

Кратные многообразия флагов

Е. Ю. Смирнов

Аннотация. Работа посвящена обзору основных результатов о кратных многообразиях флагов, т.е. многообразиях вида $G/P_1 \times \cdots \times G/P_r$. Мы приводим классификацию кратных многообразий флагов сложности 0 и 1 и излагаем результаты о комбинаторике и геометрии B -орбит и их замыканий в двойных комикровесовых многообразиях флагов. Также обсуждаются вопросы конечности числа G -орбит на кратном многообразии флагов и существования на нем открытой G -орбиты.

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Кратные многообразия флагов. Грассмановы многообразия и многообразия флагов впервые возникли в конце XIX века в работах Г. Грассмана, Ю. Плюккера, Г. Шуберта и других математиков. Эти многообразия являются однородными пространствами группы $G = \mathrm{GL}(V)$, где стабилизатором точки является параболическая подгруппа P . Также можно рассматривать однородные пространства G/P не только для $G = \mathrm{GL}(V)$, но и для произвольной связной редуктивной группы.

В настоящем обзоре мы рассматриваем свойства *кратных многообразий флагов*: это прямые произведения нескольких многообразий флагов, т.е. многообразия вида $G/P_1 \times \cdots \times G/P_r$ (если $r = 2$, они называются *двойными многообразиями флагов*). Каждое кратное многообразие флагов можно рассматривать как G -многообразие для диагонального действия группы G .

Особый интерес представляют *сферические кратные многообразия флагов*: так называются те из них, для которых алгебра полиномиальных функций на них как представление группы G раскладывается в сумму неприводимых представлений без кратностей. Иначе говоря, сферические многообразия — это такие G -многообразия, на которых борелевская подгруппа $B \subset G$ действует с открытой орбитой. Нетрудно убедиться, что если кратное многообразие флагов сферично, то количество сомножителей вида G/P не превосходит двух.

Date: 12 мая 2017 г.

Исследование финансировалось в рамках государственной поддержки ведущих университетов Российской Федерации "5-100".

1.2. Двойные многообразия флагов, унипотентные инварианты колец Кокса и задачи теории представлений. Интерес к сферическим кратным (в особенности двойным) многообразиям флагов связан с фундаментальными задачами теории представлений: с задачей о разложении на неприводимые слагаемые тензорного произведения представлений группы G и с задачей о ветвлении, т.е. о разложении неприводимого представления группы G на неприводимые представления редуکتивной подгруппы $H \subset G$.

Описание неприводимых представлений связной редуکتивной алгебраической группы G восходит к работам Г. Вейля. Они описываются доминантными весами. Существует большое количество формул для разложения тензорного произведения двух неприводимых G -модулей в прямую сумму неприводимых. В общем случае (для произвольной группы G) эта задача может быть решена с использованием формулы Вейля для характеров (см., например, [20]), однако недостатком этого универсального подхода является трудоемкость возникающих при этом вычислений. Так что для различных конкретных ситуаций имеются более явные подходы к решению этих задач: формула Стейнберга, формула Партасарати–Ранга Рао–Варадараджана [39] и др.

Кроме того, имеется ряд формул, использующий специфику конкретных групп. Первый и важнейший результат такого рода относится к представлениям группы типа A , т.е. группы $GL(n)$. Это *правило Литтлвуда–Ричардсона*, сформулированное в 1934 году [32] и доказанное М.-П. Шютценберже [49] лишь тремя десятилетиями позже (с тех пор был получен ряд новых, более простых доказательств, например, [28], [14] и др.). Его основная отличительная особенность — это явное (хотя и довольно замысловатое) комбинаторное описание неприводимых компонент, входящих в разложение пары представлений. Важным (и самым простым) частным случаем правила Литтлвуда–Ричардсона является *правило Пьерри*: оно описывает ситуацию, когда одно из представлений является симметрической или внешней степенью тавтологического представления $GL(n)$. Также имеется принадлежащее П. Литтльману [30] обобщение правила Литтлвуда–Ричардсона на случай других групп.

Двойные многообразия флагов возникают в связи с еще одним подходом к задаче о разложении тензорного произведения представлений. Этот подход основан на геометрической реализации неприводимых представлений в пространствах сечений линейных расслоений над многообразиями флагов.

По теореме Бореля–Вейля, всякий неприводимый G -модуль реализуется как пространство сечений $H^0(G/P, \mathcal{L})$ некоторого линейного расслоения \mathcal{L} над многообразием G/P . Тензорное произведение пространств сечений $H^0(G/P, \mathcal{L}) \otimes H^0(G/Q, \mathcal{M})$ можно рассматривать как пространство сечений $H^0(G/P \times G/Q, \mathcal{L} \boxtimes \mathcal{M})$ линейного расслоения $\mathcal{L} \boxtimes \mathcal{M}$ над прямым произведением $G/P \times G/Q$. Здесь $\mathcal{L} \boxtimes \mathcal{M}$ — линейное расслоение, слоями которого являются тензорные произведения слоев над соответствующими точками: $(\mathcal{L} \boxtimes \mathcal{M})_{(x,y)} = \mathcal{L}_x \otimes \mathcal{M}_y$, где $x \in G/P$, $y \in G/Q$.

Если многообразие $X = G/P \times G/Q$ имеет сложность 0 (т.е. сферично) или 1, то существует эффективный способ разложения пространства сечений в прямую сумму неприводимых G -модулей, который описывается ниже в разделе 3.3. В связи с этим возникает вопрос о классификации всех двойных многообразий флагов сложности 0 и 1.

Впервые сферические двойные многообразия флагов были рассмотрены в связи с задачей о разложении тензорных произведений в работе П. Литтельмана [31]. Им были классифицированы все сферические многообразия вида $G/P \times G/Q$, где P, Q — *максимальные* параболические подгруппы в G . В работе Д. И. Панюшева [38] для всех многообразий $G/P \times G/Q$, где P, Q максимальны, была вычислена их сложность. Классификация двойных сферических многообразий флагов без условия максимальной принадлежности Дж. Стембриджу [54]. Наконец, в работе Е. В. Пономаревой [41] при помощи единого метода была получена полная классификация двойных многообразий флагов сложности 0 и 1, обобщающая все эти результаты. Далее в разделе 3.1 приводится эта классификация, а в разделе 3.3 дается описание разложения пространств сечений линейных расслоений над двойными многообразиями флагов сложности 0 и 1.

Удобным инструментом для решения задачи ветвления является понятие *кольца Кокса* двойного многообразия флагов. Рассмотрим прямую сумму $R(X) = \bigoplus H^0(X, \mathcal{L})$ пространств сечений линейных расслоений многообразия X ; при некоторых ограничениях на X на этом пространстве можно ввести структуру кольца, называемого *кольцом Кокса* многообразия X (это кольцо можно рассматривать как аналог кольца функций $\mathbb{C}[X]$ на алгебраическом многообразии X). Задача разложения пространств $H^0(X, \mathcal{L})$ на неприводимые G -модули сводится к описанию алгебры R^U унитарных инвариантов кольца Кокса, где $U \subset B$ — максимальная унитарная подгруппа.

Тем самым представляет интерес описание алгебр унитарных инвариантов колец Кокса двойных многообразий флагов X . Как было показано П. Литтельманом [31], в случае, когда X имеет сложность 0, эта алгебра оказывается свободной. В случае, когда

X имеет сложность 1, эта алгебра оказывается либо свободной, либо фактором свободной алгебры по единственному соотношению (т.е. гиперповерхностью); Д. И. Панюшевым [38] это было показано для случая, когда $X = G/P \times G/Q$, где P и Q — максимальные параболические подгруппы; общий случай был разобран в работах Е. В. Пономаревой [42] и [43]. Эти результаты мы излагаем в разделе 3.4.

1.3. Геометрия B -орбит сферических двойных многообразий флагов. Далее в разделе 4 мы изучаем геометрические и комбинаторные свойства орбит борелевской подгруппы, действующей на сферическом двойном многообразии флагов, и их замыканий. Эти орбиты и их замыкания представляют собой непосредственные аналоги клеток и многообразий Шуберта в многообразиях G/P .

Комбинаторное описание множества этих орбит для случая, когда группа G имеет тип A (т.е. $G = \mathrm{GL}(n)$), а кратное многообразие флагов — это прямое произведение двух грассманианов $\mathrm{Gr}(k, V) \times \mathrm{Gr}(l, V)$, было получено в работе [51]. В этом случае орбиты параметризуются парой диаграмм Юнга и инволютивной перестановкой некоторого специального вида. Также были построены разрешения особенностей замыканий B -орбит, аналогичные разрешениям Ботта–Самельсона многообразий Шуберта.

Геометрия B -орбит двойных комикровесовых многообразий флагов изучалась в работе П. Ахингера и Н. Перрена [1]; обобщая результаты из [51], они показали, что замыкания B -орбит в этих многообразиях нормальны и обладают рациональными особенностями (для поля характеристики 0).

1.4. Кратные многообразия флагов с конечным числом G -орбит. Сферичность многообразия X , т.е. конечность числа B -орбит на этом многообразии, равносильна конечности числа орбит группы G на произведении $X \times G/B$ (между B -орбитами на первом многообразии и G -орбитами на втором имеется очевидная биекция). Итак, каждое сферическое двойное многообразие флагов $G/P_1 \times G/P_2$ дает нам тройное многообразие флагов $G/P_1 \times G/P_2 \times G/B$ с конечным числом G -орбит. Возникает естественный вопрос, обобщающий вопрос о классификации сферических кратных многообразий флагов: на каких кратных многообразиях флагов группа G действует с конечным числом орбит? Этому вопросу посвящен раздел 5. Классификация таких кратных многообразий флагов была получена П. Мадьяром, Е. Вейманом и А. В. Зелевинским с помощью методов теории представлений в случае, когда группа G есть $\mathrm{GL}(V)$ или $\mathrm{Sp}(V)$; ими же были получены комбинаторное описание G -орбит и некоторые результаты об их примыканиях.

1.5. Кратные многообразия флагов с открытой орбитой. Из конечности числа G -орбит на кратном многообразии флагов X следует, в частности, что одна из орбит открыта в X . Обратное, вообще говоря, неверно. Возникает вопрос об описании всех кратных многообразий флагов с открытой G -орбитой. Его мы рассматриваем в разделе 6. В. Л. Попов классифицировал все кратные многообразия флагов вида $(G/P)^r$ (т.е. произведения нескольких копий одного и того же многообразия флагов), где P — максимальная параболическая подгруппа. Наличие открытой G -орбиты на таком многообразии означает, что группа G действует на наборах из r точек общего положения на многообразии G/P транзитивно. Эти результаты были обобщены Р. А. Девятовым на случай, когда P — параболическая подгруппа, не являющаяся максимальной (в случае, когда тип группы G отличен от A). Наконец, недавно И. Джошкунум, М. Хадианом и Д. В. Захаровым было получено описание кратных многообразий флагов вида $G/P_1 \times \cdots \times G/P_r$ с открытой G -орбитой для случая, когда G имеет тип A , а подгруппы P_i максимальны (т.е. многообразие является произведением грассманианов).

