрудно показать (проделайте это!), что верхняя полуплоскость переходит в себя тогда и только тогда, когда $ad - bc > 0$. Поделив все коэффициенты в числителе и знаменателе на $\sqrt{ad - bc}$ (от чего преобразование не изменится), можно считать, что $ad - bc = 1$.

Далее, композиция дробно-линейных преобразований устроена так же, как произведение матриц 2×2 . Поэтому на верхней полуплоскости действует группа вещественных матриц 2×2 с единичным определителем. Эта группа обозначается через $SL_2(\mathbb{R})$.

Замечание 5.3. Минус единичная матрица $-I \in SL_2(\mathbb{R})$ действует на \mathbb{H} тривиально. Иначе говоря, две матрицы, отличающиеся друг от друга умножением на минус единичную (т.е. попросту знаком), действуют одинаково. Значит, их можно не различать. Так что можно говорить о действии факторгруппы $SL_2(\mathbb{R})/\{\pm I\}$. Эту группу принято обозначать через $PSL_2(\mathbb{R})$.

Нам потребуется еще меньшая группа: мы будем рассматривать дробно-линейные преобразования с *целыми* коэффициентами, то есть будем работать с группой $SL_2(\mathbb{Z})$. Действие этой группы на плоскости Лобачевского возникает во многих задачах, в особенности связанных с теорией чисел; см., например, главу VII замечательного учебника Ж.-П. Серра «Курс арифметики» [7].

5.3. Матрицы цепных дробей. Для работы с цепными дробями (как положительными, так и отрицательными) удобно использовать целочисленные матрицы 2×2 .

Рассмотрим рациональное число r/s и два его разложения:

$$\frac{r}{s} = [[c_1, \dots, c_k]] = [a_1, \dots, a_{2m}].$$

Сопоставим этим разложениям матрицы

$$M(c_1, \dots, c_k) := \begin{pmatrix} c_1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} c_k & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

и

$$M^+(a_1, \dots, a_{2m}) := \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_{2m} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обе эти матрицы лежат в $SL_2(\mathbb{Z})$. Действительно, в первом разложении определители всех сомножителей равны 1, а во втором каждый из них равняется -1 , но при этом их четное число.

Наша ближайшая цель будет состоять в том, чтобы сравнить эти две матрицы и научиться получать одну из другой. Отсюда, в частности, мы получим доказательство теоремы 4.10.

Связь матриц M и M^+ с соответствующей дробью r/s описывается следующим простым соотношением, доказательство которого мы оставляем читателю:

Упражнение 5.4. Имеют место равенства

$$M(c_1, \dots, c_k) = \begin{pmatrix} r & -r' \\ s & -s' \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad M^+(a_1, \dots, a_{2m}) = \begin{pmatrix} r & r'' \\ s & s'' \end{pmatrix},$$

где $r/s = [a_1, \dots, a_{2m}] = [[c_1, \dots, c_k]]$, а r'/s' и r''/s'' — предпоследние подходящие дроби: $r'/s' = [[c_1, \dots, c_{k-1}]]$ и $r''/s'' = [a_1, \dots, a_{2m-1}]$.

Замечание 5.5. Одно из преимуществ работы с матрицами, а не с цепными дробями состоит в том, что матрицы $M(c_1, \dots, c_k)$ и $M^+(a_1, \dots, a_{2m})$ оказываются более «универсальными»: они определены для любой последовательности коэффициентов, тогда как для цепных дробей это не так, т.к. некоторые знаменатели могут обращаться в нуль. В качестве примера рассмотрим следующую «цепную дробь»:

$$[[3, 1, 2, 1]] = 3 - \frac{1}{1 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{1}}}}.$$

Она не соответствует никакому рациональному числу, тогда как матрица $M(3, 1, 2, 2, 1)$ оказывается определена (вычислите её!).