Обозначения и соглашения. Будем считать, что основное поле — это поле комплексных чисел \mathbb{C} .

Пусть G — связная редуктивная алгебраическая группа над полем \mathbb{C} . Фиксируем в ней *борелевскую подгруппу* $B \subset G$ (т.е. максимальную связную разрешимую подгруппу) и *максимальный тор* $T \subset B$. Унипотентный радикал группы B будет обозначаться через U ; таким образом, $B \cong U \ltimes T$.

Система корней, связанная с тройкой $T \subset B \subset G$, будет обозначаться через R . Положительные и отрицательные корни обозначим через R^+ и R^- соответственно. Группа Вейля системы корней R будет обозначаться через $W \cong N(T)/T$. Система простых корней, отвечающая тройке (T, B, G) , будет обозначаться через $\Delta \subset R^+$; при рассмотрении систем простых корней для простых алгебраических групп корни будут обозначаться через $\alpha_1, \dots, \alpha_r$, где $r = |\Delta|$. Фундаментальные веса, двойственные к корням, обозначаются через $\omega_1, \dots, \omega_n$. Нумерация корней приводится в соответствии с [7].

Решетка весов группы G обозначается через Λ , множество доминантных весов — через Λ^+ . Для доминантного веса λ неприводимое представление группы G со старшим весом λ мы будем обозначать через V_λ .

Структура работы. Раздел 2 посвящен изложению предварительных сведений о многообразиях флагов: мы приводим определения разложения Шуберта, порядка Брюа, формулируем теорему

Бореля–Вейля–Ботта и даем несколько эквивалентных определений сферического многообразия. В разделе 3 приводится классификация сферических двойных многообразий флагов, двойных многообразий флагов степени 1 и обсуждается связь этих задач с задачей разложения тензорных произведений неприводимых G -модулей. Раздел 4 посвящен изучению комбинаторных и геометрических свойств орбит борелевской подгруппы на сферическом двойном многообразии флагов и их замыканий. В разделе 5 обсуждается обобщение предыдущего вопроса: в нем исследуются ситуации, когда число G -орбит на кратном многообразии флагов конечно. Наконец, в разделе 6 излагаются результаты о кратных многообразиях флагов с открытой G -орбитой.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

2.1. Многообразия флагов. Пусть G — связная редуктивная алгебраическая группа, B — борелевская подгруппа.

Определение 2.1. Пусть P — связная алгебраическая подгруппа в G , содержащая B . Тогда P называется *параболической подгруппой*, а однородное пространство G/P — (обобщённым) *многообразием флагов*.

Пример 2.2. Пусть $G = \mathrm{GL}(n)$, и B — подгруппа невырожденных верхнетреугольных матриц. Тогда каждая параболическая подгруппа P является стабилизатором некоторого частичного флага $V_\bullet = \langle e_1, \dots, e_{d_1} \rangle \subset \langle e_1, \dots, e_{d_2} \rangle \subset \dots \subset \langle e_1, \dots, e_{d_k} \rangle \subset \mathbb{C}^n$, где $1 \leq d_1 < \dots < d_k \leq n$ — некоторая строго возрастающая последовательность. В таком случае группа P является блочно-верхнетреугольной (на диагонали стоят блоки размеров $d_i - d_{i-1}$), а однородное пространство G/P есть многообразие частичных флагов

$$Fl(d_1, \dots, d_k) = \{(U_1 \subset \dots \subset U_k \subset \mathbb{C}^n \mid \dim U_i = d_i)\}.$$

Пример 2.3. У предыдущего примера имеются два важных частных случая, в некотором смысле противоположных друг другу. Если $k = 1$, то P является максимальной параболической подгруппой; в таком случае $G/P = \mathrm{Gr}(d, n)$ есть грассманиан d -мерных подпространств в n -мерном. Напротив, если $P = B$, то есть $(d_1, \dots, d_{n-1}) = (1, \dots, n-1)$, то $G/P = G/B$ есть *многообразие полных флагов*. Допуская некоторую вольность речи, мы иногда будем употреблять для пространства G/B термин «многообразие полных флагов» в случае, когда группа G не есть $\mathrm{GL}(n)$.

Параболические подгруппы $P \subset G$, содержащие B , находятся во взаимно-однозначном соответствии с подмножествами в системе простых корней Δ группы G . Будем говорить, что параболическая подгруппа задана множеством простых корней $I \subseteq \Delta$, и обозначать

её через P_I , если для её касательной алгебры имеет место разложение

$$\mathfrak{p}_I = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\{\alpha \in R^+ \cup \mathbb{Z}(\Delta \setminus I)\}} \mathfrak{g}_\alpha,$$

где \mathfrak{t} — касательная алгебра тора T , а пространство \mathfrak{g}_α — корневое подпространство в \mathfrak{g} , отвечающее корню α .

Иными словами, множество простых корней стандартной подгруппы Леви в P_I равняется $\Delta \setminus I$. Тем самым «чем меньше корней, тем больше подгруппа»: скажем, для борелевской подгруппы $B = P_\Delta$. Напротив, максимальные параболические подгруппы отвечают подмножествам из одного простого корня. В случае, если $G = \mathrm{GL}(n)$, то для многообразия флагов $Fl(d_1, \dots, d_k) = G/P_I$ имеем $I = \{\alpha_{d_1}, \dots, \alpha_{d_k}\}$. В частности, грассманиан $\mathrm{Gr}(d, n)$, будучи фактором $\mathrm{GL}(n)$ по максимальной параболической подгруппе, отвечает множеству $I = \{\alpha_d\}$.

2.2. Разложение Шуберга. Для группы G имеет место *разложение Брюа*:

$$G = \bigsqcup_{w \in W} BwB.$$

Группа G представляется в виде объединения двойных смежных классов борелевской подгруппы; эти классы нумеруются элементами группы Вейля.

Это разложение дает разложение многообразия полных флагов G/B в объединение орбит группы B , действующей на G/B слева:

$$G/B = \bigsqcup_{w \in W} BwB/B.$$

Пусть $w \in W$ — некоторый элемент группы Вейля, $\ell(w) \in \mathbb{Z}_+$ — его *длина*, т.е. наименьшее число m , для которого w представляется в виде композиции m простых отражений. (В случае, когда $G = \mathrm{GL}(n)$, группа Вейля $W \cong S_n$, и длина элемента есть длина перестановки, т.е. количество инверсий: $\ell(w) = \#\{(i, j) \mid i < j, w(i) > w(j)\}$.) Несложно видеть, что каждая из орбит BwB/B изоморфна аффинному пространству $\mathbb{A}^{\ell(w)}$, где $\ell(w)$ есть *длина* элемента w . Тем самым получается клеточное разложение многообразия G/B .

Определение 2.4. B -орбиты на G/B называются *клетками Шуберга*. Их замыкания называются *многообразиями Шуберга*; будем обозначать их через $X_w = \overline{BwB/B}$. Полученное таким образом клеточное разбиение G/B называется *разложением Шуберга*.

Из структуры разложения Шуберга многообразия G/B следует, что классы когомологий $[X_w] \in H^*(G/B, \mathbb{Q})$, двойственные по Пуанкаре к фундаментальным классам многообразий Шуберга, порождают кольцо когомологий $H^*(G/B, \mathbb{Q})$ как векторное пространство над \mathbb{Q} . Это соображение применяется при решении ряда задач

исчислительной геометрии, которые могут быть переформулированы в терминах вычислений в кольце $H^*(G/B, \mathbb{Q})$. Этот подход называется *исчислением Шуберта*; он и послужил мотивировкой для рассмотрения разложения Шуберта многообразий флагов. Подробнее об исчислении Шуберта можно прочесть в предисловии к переизданию книги [48]; см. также [25], [24] и [53].

2.3. Порядок Брюа. Разложение Шуберта является клеточным разбиением, т.е. замыкание каждой клетки является объединением клеток. Тем самым отношение примыкания на клетках Шуберта индуцирует на группе Вейля порядок, называемый *порядком Брюа*.

Определение 2.5. Будем говорить, что два элемента группы Вейля $v, w \in W$ *сравнимы в смысле порядка Брюа*: $v \leq w$, если $X_v \subset X_w$.

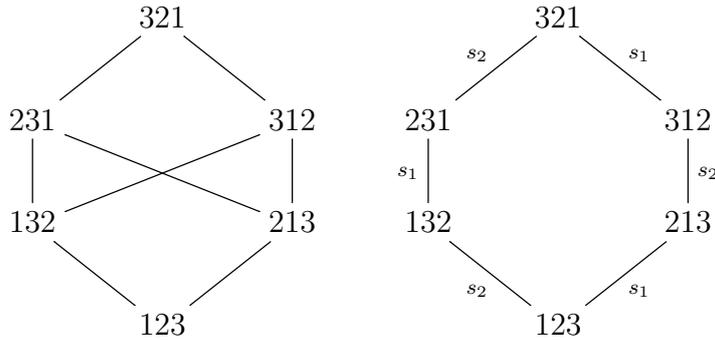
Порядок Брюа допускает следующее комбинаторное описание (см., например, [23]):

Предложение 2.6. *Элементы v и w сравнимы в смысле порядка Брюа: $v \leq w$, если и только если существует такая последовательность отражений (не обязательно простых) $s_{i_1}, \dots, s_{i_r} \in W$, для которых $w = s_{i_r} \dots s_{i_1} v$, причем $\ell(s_{i_t} \dots s_{i_1} v) > \ell(s_{i_{t-1}} \dots s_{i_1} v)$ для любого $t \leq r$.*

Кроме того, можно определить *слабый порядок Брюа*:

Определение 2.7. Элементы v и w *сравнимы в смысле слабого порядка Брюа*: $v \leq_w w$, если и только если существует такая последовательность *простых* отражений $s_{i_1}, \dots, s_{i_r} \in W$, для которых $w = s_{i_r} \dots s_{i_1} v$, причем $\ell(s_{i_t} \dots s_{i_1} v) > \ell(s_{i_{t-1}} \dots s_{i_1} v)$ для любого $t \leq r$.

Ясно, что из соотношения $v \leq_w w$ следует $v \leq w$; обратное, вообще говоря, неверно. Ниже приведен граф Хассе для порядков Брюа (обычного и слабого) на группе перестановок S_3 (для $G = \text{GL}(3)$). Перестановки записаны в виде одной строки (так, скажем, 321 — это перестановка $1 \mapsto 3, 2 \mapsto 2, 3 \mapsto 1$).



На ребрах второго графа стоят отметки, соответствующие простым транспозициям: вершины w и v соединены ребром с отметкой s_i , если $w = s_i v$. Слабый порядок Брюа встретится нам при описании разрешений Ботта–Самельсона многообразий Шуберта (см. ниже в разд. 4.4).

2.4. Параболические подгруппы в группах Вейля. Пусть W — группа Вейля, порожденная образующими s_1, \dots, s_r с соотношениями $s_i^2 = e$, $(s_i s_j)^{m_{ij}} = e$. Рассмотрим произвольный набор простых корней $I \subset \Delta$ и рассмотрим подгруппу $W_I \subset W$, порожденную всеми s_{α_i} , для которых $\alpha_i \in I$. (Так, например, если $I = \emptyset$, то $W_I = \{e\}$). Эта подгруппа сама будет группой, порожденной отражениями; такие подгруппы называются *стандартными параболическими подгруппами* в группе Вейля W .

Предложение 2.8 ([23, Proposition 1.10]). *Пусть R_I — пересечение системы корней R с линейной оболочкой $V_I = \langle \alpha_i \rangle$, $\alpha_i \in I$.*

- R_I — система корней, для которой I является системой простых корней, а W_I является группой отражений, связанной с этой системой корней;
- Функция длины на W_I (как на группе отражений) совпадает с ограничением функции длины на W : $\ell_I(w) = \ell(w)$ для любого $w \in W_I$;
- Определим $W^I = \{w \in W \mid \ell(ws_\alpha) > \ell(w) \text{ при всех } \alpha \in \Delta_I\}$. Тогда каждый элемент w однозначно разлагается в произведение $w = vi$, $v \in W^I$, $i \in W_I$, для которого $\ell(v) + \ell(i) = \ell(w)$. Более того, v является единственным элементом минимальной длины в левом смежном классе wW_I .

Стандартные параболические подгруппы $W_I \subset W$ взаимно-однозначно соответствуют параболическим подгруппам $P_I \subset G$, содержащим B . При этом множество W^I параметризует B -орбиты (клетки Шуберта) в многообразии флагов G/P_I :

$$G/P = \bigsqcup_{w \in W^I} BwP/P.$$

Вложение $W^I \hookrightarrow W$ индуцирует на W^I сильный и слабый порядки Брюа; сильный порядок Брюа описывает примыкание клеток Шуберта, а слабый отвечает действию минимальных параболических подгрупп (см. ниже 4.3).

2.5. Теорема Бореля–Вейля. Эта теорема утверждает, что в сечениях линейных расслоений многообразий флагов G/B могут быть реализованы все конечномерные неприводимые представления группы G . Приведем краткое описание этой конструкции.

Пусть λ — целочисленный вес. Он определяет характер $\chi_\lambda: B \rightarrow \mathbb{C}^*$ борелевской подгруппы B , или, что то же самое, одномерное

представление \mathbb{C}_λ группы B действие на котором задается так: $b.z = \lambda(b)z$.

Можно рассмотреть однородное расслоение $G \times^B \mathbb{C}_\lambda = \mathcal{L}_\lambda$; это будет G -эквивариантное линейное расслоение над G/B , причем все G -эквивариантные линейные расслоения над G/B будут получаться таким образом.

Голоморфные глобальные сечения \mathcal{L}_λ отвечают голоморфным отображениям

$$f: G \rightarrow \mathbb{C}_\lambda : f(gb) = \chi_\lambda(b)f(g) \quad \forall b \in B, \quad g \in G.$$

Они образуют пространство $H^0(G/B, \mathcal{L}_\lambda)$. На этом пространстве естественно возникает структура G -модуля:

$$g \cdot f(h) = f(g^{-1}h) \quad \forall g, h \in G.$$

Теорема 2.9 (А. Борель, А. Вейль). *Если вес λ доминантен, пространство $H^0(G/B, \mathcal{L}_\lambda)$ изоморфно (как G -модуль) неприводимому G -модулю V_{λ^*} со старшим весом λ^* . В противном случае $H^0(G/B, \mathcal{L}_\lambda) = 0$.*

(Доказательство см., например, в [50] или [19]).

Отметим, что модуль V_{λ^*} можно рассматривать как G -модуль, индуцированный с одномерного B -модуля \mathbb{C}_{λ^*} .

Аналогично можно описать пространства глобальных сечений линейных G -эквивариантных расслоений над многообразиями частичных флагов $H^0(G/P, \mathcal{L}_\lambda)$ как неприводимые G -модули $V_{\lambda^*} = \text{Ind}_P^G \mathbb{C}_{\lambda^*}$. Мы будем использовать эту геометрическую реализацию неприводимых представлений группы G в следующем разделе.

Обобщение этой теоремы, обычно называемое теоремой Бореля–Вейля–Ботта, дает описание не только глобальных сечений, но и высших когомологий $H^i(G/B, \mathcal{L}_\lambda)$ как G -модулей; см., например, [16].

2.6. Сферические многообразия. В предыдущем разделе было описано разложение Шуберта для многообразий флагов G/P . Его можно рассматривать как разложение многообразия в объединение орбит борелевской подгруппы $B \subset G$, причем число этих орбит конечно, следовательно, среди них есть открытая орбита. Это свойство — наличие открытой орбиты борелевской подгруппы на G -многообразии — характеризует класс G -многообразий, называемых *сферическими*.

В настоящем разделе мы ограничиваемся тем, что приводим несколько эквивалентных определений сферического многообразия, которые понадобятся нам далее. Подробное изложение теории сферических многообразий можно найти, например, в книге Д. А. Тимашева [55] или в недавнем обзоре Н. Перрена [40].

Определение 2.10. Пусть X — нормальное G -многообразие. Сложностью $c_G(X) = c(X)$ многообразия X называется минимальная коразмерность B -орбиты в X . Многообразие X называется сферическим, если $c(X) = 0$.

Приведем несколько эквивалентных определений сферических многообразий.

Теорема 2.11 (см., напр., [40, Thm 2.1.2]). Следующие условия эквивалентны:

- (1) X сферично;
- (2) $\mathbb{C}(X)^B = \mathbb{C}$;
- (3) X состоит из конечного числа B -орбит.
Для квазипроективного X эти свойства эквивалентны следующему свойству:
- (4) если \mathcal{L} — G -эквивариантное линейное расслоение, G -модуль $H^0(X, \mathcal{L})$ не имеет кратностей (т.е. для любого неприводимого G -модуля W верно, что $\dim \text{Hom}_G(W, H^0(X, \mathcal{L})) \leq 1$).

Важными примерами сферических многообразий, помимо многообразий флагов, являются торические многообразия (в этом случае $G = B = T$) и симметрические пространства.

3. КРАТНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ ФЛАГОВ И РАЗЛОЖЕНИЕ ТЕНЗОРНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ

3.1. Двойные многообразия флагов сложности 0 и 1. В этом разделе приводится классификация двойных многообразий флагов сложности 0 и 1. Сначала отметим, что достаточно рассмотреть случай, когда G — простая алгебраическая группа. Действительно, всякая полупростая группа раскладывается в почти прямое произведение простых подгрупп $G = G_1 \dots G_s$, а параболические подгруппы $P, Q \subset G$ — в почти прямое произведение параболических подгрупп $P_i, Q_i \subset G_i$. Тогда сложность двойного многообразия флагов $G/P \times G/Q$ равна

$$c_G(G/P \times G/Q) = c_{G_1}(G/P_1 \times G/Q_1) + \dots + c_{G_s}(G_s/P_s \times G_s/Q_s).$$

Тем самым интересующий нас вопрос сводится к рассмотрению простых групп.

В случае классических групп в качестве B будем рассматривать подгруппу верхнетреугольных матриц (считая в ортогональном и симплектическом случаях, что группа G сохраняет билинейную форму, имеющую антидиагональную матрицу). Тогда параболические подгруппы, содержащие B , имеют блочно-верхнетреугольный вид, и их можно задавать размерами блоков на диагонали. Исключение составляет группа $\text{SO}(n)$ при четных n , для которой не все

параболические подгруппы имеют указанный вид. Оставшиеся подгруппы приобретают такой вид в результате сопряжения с перестановкой двух средних базисных векторов; такие параболические подгруппы будем обозначать штрихами.

Для особых групп мы будем задавать параболические подгруппы $P_I \supseteq B$ наборами простых корней $I \subseteq \Delta$, как это указано в разд. 2.1.

Имеют место следующие классификационные теоремы, относящиеся к случаю классических и исключительных групп соответственно.

Теорема 3.1 ([41, теорема 1]). *Пусть G — классическая группа (т.е. $SL(n)$, $SO(n)$ или $Sp(n)$). Тогда все двойные многообразия флагов сложности 0 и 1 соответствуют парам параболических подгрупп (с точностью до перестановки, для $SL(n)$ — еще и с точностью до одновременного транспонирования относительно побочной диагонали, а для $SO(2n)$, кроме того, с точностью до диаграммного автоморфизма G), приведенных в табл. 1, 2, 3.*

ТАБЛИЦА 1. Пары параболических подгрупп, отвечающих двойным многообразиям флагов в группах $SL(n)$

К-ва блоков в P и Q	Сложность 0		Сложность 1	
	P	Q	P	Q
(2, 2)	(p_1, p_2)	(q_1, q_2)		
(2, 3)	(p_1, p_2)	$(1, q_1, q_2)$	$(3, p_2), p_2 \geq 3$	$(q_1, q_2, q_3), q_1, q_2, q_3 \geq 2$
	(p_1, p_2)	$(q_1, 1, q_3)$	$(p_1, p_2), p_1, p_2 \geq 3$	$(2, 2, q_3), q_3 \geq 2$
	$(2, p_2)$	(q_1, q_2, q_3)	$(p_1, p_2), p_1, p_2 \geq 3$	$(2, q_2, 2), q_2 \geq 2$
(2, 4)			$(2, p_2)$	(q_1, q_2, q_3, q_4)
			$(p_1, p_2), p_1, p_2 \geq 2$	$(1, 1, 1, q_4)$
			$(p_1, p_2), p_1, p_2 \geq 2$	$(1, 1, q_3, 1)$
(2, s)	$(1, p_2)$	(q_1, \dots, q_s)		
(3, 3)			$(1, 1, p_3)$	(q_1, q_2, q_3)
			$(1, p_2, 1)$	(q_1, q_2, q_3)

Теорема 3.2 ([41, теорема 2]). (1) *Для групп E_8, F_4 и G_2 двойных многообразий флагов сложности 0 и 1 не существует.*
 (2) *Для группы E_6 многообразия флагов сложности 0 отвечают следующим парам параболических подгрупп:*

$$(\{\alpha_1\}, \{\alpha_1\}), (\{\alpha_1\}, \{\alpha_2\}), (\{\alpha_1\}, \{\alpha_4\}), (\{\alpha_1\}, \{\alpha_5\}), (\{\alpha_1\}, \{\alpha_6\}), (\{\alpha_2\}, \{\alpha_5\}),$$

$$(\{\alpha_4\}, \{\alpha_5\}), (\{\alpha_5\}, \{\alpha_5\}), (\{\alpha_5\}, \{\alpha_6\}), (\{\alpha_1\}, \{\alpha_1, \alpha_5\}), (\{\alpha_5\}, \{\alpha_1, \alpha_5\});$$