Оказывается, матрицы M и M^+ , отвечающие одному и тому же рациональному числу, связаны очень простым соотношением:

Предложение 5.6. *Имеет место равенство*

$$M^+(a_1, \dots, a_{2m}) = M(c_1, \dots, c_k)R,$$

$$\text{где } R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Во-первых, первые столбцы матриц M^+ и M будут одинаковы в силу упражнения 5.4. Далее, рассмотрим триангуляцию многоугольника, отвечающую разложению числа r/s в цепную дробь. Вершины последнего треугольника в нем будут отмечены числами r'/s' , r/s и r''/s'' (в таком порядке). Значит, $r/s = r'/s' \oplus r''/s''$, откуда и следует требуемое соотношение. \square

Пример 5.7. Выбрав $r/s = 7/5$, мы получаем, что

$$M^+(1, 2, 1, 1) = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad M(2, 2, 3) = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

5.4. Выражение матриц цепных дробей через порождающие группы $SL_2(\mathbb{Z})$. Обозначим через R , L и S следующие матрицы:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Можно доказать (попробуйте сделать это самостоятельно или прочтите, например, в VII главе книги Ж.-П. Серра «Курс арифметики»), что любые две из этих трех матриц порождают группу $SL_2(\mathbb{Z})$.

Нетрудно выразить через эти образующие матрицы цепных дробей.

Предложение 5.8. Матрицы $M(c_1, \dots, c_k)$ и $M^+(a_1, \dots, a_{2m})$ допускают следующие разложения:

$$(5) \quad M^+(a_1, \dots, a_{2m}) = R^{a_1} L^{a_2} R^{a_3} L^{a_4} \dots R^{a_{2m-1}} L^{a_{2m}}$$

и

$$(6) \quad M(c_1, \dots, c_k) = R^{c_1} S R^{c_2} S \dots R^{c_k} S.$$

Доказательство. Формула (5) получается следующим простым вычислением:

$$\begin{pmatrix} a_i & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{i+1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i a_{i+1} + 1 & a_i \\ a_{i+1} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_{i+1} & 1 \end{pmatrix} = R^{a_i} L^{a_{i+1}}.$$

Формула (6) еще проще: она следует из равенства

$$\begin{pmatrix} c_i & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = R^{c_i} S.$$

□

Отсюда получается следующее предложение.

Предложение 5.9. Имеет место равенство

$$(7) \quad M^+(a_1, \dots, a_{2m}) = -M(a_1 + 1, \underbrace{2, \dots, 2}_{a_2-1}, a_3 + 2, \underbrace{2, \dots, 2}_{a_4-1}, \dots, a_{2m-1} + 2, \underbrace{2, \dots, 2}_{a_{2m}}, 1, 1).$$

Отметим, что если бы мы уже доказали теорему 4.10, то равенство (7) можно было бы получить из предложения 5.6. Однако мы будем действовать по-другому: докажем равенство (7), а из него уже выведем теорему 4.10.

Доказательство теоремы 4.10. Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 5.10. Имеют место равенства $R^a = -M(a + 1, 1, 1)$ и $L^a = -M(1, \underbrace{2, \dots, 2}_a, 1, 1)$.

Доказательство. Первое равенство проверяется непосредственно. Второе равенство следует из соотношения

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^a = \begin{pmatrix} a + 1 & -a \\ a & -(a - 1) \end{pmatrix},$$

которое нетрудно доказать по индукции. □

Доказательство предложения 5.9. Поскольку $M(1, 1, 1) = -I$, из леммы 5.10 следует, что

$$R^{a_i} L^{a_{i+1}} = -M(a_i + 1, \underbrace{2, \dots, 2}_{a_{i+1}}, 1, 1).$$

Тем самым предложение следует из соотношения (5) и простого равенства $M(2, 1, 1, a + 1) = -M(a + 2)$ (проверка которого оставляется читателю в качестве упражнения). Предложение доказано. □

Наконец, заметим, что последние три коэффициента в равенстве (7) — это $(2, 1, 1)$, поэтому от них можно избавиться с помощью равенства $M(2, 1, 1) = -R$. Тем самым мы получаем, что

$$(8) \quad M^+(a_1, \dots, a_{2m}) = -M(a_1 + 1, \underbrace{2, \dots, 2}_{a_2-1}, a_3 + 2, \underbrace{2, \dots, 2}_{a_4-1}, \dots, a_{2m-1} + 2, \underbrace{2, \dots, 2}_{a_{2m}-1})R.$$

Согласно предложению 5.6, первые столбцы матриц из правой и левой части равны $\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$. Это доказывает теорему 4.10. \square

5.5. Снова триангуляции и $3d$ -разрезания. В предыдущем разделе мы видели, что для некоторых наборов (c_1, \dots, c_k) целых положительных чисел матрица $M(c_1, \dots, c_k)$ оказывается равной $\pm I$. Возникает вопрос: а как описать все наборы, для которых это происходит?