ТАБЛИЦА 2. Пары параболических подгрупп, отвечающих двойным многообразиям флагов в группах $SO(n)$

К-ва блоков в P и Q	Сложность 0		Сложность 1	
	P	Q	P	Q
(2, 2)	(p, p)	(p, p)		
(2, 2)	(p, p)	$(p, p)'$		
(2, 3)	(p, p) (p, p)	$(q_1, q_2, q_1), q_1 \leq 3$ $(q, 2, q)$	(6, 6)	(4, 4, 4)
(2, 4)	(p, p) (p, p) $(4, 4)$	$(1, q, q, 1)$ $(1, q, q, 1)'$ $(2, 2, 2, 2)'$	(4, 4) (5, 5) (5, 5) (5, 5)	(2, 2, 2, 2) (2, 3, 3, 2) (3, 2, 2, 3) (2, 3, 3, 2)' (3, 2, 2, 3)'
(2, 5)			(4, 4)	(2, 1, 2, 1, 2)
(2, 6)			(4, 4)	(1, 1, 2, 2, 1, 1)
(2, 6)			(4, 4)	(1, 1, 2, 2, 1, 1)'
(3, 3)	$(1, p, 1)$ $(p, 1, p)$	(q_1, q_2, q_1) $(p, 1, p)$	(2, 2, 2) $(2, p, 2), p > 1$	(2, 2, 2) $(q, 1, q)$
(3, 4)	$(1, p, 1)$	(q_1, q_2, q_2, q_1)	(2, 2, 2)	(1, 2, 2, 1)
(3, 5)			$(1, p, 1)$ (2, 1, 2)	$(q_1, q_2, q_3, q_2, q_1)$ (1, 1, 1, 1, 1)
(3, 6)			$(1, p, 1)$	$(q_1, q_2, q_3, q_3, q_2, q_1)$
(4, 4)			(1, 2, 2, 1) (1, 2, 2, 1)	(1, 2, 2, 1) (1, 2, 2, 1)'

ТАБЛИЦА 3. Пары параболических подгрупп, отвечающих двойным многообразиям флагов в группах $Sp(n)$

К-ва блоков в P и Q	Сложность 0		Сложность 1	
	P	Q	P	Q
(2, 2)	(p, p)	(p, p)		
(2, 3)	(p, p)	$(1, q, 1)$	(p, p)	$(2, q, 2)$
(2, 4)			(2, 2)	(1, 1, 1, 1)
(3, 3)	$(1, p, 1)$	(q_1, q_2, q_1)		
(3, 4)			$(1, p, 1)$	(q_1, q_2, q_2, q_1)
(3, 5)			$(1, p, 1)$	$(q_1, q_2, q_3, q_2, q_1)$

многообразия сложности 1 отвечают следующим парам параболических подгрупп:

$$(\{\alpha_1\}, \{\alpha_1, \alpha_2\}), (\{\alpha_1\}, \{\alpha_1, \alpha_6\}), (\{\alpha_1\}, \{\alpha_4, \alpha_5\}), (\{\alpha_1\}, \{\alpha_5, \alpha_6\}),$$

$$(\{\alpha_5\}, \{\alpha_1, \alpha_2\}), (\{\alpha_5\}, \{\alpha_1, \alpha_6\}), (\{\alpha_5\}, \{\alpha_4, \alpha_5\}), (\{\alpha_5\}, \{\alpha_5, \alpha_6\});$$

(3) Для группы E_7 многообразия флагов сложности 0 отвечают следующим парам параболических подгрупп:

$$(\{\alpha_1\}, \{\alpha_1\}), (\{\alpha_1\}, \{\alpha_6\}), (\{\alpha_1\}, \{\alpha_7\});$$

многообразия флагов сложности 1 отвечает паре параболических подгрупп $(\{\alpha_1\}, \{\alpha_2\})$.

3.2. Кольца Кокса двойных многообразий флагов. Приведем определение кольца Кокса проективного многообразия X в случае, когда группа Пикара $\text{Pic}(X)$ — свободная группа конечного ранга. Пусть $\text{Pic}(X)$ свободно порождается классами линейных расслоений $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_s$. Тогда всякое линейное расслоение над X изоморфно $\mathcal{L}_1^{k_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{L}_s^{k_s}$, где $k_1, \dots, k_s \in \mathbb{Z}$.

Определение 3.3. Кольцом Кокса многообразия X называется пространство

$$R(X) = \bigoplus_{k_i \in \mathbb{Z}} H^0(X, \mathcal{L}_1^{k_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{L}_s^{k_s}).$$

Умножение на пространстве $R(X)$ отвечает тензорному произведению сечений.

Замечание 3.4. Кольцо $R(X)$ является мультиградуированным при помощи группы $\text{Pic}(X)$. Сечения линейных расслоений при этом являются в точности мультиоднородными элементами $R(X)$.

Более общее определение колец Кокса см., например, в [2][Сec. 1.4].

Для дальнейшего нам потребуется знание структуры колец Кокса многообразий флагов. Нам будет удобно реализовывать многообразия флагов в виде G/P^- , где P^- — параболическая подгруппа, содержащая противоположную к B борелевскую подгруппу B^- ; иными словами, касательная алгебра \mathfrak{p}^- содержит все корневые подпространства, отвечающие отрицательным корням.

Пусть $I = \{\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}\} \subset \Delta$ — непустое подмножество системы простых корней, $P = P_I$ — соответствующая параболическая подгруппа, $P^- = P_I^-$ — параболическая подгруппа, противоположная к P_I . Хорошо известно (см., например, [11]), что группа Пикара $\text{Pic}(G/P^-) \cong \mathbb{Z}^r$ свободно порождается классами дивизоров Шуберта, т.е. классами многообразий Шуберта коразмерности один. Эти дивизоры образуют в точности множество всех B -инвариантных дивизоров на G/P^- ; они имеют вид $D_{i_k} = \overline{Bs_{i_k}P^-/P^-}$, где $\alpha_{i_k} \in I$, а простое отражение s_{i_k} соответствует корню α_{i_k} .

Пусть $D = \sum m_{i_k} D_{i_k} \in \text{Pic}(G/P_I^-)$, $\lambda = \sum m_{i_k} \omega_{i_k}$ — вес канонического сечения расслоения $\mathcal{O}(D)$. Тогда $H^0(G/P_I^-, \mathcal{O}(D)) \cong V_\lambda$, если $m_{i_1}, \dots, m_{i_r} \geq 0$, и 0 иначе. Таким образом,

$$R(G/P^-) \simeq \bigoplus_{\substack{\lambda = m_{i_1} \omega_{i_1} + \dots + m_{i_r} \omega_{i_r} \\ m_{i_1}, \dots, m_{i_r} \geq 0}} V_\lambda.$$

Теперь рассмотрим двойное многообразие флагов $X = G/P^- \times G/Q^-$, где $P = P_I$, $Q = P_J$, $I = \{\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}\}$, $J = \{\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_t}\}$. Его группа Пикара свободно порождается прообразами дивизоров Шуберта на G/P^- и G/Q^- при канонических проекциях $X \rightarrow G/P^-$ и $X \rightarrow G/Q^-$ соответственно. Такие прообразы дивизоров Шуберта мы тоже будем называть дивизорами Шуберта и обозначать так же. Кольцо Кокса двойного многообразия флагов можно записать в следующем виде:

$$R(X) = R(G/P^-) \otimes R(G/Q^-) \simeq \bigoplus_{\substack{\lambda = m_{i_1}\omega_{i_1} + \dots + m_{i_r}\omega_{i_r}, m_{i_1}, \dots, m_{i_r} \geq 0 \\ \mu = n_{j_1}\omega_{j_1} + \dots + n_{j_t}\omega_{j_t}, n_{j_1}, \dots, n_{j_t} \geq 0}} V_\lambda \otimes V_\mu.$$

Мультистепень будет задаваться целочисленным $(r+t)$ -вектором.

3.3. Разложение тензорных произведений неприводимых представлений. В этом разделе мы описываем, каким образом знание U -инвариантов колец Кокса двойных многообразий флагов позволяет раскладывать тензорные произведения неприводимых G -модулей. Мы следуем изложению в работах [42] и [43].

Пусть кольцо A градуировано некоторой группой E , тогда через A_ρ будем обозначать соответствующую элементу $\rho \in E$ однородную компоненту в кольце A .

Пусть $X = G/P^- \times G/Q^-$, где $P = P_I$, $Q = P_J$, $I = \{\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}\}$, $J = \{\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_t}\}$. Пусть $\lambda = \sum m_{i_k}\omega_{i_k}$, $\mu = \sum n_{j_l}\omega_{j_l}$. Тогда подмодуль $V_\lambda \otimes V_\mu \subset R(X)$ будет состоять в точности из мультиоднородных элементов мультистепени $(m_{i_1}, \dots, m_{i_r}, n_{j_1}, \dots, n_{j_t}) =: (\bar{m}, \bar{n})$, то есть совпадать с $R(X)_{(\bar{m}, \bar{n})}$.

Кратность вхождения V_ν в $V_\lambda \otimes V_\mu$ равна размерности пространства $(V_\lambda \otimes V_\mu)_\nu^U$ инвариантов относительно действия U , имеющих вес ν относительно действия T . Это пространство можно отождествить с подпространством $R(X)_{(\bar{m}, \bar{n}), \nu}^U$ (где ν — вес относительно тора T). Таким образом,

$$V_\lambda \otimes V_\mu \simeq R(X)_{(\bar{m}, \bar{n})} \simeq \bigoplus_{\nu} V_\nu^{\oplus d(\bar{m}, \bar{n}, \nu)},$$

где $d(\bar{m}, \bar{n}, \nu) = \dim R(X)_{(\bar{m}, \bar{n}), \nu}^U$.

Для следующих случаев размерности $d(\bar{m}, \bar{n}, \nu)$ и $d(\bar{m}, \nu)$, участвующие в правилах разложения тензорных произведений, можно без труда вычислить. Как следует из теоремы 3.7 ниже, эти случаи будут включать в себя случаи сложностей 0 и 1.

Теорема 3.5. Пусть $X = G/P^- \times G/Q^-$, где $P = P_I$, $Q = P_J$, $I = \{\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}\}$, $J = \{\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_t}\}$. Пусть $\lambda = \sum m_{i_k}\omega_{i_k}$, $\mu = \sum n_{j_l}\omega_{j_l}$ и $(\bar{m}, \bar{n}) := (m_{i_1}, \dots, m_{i_r}, n_{j_1}, \dots, n_{j_t})$.

Пусть $R(X)^U$ свободна, элементы её минимальной системы однородных порождающих имеют веса ν_1, \dots, ν_d и мультистепени $(\bar{m}_1, \bar{n}_1), \dots, (\bar{m}_d, \bar{n}_d)$. Тогда имеет место следующее разложение:

$$V(\lambda) \otimes V(\mu) \simeq \bigoplus_{k_1(\bar{m}_1, \bar{n}_1) + \dots + k_d(\bar{m}_d, \bar{n}_d) = (\bar{m}, \bar{n})} V(k_1\nu_1 + \dots + k_d\nu_d).$$

Доказательство. Утверждение очевидным образом следует из вышенаписанного. \square

Теорема 3.6. Пусть $X, \lambda, \mu, (\bar{m}, \bar{n})$ — как в теореме 3.5, алгебра $R(X)^U$ является гиперповерхностью (т.е. образующие связаны единственным определяющим соотношением), элементы её минимальной системы однородных порождающих имеют веса ν_1, \dots, ν_d и мультистепени $(\bar{m}_1, \bar{n}_1), \dots, (\bar{m}_d, \bar{n}_d)$, а определяющее соотношение имеет вес ν_0 и мультистепень (\bar{m}_0, \bar{n}_0) . Тогда имеет место следующее разложение:

$$(3.1) \quad V_\lambda \otimes V_\mu \simeq \bigoplus_{k_1(\bar{m}_1, \bar{n}_1) + \dots + k_d(\bar{m}_d, \bar{n}_d) = (\bar{m}, \bar{n})} V_{k_1\nu_1 + \dots + k_d\nu_d} - \bigoplus_{l_1(\bar{m}_1, \bar{n}_1) + \dots + l_d(\bar{m}_d, \bar{n}_d) = (\bar{m}, \bar{n}) - (\bar{m}_0, \bar{n}_0)} V_{\nu_0 + l_1\nu_1 + \dots + l_d\nu_d}$$

Под разностью представлений понимается представление, для которого кратность вхождения каждого неприводимого представления $V(\nu)$ равна разности кратностей вхождения $V(\nu)$ в исходные представления.

Доказательство. Рассмотрим точную последовательность

$$0 \rightarrow (F_1) \xrightarrow{\varphi_1} \mathbb{C}[t_1, \dots, t_d] \xrightarrow{\varphi_2} R(X)^U \rightarrow 0,$$

где F_1 — определяющее соотношение, φ_1 — естественное вложение, $\varphi_2(t_i) = f_i$. Введем на алгебре многочленов $\mathbb{C}[t_1, \dots, t_d]$ \mathbb{Z}^{r+t+l} -градуировку, где $l = \text{rk } G$, приписав каждой переменной t_i мультистепень (\bar{m}_i, \bar{n}_i) и вес ν_i . Тогда φ_1 и φ_2 сохраняют градуировку. Кратность вхождения V_ν в $V_\lambda \otimes V_\mu$ равна $\dim R(X)_{(\bar{m}, \bar{n}), \nu}^U$, кратность вхождения в уменьшаемое правой части изоморфизма (3.1) равна $\dim \mathbb{C}[t_1, \dots, t_d]_{(\bar{m}, \bar{n}), \nu}$, а кратность вхождения в вычитаемое правой части изоморфизма (3.1) равна $\dim (F_1)_{(\bar{m}, \bar{n}), \nu}$. Из точности последовательности имеем $\dim R(X)_{(\bar{m}, \bar{n}), \nu}^U = \dim \mathbb{C}[t_1, \dots, t_d]_{(\bar{m}, \bar{n}), \nu} - \dim (F_1)_{(\bar{m}, \bar{n}), \nu}$, что и доказывает теорему. \square

3.4. U -инварианты в кольцах Кокса двойных многообразий флагов.

Теорема 3.7 ([42], [43]). Пусть многообразие $X = G/P^- \times G/Q^-$ имеет сложность 0 или 1, где P^- и Q^- — параболические подгруппы простой группы G , содержащие борелевскую подгруппу B^- , противоположные к P, Q . Пусть P и Q заданы подмножествами простых корней $I = \{\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}\}$, $J = \{\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_t}\}$. Тогда алгебра $R(X)^U$ порождается элементами указанных в таблицах 4 и 5 весов и мультистепеней и элементами соответствующих фундаментальных весов $\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_r}, \omega_{j_1}, \dots, \omega_{j_t}$ мультистепеней $(1, 0, \dots, 0)$, $(0, 1, 0, \dots, 0)$, \dots , $(0, \dots, 0, 1)$ соответственно. Если многообразие X имеет сложность 0, эти образующие свободно порождают $R(X)^U$. В случае сложности 1 в таблице указано количество определяющих соотношений между этими элементами (оно либо одно, либо его нет), вес и мультистепень соотношения. Если соотношение есть, оно имеет следующий вид: сумма всех мономов данного веса и мультистепени от порождающих равна 0.

Из этой классификационной теоремы вытекает такое следствие.

Следствие 3.8. (1) Пусть X — сферическое двойное многообразие флагов. Тогда алгебра $R(X)^U$ свободна.

(2) Пусть сложность двойного многообразия флагов равна 1. Тогда алгебра $R(X)^U$ свободна либо является гиперповерхностью.

Замечание 3.9. Частные случаи этого следствия были известны ранее: так, п. (1) был получен П. Литтельманом в работе [31]). Алгебра U -инвариантов для $R(X)$ в случае, когда X имеет сложность 1 и есть произведение двух многообразий флагов, отвечающих максимальным параболическим подгруппам, была вычислена Д. И. Панюшевым [38].

Таблица 4: Весы и мультистепени образующих U -инвариантов в кольце Кокса для сложности 0

I	J	степень	вес
SL_n			
α_i	α_j $i \leq j$	(1, 1)	$\omega_{i-k} + \omega_{j+k}, k = 1, \dots, \min\{i, n-j\}$
α_i	α_1, α_j $i \leq j$	(1, 1, 0) (1, 0, 1) (1, 1, 1)	ω_{i+1} $\omega_{i-k} + \omega_{j+k}, k = 1, \dots, \min\{i, n-j\}$ $\omega_{i-k+1} + \omega_{j+k}$ $k = \max\{1, 2 - (j-i)\}, \dots, \min\{i-1, n-j\}$
α_i	α_1, α_j $i > j$	(1, 1, 0) (1, 0, 1) (1, 1, 1)	ω_{i+1} $\omega_{i+k} + \omega_{j-k}, k = 1, \dots, \min\{j, n-i\}$ $\omega_{i+k} + \omega_{j-k+1}, k = 2, \dots, \min\{j-1, n-i\}$
α_i	α_j, α_{j+1} $i \geq j+1$	(1, 1, 0) (1, 0, 1)	$\omega_{i+k} + \omega_{j-k}, k = 1, \dots, \min\{j, n-i\}$ $\omega_{i+k} + \omega_{j-k+1}, k = 1, \dots, \min\{j+1, n-i\}$

α_2	α_i, α_j $i > j$ $i, j - i, n - j \geq 2$	$(1, 1, 0)$ $(1, 0, 1)$ $(1, 1, 1)$	$\omega_1 + \omega_{i+1}, \omega_{i+2}$ $\omega_1 + \omega_{j+1}, \omega_{j+2}$ $\omega_{i+1} + \omega_{j+1}$
α_1	$\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_s}$	$(1, 1, 0, 0, \dots, 0)$ $(1, 0, 1, 0, \dots, 0)$ \dots $(1, 0, 0, 0, \dots, 1)$	ω_{i_1+1} ω_{i_2+1} \dots ω_{i_s+1}
Sp_{2l}, (l ≥ 2)			
α_1	α_i $i \leq l - 1$	$(1, 1)$ $(2, 1)$	$\omega_{i-1}, \omega_{i+1}$ ω_i при $i > 1$
α_1	α_l	$(1, 1)$ $(2, 1)$	ω_{l-1} ω_l
α_l	α_l	$(1, 1)$	$2\omega_k, k = 0, \dots, l - 1$
SO_{2l}, (l ≥ 4)			
α_1	α_i $i \leq l - 3$	$(1, 1)$ $(2, 1)$	$\omega_{i-1}, \omega_{i+1}$ ω_i при $i > 1$
α_1	α_{l-2}	$(1, 1)$ $(2, 1)$	$\omega_{l-3}, \omega_{l-1} + \omega_l$ ω_{l-2}
α_1	α_{l-1}	$(1, 1)$	ω_l
α_2	α_l	$(1, 1)$ $(1, 2)$	$\omega_1 + \omega_{l-1}, \omega_l$ ω_{l-2}
α_3	α_l $l \geq 6$	$(1, 1)$ $(1, 2)$ $(2, 2)$	$\omega_1 + \omega_l, \omega_2 + \omega_{l-1}, \omega_{l-1}$ $\omega_1 + \omega_{l-2}, \omega_{l-3}$ $\omega_2 + \omega_{l-2}$
α_{l-1}	α_l	$(1, 1)$	$\omega_{l-2k-1}, k = 1, \dots, \lfloor \frac{l-1}{2} \rfloor$
α_l	α_l	$(1, 1)$	$\omega_{l-2k}, k = 1, \dots, \lfloor \frac{l}{2} \rfloor$
α_1	α_i, α_l $i \leq l - 3$	$(1, 1, 0)$ $(2, 1, 0)$ $(1, 0, 1)$	$\omega_{i-1}, \omega_{i+1}$ ω_i при $i > 1$ ω_{l-1}
α_1	α_{l-2}, α_l	$(1, 1, 0)$ $(2, 1, 0)$ $(1, 0, 1)$	$\omega_{l-3}, \omega_{l-1} + \omega_l$ ω_{l-2} ω_{l-1}
α_1	α_{l-1}, α_l	$(1, 1, 0)$ $(1, 0, 1)$ $(1, 1, 1)$	ω_l ω_{l-1} ω_{l-2}
α_l	α_1, α_2	$(1, 1, 0)$ $(1, 0, 1)$ $(2, 0, 1)$	ω_{l-1} $\omega_1 + \omega_{l-1}, \omega_l$ ω_{l-2}
α_l	α_1, α_{l-1}	$(1, 1, 0)$ $(1, 0, 1)$ $(1, 1, 1)$	ω_{l-1} $\omega_{l-2k-1}, k = 1, \dots, \lfloor \frac{l-1}{2} \rfloor$ $\omega_{l-2k}, k = 1, \dots, \lfloor \frac{l-2}{2} \rfloor$