Каждый такой набор можно интерпретировать как некоторое соотношение в группе $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ на ее образующие R и S . А именно, такой набор дает нам соотношение вида

$$R^{c_1} S R^{c_2} S \dots R^{c_k} S = \pm I.$$

Мы уже знаем частичный ответ на этот вопрос (достаточное условие):

Теорема 5.11. Пусть (c_1, \dots, c_k) — сущность триангуляции n -угольника. Тогда $M(c_1, \dots, c_n) = -I$.

Упражнение 5.12. Выведите эту теорему из теоремы 3.5.

Полный ответ на этот вопрос был получен совсем недавно, в 2018 году. Он принадлежит В. Ю. Овсиенко. Для того чтобы его сформулировать, определим сначала понятие $3d$ -разрезания выпуклого многоугольника.

Определение 5.13. $3d$ -разрезанием выпуклого n -угольника (с пронумерованными вершинами) называется его разрезание набором непересекающихся диагоналей на многоугольники, число сторон каждого из которых кратно 3. Сущностью разрезания n -угольника называется набор чисел (c_1, \dots, c_n) , где c_i — число многоугольников, сходящихся в i -й вершине.

Тем самым вместо триангуляций мы будем рассматривать разрезания n -угольника на треугольники, шестиугольники, девятиугольники и т.д. В отличие от случая триангуляций, $3d$ -разрезание n -угольника нельзя восстановить по его сущности:

Упражнение 5.14. Приведите пример двух различных $3d$ -разрезаний n -угольника с одинаковыми сущностями.

Указание. Достаточно взять $n = 8$.

Теорема 5.15 (В. Ю. Овсиенко, [6]). Равенство $M(c_1, \dots, c_n) = \pm I$ имеет место тогда и только тогда, когда (c_1, \dots, c_n) является сущностью некоторого $3d$ -разрезания n -угольника. При этом $M(c_1, \dots, c_n) = -I$, если число участвующих в разрезании многоугольников с четным числом сторон четно, и $M(c_1, \dots, c_n) = I$ в противном случае.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] D. Brolin, D. W. Crowe, and I. M. Isaacs. The geometry of frieze patterns. *Geometriae Dedicata*, 3:171–176, 1974.
- [2] John H Conway and Harold SM Coxeter. Triangulated polygons and frieze patterns. *The Mathematical Gazette*, 57(401):175–183, 1973.
- [3] John H Conway and HSM Coxeter. Triangulated polygons and frieze patterns (continued). *The Mathematical Gazette*, 57(401):175–183, 1973.
- [4] Sophie Morier-Genoud. Coxeter’s frieze patterns at the crossroads of algebra, geometry and combinatorics. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 47(6):895–938, 2015.
- [5] Sophie Morier-Genoud and Valentin Ovsienko. Farey boat: Continued fractions and triangulations, modular group and polygon dissections. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 121(2):91–136, 2019.
- [6] Valentin Ovsienko. Partitions of unity in $SL(2, \mathbb{Z})$, negative continued fractions, and dissections of polygons. *Res. Math. Sci.*, 5(2):Paper No. 21, 25, 2018.
- [7] Jean-Pierre Serre. *Cours d’arithmétique*, volume 2 of *Collection SUP: “Le Mathématicien”*. Presses Universitaires de France, Paris, 1970.
- [8] Doron Zeilberger. Dodgson’s determinant-evaluation rule proved by two-timing men and women. *The Electronic Journal of Combinatorics [electronic only]*, 4(2):Research–paper, 1997.
- [9] Мартин Гарднер. *Крестики–нолики*. М.: Мир, 1988.
- [10] Дж. Конвей. Числовые фризы. *Квант*, (3):69–70, 1991.
- [11] С. К. Ландо. *Введение в дискретную математику*. МЦНМО, 2012.
- [12] Е. Ю. Смирнов. *Три взгляда на ацтекский бриллиант*. МЦНМО, 2015.

Email address: esmirnov@hse.ru