α_l	α_1, α_l	$(1, 1, 0)$ $(1, 0, 1)$ $(1, 1, 1)$	ω_{l-1} $\omega_{l-2k}, k = 1, \dots, \lfloor \frac{l}{2} \rfloor$ $\omega_{l-2k+1}, k = 2, \dots, \lfloor \frac{l-1}{2} \rfloor$
α_l	α_{l-1}, α_l	$(1, 1, 0)$ $(1, 0, 1)$	$\omega_{l-2k-1}, k = 1, \dots, \lfloor \frac{l-1}{2} \rfloor$ $\omega_{l-2k}, k = 1, \dots, \lfloor \frac{l}{2} \rfloor$
SO₈			
α_4	α_2, α_3	$(1, 1, 0)$ $(2, 1, 0)$ $(1, 0, 1)$	$\omega_1 + \omega_3, \omega_4$ ω_2 ω_1
SO₁₀			
α_3	α_5	$(1, 1)$ $(1, 2)$	$\omega_1 + \omega_5, \omega_2 + \omega_4, \omega_4$ $\omega_1 + \omega_3, \omega_2$
SO_{2l+1}, ($l \geq 3$)			
α_1	α_i	$(1, 1)$ $(2, 1)$	$\omega_{i-1}, \omega_{i+1}$ ω_i при $i > 1$
α_1	α_{l-1}	$(1, 1)$ $(2, 1)$	$\omega_{l-2}, 2\omega_l$ ω_{l-1}
α_1	α_l	$(1, 1)$ $(1, 2)$	ω_l ω_{l-1}
α_l	α_l	$(1, 1)$	$\omega_k, k = 0, \dots, l-1$
E₆			
α_1	α_1	$(1, 1)$	ω_2, ω_5
α_1	α_2	$(1, 1)$ $(2, 1)$	$\omega_1 + \omega_5, \omega_3, \omega_6$ $\omega_2 + \omega_5, \omega_4$
α_1	α_4	$(1, 1)$ $(2, 1)$	$\omega_2, \omega_5, \omega_5 + \omega_6$ ω_3, ω_6
α_1	α_5	$(1, 1)$	$0, \omega_6$
α_1	α_6	$(1, 1)$ $(2, 1)$	ω_1, ω_4 ω_2
α_1	α_1, α_5	$(1, 1, 0)$ $(1, 0, 1)$ $(1, 1, 1)$	ω_2, ω_5 $0, \omega_6$ ω_4
E₇			
α_1	α_1	$(1, 1)$	$0, \omega_2, \omega_6$
α_1	α_6	$(1, 1)$ $(2, 1)$	ω_1, ω_7 ω_2
α_1	α_7	$(1, 1)$ $(2, 1)$ $(2, 2)$	$\omega_2, \omega_5, \omega_6$ ω_3, ω_7 ω_4

Таблица 5: Веса и мультистепени образующих U -инвариантов в кольце Кокса для сложности 1

I	J	степень	вес	соотношения
SL_n				
α_2	$\alpha_i, \alpha_j, \alpha_m$ $i < j < m$	(1, 1, 0, 0) (1, 0, 1, 0) (1, 0, 0, 1) (1, 1, 1, 0) (1, 1, 0, 1) (1, 0, 1, 1)	$\omega_{2-k} + \omega_{i+k}, k = \max\{1, 3 - i\}, \dots, 2$ $\omega_1 + \omega_{j+1}, \omega_{j+2}$ $\omega_{2-k} + \omega_{m+k}, k = 1, \dots, \min\{2, n - m\}$ $\omega_{i+1} + \omega_{j+1}$ при $j - i > 1$ $\omega_{i+1} + \omega_{m+1}$ $\omega_{j+1} + \omega_{m+1}$ при $m - j > 1$	(2, 1, 1, 1) $\omega_1 + \omega_{i+1} + \omega_{j+1} + \omega_{m+1}$ 1 соотношение
α_i	$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ $i, n - i \geq 3$	(1, 1, 0, 0) (1, 0, 1, 0) (1, 0, 0, 1) (1, 1, 0, 1)	ω_{i+1} $\omega_1 + \omega_{i+1}, \omega_{i+2}$ $\omega_1 + \omega_{i+2}, \omega_2 + \omega_{i+1}, \omega_{i+3}$ $\omega_2 + \omega_{i+2}$	(2, 1, 1, 1) $\omega_1 + \omega_2 + \omega_{i+1} + \omega_{i+2}$ 1 соотношение
α_i	$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_{n-1}$ $i, n - i \geq 3$	(1, 1, 0, 0) (1, 0, 1, 0) (1, 0, 0, 1) (1, 1, 0, 1) (1, 0, 1, 1)	ω_{i+1} $\omega_1 + \omega_{i+1}, \omega_{i+2}$ ω_{i-1} ω_i $\omega_1 + \omega_i, \omega_{i+1}$	(2, 1, 1, 1) $\omega_1 + \omega_i + \omega_{i+1}$ 1 соотношение
α_3	α_i, α_j $i, j - i, n - j \geq 2$	(1, 1, 0) (1, 0, 1) (1, 1, 1) (2, 1, 1)	$\omega_{3-k} + \omega_{i+k}, k = \max\{1, 4 - i\}, \dots, 3$ $\omega_{3-k} + \omega_{j+k}$ $k = 1, \dots, \min\{3, j - i\}$ $\omega_1 + \omega_{i+1} + \omega_{j+1}, \omega_{i+k} + \omega_{j+3-k}$ $k = 1, \dots, \min\{2, j - i - 1\}$ $\omega_2 + \omega_{i+2} + \omega_{j+2}$	(3, 2, 2) $\omega_1 + \omega_2 + \omega_{i+1} + \omega_{i+2} + \omega_{j+1} + \omega_{j+2}$ 1 соотношение
α_i	α_2, α_4 $i, n - i \geq 4$	(1, 1, 0) (1, 0, 1) (1, 1, 1) (2, 1, 1)	$\omega_1 + \omega_{i+1}, \omega_{i+2}$ $\omega_1 + \omega_{i+3}, \omega_2 + \omega_{i+2}, \omega_3 + \omega_{i+1}, \omega_{i+4}$ $\omega_1 + \omega_3 + \omega_{i+2}, \omega_3 + \omega_{i+3}$ $\omega_2 + \omega_{i+1} + \omega_{i+3}$	(3, 2, 2) $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_{i+1} + \omega_{i+2} + \omega_{i+3}$ 1 соотношение
α_i	α_2, α_{n-2} $i, n - i \geq 4$	(1, 1, 0) (1, 0, 1) (1, 1, 1) (2, 1, 1)	$\omega_1 + \omega_{i+1}, \omega_{i+2}$ $\omega_{i-1} + \omega_{n-1}, \omega_{i-2}$ $\omega_1 + \omega_{i-1}, \omega_1 + \omega_i + \omega_{n-1}$ $\omega_{i+1} + \omega_{n-1}, \omega_i$ $\omega_{i-1} + \omega_{i+1}$	(3, 2, 2) $\omega_1 + \omega_{i-1} + \omega_i + \omega_{i+1} + \omega_{n-1}$ 1 соотношение
α_i, α_j	α_1, α_2	(1, 0, 1, 0) (1, 0, 0, 1) (0, 1, 1, 0) (0, 1, 0, 1) (1, 1, 0, 1)	ω_{i+1} $\omega_{2-k} + \omega_{i+k}, k = \max\{1, 3 - i\}, \dots, 2$ ω_{j+1} $\omega_{2-k} + \omega_{j+k}$ $k = 1, \dots, \min\{2, n - j\}$ $\omega_{i+1} + \omega_{j+1}$ при $j - i > 1$	(1, 1, 1, 1) $\omega_1 + \omega_{i+1} + \omega_{j+1}$ 1 соотношение
α_i, α_j	α_1, α_{n-1}	(1, 0, 1, 0) (1, 0, 0, 1) (0, 1, 1, 0) (0, 1, 0, 1) (1, 0, 1, 1) (0, 1, 1, 1)	ω_{i+1} ω_{i-1} ω_{j+1} ω_{j-1} ω_i при $i > 1$ ω_j при $n - j > 1$	(1, 1, 1, 1) $\omega_i + \omega_j$ при $j - i > 1$ 0 соотношений; при $j - i = 1$ 1 соотношение

Sp_{2l}, (l ≥ 2)				
α_l	α_2 $l \geq 4$	(1, 1) (1, 2) (2, 2)	$\omega_1 + \omega_{l-1}, \omega_{l-2}$ $\omega_1 + \omega_{l-1}, 2\omega_1 + \omega_l, \omega_l$ $2\omega_{l-1}$	(3, 4) $2\omega_1 + 2\omega_{l-1} + \omega_l$ 1 соотношение
α_1	α_i, α_l	(1, 1, 0) (2, 1, 0) (1, 0, 1) (2, 0, 1)	$\omega_{i-1}, \omega_{i+1}$ ω_i при $i > 1$ ω_{l-1} ω_l	(2, 1, 1) $\omega_i + \omega_l$ при $l - i > 1$ 0 соотношений; при $l - i = 1$ 1 соотношение
α_1	α_i, α_j $i < j < l$	(1, 1, 0) (2, 1, 0) (1, 0, 1) (2, 0, 1)	$\omega_{i-1}, \omega_{i+1}$ ω_i при $i > 1$ $\omega_{j-1}, \omega_{j+1}$ ω_j	(2, 1, 1) $\omega_i + \omega_j$ при $j - i > 1$ 0 соотношений; при $j - i = 1$ 1 соотношение
Sp₄				
α_2	α_1	(1, 1, 0) (1, 2, 0) (1, 0, 1)	ω_1 ω_2 0, $2\omega_1$	(2, 1, 1) $2\omega_1 + \omega_2$ 1 соотношение
Sp₆				
α_3	α_2	(1, 1) (1, 2) (2, 2)	$\omega_1, \omega_1 + \omega_2$ $2\omega_1 + \omega_3, \omega_3$ $2\omega_2$	(3, 4) $2\omega_1 + 2\omega_2 + \omega_3$ 1 соотношение
SO_{2l}, (l ≥ 4)				
α_1	α_i, α_j $i < j < l - 2$	(1, 1, 0) (2, 1, 0) (1, 0, 1) (2, 0, 1)	$\omega_{i-1}, \omega_{i+1}$ ω_i при $i > 1$ $\omega_{j-1}, \omega_{j+1}$ ω_j	(2, 1, 1) $\omega_i + \omega_j$ при $j - i > 1$ 0 соотношений; при $j - i = 1$ 1 соотношение
α_1	α_i, α_{l-2} $i < l - 2$	(1, 1, 0) (2, 1, 0) (1, 0, 1) (2, 0, 1)	$\omega_{i-1}, \omega_{i+1}$ ω_i при $i > 1$ $\omega_{l-3}, \omega_{l-1} + \omega_l$ ω_{l-2}	(2, 1, 1) $\omega_i + \omega_{l-2}$ при $l - 2 - i > 1$ 0 соотношений; при $l - 2 - i = 1$ 1 соотношение
α_1	$\alpha_i, \alpha_j, \alpha_l$ $i < j < l - 2$	(1, 1, 0, 0) (2, 1, 0, 0) (1, 0, 1, 0) (2, 0, 1, 0) (1, 0, 0, 1)	$\omega_{i-1}, \omega_{i+1}$ ω_i при $i > 1$ $\omega_{j-1}, \omega_{j+1}$ ω_j ω_{l-1}	(2, 1, 1, 0) $\omega_i + \omega_j$ при $j - i > 1$ 0 соотношений; при $j - i = 1$ 1 соотношение

α_1	$\alpha_i, \alpha_{l-2}, \alpha_l$ $i < l - 2$	(1, 1, 0, 0) (2, 1, 0, 0) (1, 0, 1, 0) (2, 0, 1, 0) (1, 0, 0, 1)	$\omega_{i-1}, \omega_{i+1}$ ω_i при $i > 1$ $\omega_{l-3}, \omega_{l-1} + \omega_l$ ω_{l-2} ω_{l-1}	(2, 1, 1, 0) $\omega_i + \omega_{l-2}$ при $l - 2 - i > 1$ 0 соотношений; при $l - 2 - i = 1$ 1 соотношение
α_1	$\alpha_i, \alpha_{l-1}, \alpha_l$ $i < l - 1$	(1, 1, 0, 0) (2, 1, 0, 0) (1, 0, 1, 0) (1, 0, 0, 1) (1, 0, 1, 1)	$\omega_{i-1}, \omega_{i+1}$ ω_i при $i > 1$ ω_l ω_{l-1} ω_{l-2}	(2, 1, 1, 1) $\omega_i + \omega_{l-1} + \omega_l$ при $l - 1 - i > 1$ 0 соотношений; при $l - 1 - i = 1$ 1 соотношение
SO₈				
α_4	α_2, α_4	(1, 1, 0) (2, 1, 0) (1, 0, 1)	$\omega_1 + \omega_3, \omega_4$ ω_2 0, ω_2	(2, 1, 1) $\omega_2 + \omega_4$ 1 соотношение
α_4	$\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$	(1, 1, 0, 0) (1, 0, 1, 0) (1, 0, 0, 1) (1, 1, 1, 0)	ω_3 ω_1 0, ω_2 ω_2	(2, 1, 1, 1) $\omega_1 + \omega_3 + \omega_4$ 0 соотношений
α_4	$\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$	(1, 1, 0, 0) (2, 1, 0, 0) (1, 0, 1, 0) (1, 0, 0, 1)	$\omega_1 + \omega_3, \omega_4$ ω_2 ω_1 0, ω_2	(2, 1, 0, 1) $\omega_2 + \omega_4$ 1 соотношение
α_4	$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$	(1, 1, 0, 0) (1, 0, 1, 0) (2, 0, 1, 0) (1, 0, 0, 1)	ω_3 $\omega_1 + \omega_3, \omega_4$ ω_2 0, ω_2	(2, 0, 1, 1) $\omega_2 + \omega_4$ 1 соотношение
α_4	$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$	(1, 1, 0, 0) (1, 0, 1, 0) (2, 0, 1, 0) (1, 0, 0, 1) (1, 1, 0, 1)	ω_3 $\omega_1 + \omega_3, \omega_4$ ω_2 ω_1 ω_2	(2, 1, 1, 1) $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3$ 1 соотношение
SO₁₀				
α_5	α_2, α_5	(1, 1, 0) (2, 1, 0) (1, 0, 1) (1, 1, 1) (2, 1, 1)	$\omega_1 + \omega_4, \omega_5$ ω_3 ω_1, ω_3 ω_3 $\omega_2 + \omega_4$	(2, 1, 1) $\omega_3 + \omega_5$ 1 соотношение
α_5	α_2, α_4	(1, 1, 0) (2, 1, 0) (1, 0, 1) (1, 1, 1)	$\omega_1 + \omega_4, \omega_5$ ω_3 0, ω_2 $\omega_1 + \omega_3$	(2, 1, 1) $\omega_2 + \omega_5$ 0 соотношений

α_5	α_3, α_5	$(1, 1, 0)$ $(2, 1, 0)$ $(1, 0, 1)$	$\omega_1 + \omega_5, \omega_2 + \omega_4, \omega_4$ $\omega_1 + \omega_3, \omega_2$ ω_1, ω_3	$(2, 1, 1)$ $\omega_1 + \omega_3 + \omega_5$ 1 соотношение
α_5	α_3, α_4	$(1, 1, 0)$ $(2, 1, 0)$ $(1, 0, 1)$	$\omega_1 + \omega_5, \omega_2 + \omega_4, \omega_4$ $\omega_1 + \omega_3, \omega_2$ $0, \omega_2$	$(2, 1, 1)$ $\omega_2 + \omega_4$ 1 соотношение
SO₁₂				
α_4	α_6	$(1, 1)$ $(1, 2)$	$\omega_1 + \omega_5, \omega_2 + \omega_6, \omega_3 + \omega_5, \omega_6$ $\omega_1 + \omega_3, \omega_2, \omega_2 + \omega_4, \omega_4$	$(2, 3)$ $\omega_2 + \omega_4 + \omega_6$ 1 соотношение
SO_{2l+1}, ($l \geq 3$)				
α_2	α_l $l \geq 4$	$(1, 1)$ $(1, 2)$ $(2, 2)$	$\omega_1 + \omega_l, \omega_l$ $\omega_1 + \omega_{l-1}, \omega_{l-2}, \omega_{l-1}$ $\omega_1 + \omega_{l-1}$	$(2, 3)$ $\omega_1 + \omega_{l-1} + \omega_l$ 1 соотношение
α_1	α_i, α_j $i < j < l - 1$	$(1, 1, 0)$ $(2, 1, 0)$ $(1, 0, 1)$ $(2, 0, 1)$	$\omega_{i-1}, \omega_{i+1}$ ω_i при $i > 1$ $\omega_{j-1}, \omega_{j+1}$ ω_j	$(2, 1, 1)$ $\omega_i + \omega_j$ при $j - i > 1$ 0 соотношений; при $j - i = 1$ 1 соотношение
α_1	α_i, α_{l-1} $i < l - 1$	$(1, 1, 0)$ $(2, 1, 0)$ $(1, 0, 1)$ $(2, 0, 1)$	$\omega_{i-1}, \omega_{i+1}$ ω_i при $i > 1$ $\omega_{l-2}, 2\omega_l$ ω_{l-1}	$(2, 1, 1)$ $\omega_i + \omega_{l-1}$ при $l - 1 - i > 1$ 0 соотношений; при $l - 1 - i = 1$ 1 соотношение
α_1	α_i, α_l	$(1, 1, 0)$ $(2, 1, 0)$ $(1, 0, 1)$ $(1, 0, 2)$	$\omega_{i-1}, \omega_{i+1}$ ω_i при $i > 1$ ω_l ω_{l-1}	$(2, 1, 2)$ $\omega_i + 2\omega_l$ при $l - i > 1$ 0 соотношений; при $l - i = 1$ 1 соотношение
SO₇				
α_2	α_3	$(1, 1)$ $(1, 2)$	$\omega_1 + \omega_3, \omega_3$ $\omega_1 + \omega_2, \omega_1, \omega_2$	$(2, 3)$ $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3$ 1 соотношение
E₆				
α_1	α_1, α_2	$(1, 1, 0)$ $(1, 0, 1)$ $(2, 0, 1)$	ω_2, ω_5 $\omega_1 + \omega_5, \omega_3, \omega_6$ $\omega_2 + \omega_5, \omega_4$	$(2, 1, 1)$ $\omega_1 + \omega_2 + \omega_5$ 1 соотношение
α_1	α_1, α_6	$(1, 1, 0)$ $(1, 0, 1)$ $(2, 0, 1)$	ω_2, ω_5 ω_1, ω_4 ω_2	$(2, 1, 1)$ $\omega_1 + \omega_2$ 0 соотношений

		(2, 1, 1)	ω_3	
α_1	α_4, α_5	(1, 1, 0)	$\omega_2, \omega_5, \omega_5 + \omega_6$	(2, 1, 1)
		(2, 1, 0)	ω_3, ω_6	$\omega_5 + \omega_6$
		(1, 0, 1)	$0, \omega_6$	1 соотношение
α_1	α_5, α_6	(1, 1, 0)	$0, \omega_6$	(2, 1, 1)
		(1, 0, 1)	ω_1, ω_4	$\omega_1 + \omega_6$
		(2, 0, 1)	ω_2	0 соотношений
		(1, 1, 1)	ω_3	
E₇				
α_1	α_2	(1, 1)	$\omega_1, \omega_1 + \omega_6, \omega_3, \omega_7$	(3, 2)
		(2, 1)	$\omega_2, \omega_2 + \omega_6, \omega_5, \omega_6$	$\omega_1 + \omega_2 + \omega_6$
				1 соотношение

4. ОРБИТЫ БОРЕЛЕВСКОЙ ПОДГРУППЫ НА КРАТНОМ МНОГООБРАЗИИ ФЛАГОВ

Как обсуждалось выше в разделе 2.1, орбиты борелевской подгруппы B на многообразии флагов G/P — это клетки Шуберта. Они параметризуются смежными классами в группе Вейля W/W^I ; две клетки Шуберта примыкают (т.е. их замыкания вложены одно в другое) тогда и только тогда, когда соответствующие элементы группы Вейля сравнимы в смысле порядка Брюа. Кроме того, замыкания этих орбит — многообразия Шуберта — нормальны, коэномаклеевы и обладают рациональными особенностями.

Теперь рассмотрим множество B -орбит на произвольном сферическом кратном многообразии флагов. В связи с ними возникает аналогичный набор вопросов: как описать это множество комбинаторно? Когда одна орбита лежит в замыкании другой? Что можно сказать о геометрии этих замыканий, в частности, об их множествах особенностей?

Ответы на эти вопросы известны лишь для некоторых сферических кратных многообразий флагов. Эти результаты изложены в настоящем разделе.

4.1. Прямое произведение двух грассманианов. Пусть группа $G = \mathrm{GL}(n)$ действует на прямом произведении двух грассманианов $X = \mathrm{Gr}(k, n) \times \mathrm{Gr}(l, n)$. Нам уже известно, что многообразие X является сферическим (см. теор. 3.1 выше). Наша ближайшая цель — дать комбинаторное описание B -орбит на X .

Группа G вложена диагональным образом в прямое произведение $G \times G$, где каждый экземпляр G действует на своем грассманиане. Легко описать орбиты борелевской подгруппы $B \times B \subset G \times G$: каждая такая орбита является прямым произведением двух клеток Шуберта $C_\alpha \times C_\beta \subset \mathrm{Gr}(k, n) \times \mathrm{Gr}(l, n)$, где (α, β) — пара диаграмм Юнга, вписанных в прямоугольники размера $k \times n - k$ и $l \times n - l$ соответственно.

Далее мы опишем, как $(B \times B)$ -орбита $C_\alpha \times C_\beta$ представляется в виде объединения B -орбит.

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ — диаграмма Юнга, при этом $n - k \geq \alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_k \geq 0$. По ней можно построить последовательность нулей и единиц $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ следующим образом:

$$a_i = \begin{cases} 1, & i = \alpha_k + 1, \alpha_{k-1} + \alpha_k + 2, \dots, \alpha_1 + \dots + \alpha_k + k, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Эту последовательность можно интерпретировать так: диаграмма Юнга, вписанная в прямоугольник размера $k \times n - k$, ограничена снизу ломаной, идущей из левого нижнего в правый верхний угол прямоугольника. i -е звено этой ломаной вертикально, если $a_i = 1$, и горизонтально в противном случае. В таком случае в последовательности будет k единиц и $n - k$ нулей.

Аналогичным образом по диаграмме $\beta \subset l \times n - l$ построим последовательность $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$, в которой будет ровно l единиц и $n - l$ нулей.

Определение 4.1. Пусть \mathbf{a}, \mathbf{b} — две последовательности нулей и единиц длины n . Инволютивную перестановку $w \in S_n$, $w^2 = \text{Id}$, назовем *согласованной* с парой (\mathbf{a}, \mathbf{b}) , если для всякого такого $i < n$, для которого $w(i) > i$, верно, что $a_i = b_i = 0$ и $a_{w(i)} = b_{w(i)} = 1$.

Теорема 4.2 ([51], см. также [34]). *Имеется биекция между B -орбитами $\mathcal{O} \subset C_\alpha \times C_\beta$ и инволютивными перестановками $w \in S_n$, согласованными с парой (\mathbf{a}, \mathbf{b}) .*

Введем понятие *общей части* пары (\mathbf{a}, \mathbf{b}) . Это последовательность нулей и единиц $\mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (a_{i_1}, \dots, a_{i_r})$, где i_1, \dots, i_r суть в точности те индексы, для которых соответствующие члены последовательностей \mathbf{a} и \mathbf{b} совпадают: $a_{i_1} = b_{i_1}, \dots, a_{i_r} = b_{i_r}$. Последовательность \mathbf{c} может иметь длину от 0 до n (в частности, может быть пустой).

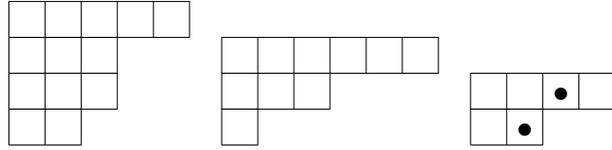
Определение 4.3. *Общая диаграмма* для диаграмм Юнга α и β , отвечающих последовательностям \mathbf{a} и \mathbf{b} — это диаграмма Юнга $c(\lambda, \mu)$, построенная по последовательности $\mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Пример 4.4. Пусть $n = 9$, $k = 4$, $l = 3$. Возьмем $\alpha = (5, 3, 3, 2)$, $\beta = (6, 3, 1)$. Тогда $\mathbf{a} = (0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1)$, $\mathbf{b} = (0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1)$. Последовательности \mathbf{a} и \mathbf{b} совпадают на местах 1, 2, 4, 5, 7, 8, 9; при этом $\mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (0, 0, 1, 0, 0, 1)$, и $c(\alpha, \beta) = (4, 2)$.

Пусть $w = (i_1, j_1) \dots (i_s, j_s)$ — инволютивная перестановка, представленная в виде произведения независимых транспозиций, где $i_t < j_t$, и согласованная с парой (\mathbf{a}, \mathbf{b}) . Последнее условие значит, что $a_{i_1} = b_{i_1} = \dots = a_{i_s} = b_{i_s} = 0$, $a_{j_1} = b_{j_1} = \dots = a_{j_s} = b_{j_s} = 1$.

Инволютивные перестановки, согласованные с парой (\mathbf{a}, \mathbf{b}) , удобно изображать, отметив в общей диаграмме Юнга $c(\alpha, \beta)$ квадратики, отвечающие парам $(i_1, j_1), \dots, (i_s, j_s)$. При этом оказывается, что никакие два отмеченные квадратика не находятся в одной строке или в одном столбце (т.е. возникает *расстановка ладей* (каждый отмеченный квадратик диаграммы Юнга мы интерпретируем как шахматное поле, занятое ладьей, причем никакие две ладьи не атакуют друг друга)).

Пример 4.5. На рисунке изображены диаграммы Юнга α, β из примера 4.4, а также общая диаграмма $c(\alpha, \beta)$, на которой отмечены квадратик, отвечающие перестановке $w = (2, 4)(7, 9)$.



4.2. Порядок на B -орбитах, принадлежащих данной $(B \times B)$ -орбите. Пусть (\mathbf{a}, \mathbf{b}) — пара последовательностей нулей и единиц. Она определяет $(B \times B)$ -орбиту в $\text{Gr}(k, V) \times \text{Gr}(l, V)$, т.е. произведение двух клеток Шуберта $C_\alpha \times C_\beta$. Оно распадается в объединение B -орбит, которые нумеруются инволютивными перестановками, согласованными с парами (\mathbf{a}, \mathbf{b}) . Пусть $w, v \in S_n$ — две такие перестановки, $\mathcal{O}_w, \mathcal{O}_v \subset C_\alpha \times C_\beta$ — отвечающие им орбиты. Приведем критерий того, что $\mathcal{O}_w \subset \overline{\mathcal{O}_v}$.

Рассмотрим множество всех инволютивных перестановок из S_n (не обязательно согласованных с какой-либо парой (\mathbf{a}, \mathbf{b})). Каждой такой перестановке $w \in S_n$ сопоставим *матрицу рангов* $R(w) = (r_{ij}(w))$: это строго верхнетреугольная матрица порядка n с целыми неотрицательными коэффициентами, определенными правилом

$$r_{ij}(w) = \begin{cases} \#\{k \leq n \mid i \leq w(k) < k \leq j\}, & i < j; \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тождественной перестановке соответствует нулевая матрица рангов.

Пример 4.6. Пусть $w = (13)(26)(47) \in S_7$; тогда

$$R(w) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Введем на инволютивных перестановках частичный порядок \preceq (этот порядок не имеет ничего общего с порядком Брюа) следующим правилом: $w \preceq v$ тогда и только тогда, когда $r_{ij}(w) \leq r_{ij}(v)$ при всех $1 \leq i < j \leq n$. У этого порядка будет единственный минимальный элемент: тождественная перестановка; в случае $n \leq 3$ максимальных элементов будет более одного.

Теорема 4.7. [52] Пусть $\mathcal{O}_w, \mathcal{O}_v$ — две B -орбиты в одной и той же $(B \times B)$ -орбите в двойном грассманиане. Тогда $\mathcal{O}_w \subset \overline{\mathcal{O}_v}$ тогда и только тогда, когда $w \preceq v$.

Тот же порядок на инволюциях возникает в работах А. Мельниковой о верхнетреугольных нильпотентных матрицах с нулевым квадратом. А именно, пусть $X = \{x \in \mathfrak{n} \subset \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \mid x^2 = 0\}$ — множество таких матриц. Тогда группа $B \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ верхнетреугольных матриц действует на X сопряжениями, причем это действие имеет конечное число орбит. Как показано в работах [36], [37], эти орбиты параметризуются инволютивными перестановками в S_n , причем одна орбита лежит в замыкании другой тогда и только тогда, когда соответствующие перестановки сравнимы в смысле порядка \preceq . Эквивалентное описание того же порядка см. в [27, Sec. 2].

4.3. Слабый порядок на замыканиях B -орбит. Наша дальнейшая цель состоит в том, чтобы, используя явное комбинаторное описание B -орбит в двойных грассманианах, построить для их замыканий разрешения особенностей, аналогичные разрешениям Ботта–Самельсона.

Сначала изложим некоторые факты, относящиеся к сферическим многообразиям в целом. Пусть X — сферическое G -многообразие, Y — замыкание некоторой B -орбиты, $\alpha \in \Delta$ — простой корень группы G , а $P_\alpha = B \cup Bs_\alpha B$ — минимальная параболическая подгруппа, отвечающая корню α . Коразмерность B в P_α равна 1, и $P_\alpha/B \cong \mathbb{P}^1$. Возможна одна из двух ситуаций: либо $P_\alpha Y = Y$, либо $P_\alpha Y = Y'$, где $\dim Y' = \dim Y + 1$. Пусть имеет место вторая альтернатива. В таком случае будем говорить, что простой корень α *поднимает* замыкание орбиты Y до замыкания орбиты Y' . Это отношение можно продолжить до отношения порядка на множестве замыканий орбит многообразия X , называемого *слабым порядком*.

Определение 4.8. Будем говорить, что Y *не превосходит* Y' в смысле слабого порядка (обозначение: $Y \preceq Y'$), если существует такая последовательность минимальных параболических подгрупп $P_{\alpha_1}, \dots, P_{\alpha_r}$, для которой $Y' = P_{\alpha_r} \dots P_{\alpha_1} Y$.

Замечание 4.9. В случае, когда X — это многообразие полных флагов G/B , слабый порядок Брюа на X совпадает со слабым порядком Брюа на группе W , определенным в разделе 2.3: если $w = s_i v$, то для соответствующих многообразий Шуберта $X_w = P_{\alpha_i} X_v$.

Ясно, что если $Y \preceq Y'$, то $Y \subseteq Y'$. Обратное неверно: например, из сравнимости двух орбит в смысле слабого порядка следует, что они лежат в одной G -орбите, тогда как для порядка, задаваемого примыканиями орбит, это не обязательно так. Это объясняет термин «слабый порядок».

4.4. Параболическая индукция и разрешения Ботта–Самельсона.

Пусть замыкания орбит Y и Y' таковы, что $Y' = P_{\alpha} Y$, то есть Y поднимается до Y' минимальной параболической подгруппой P_{α} . Рассмотрим B -эквивариантное расслоение

$$P_{\alpha} \times^B Y = \{(p, y) \mid p \in P_{\alpha}, y \in Y\} / (p, y) \sim (pb^{-1}, by), \quad b \in B.$$

Это расслоение над \mathbb{P}^1 со слоем Y ; отображение проекции на базу есть проекция на первый сомножитель: $(p, x) \mapsto pB$.

Далее, из $P_{\alpha} \times^B Y$ имеется отображение в Y' :

$$\pi_{\alpha, Y}: P_{\alpha} \times^B Y \rightarrow Y', \quad (p, y) \mapsto py.$$

Это отображение, очевидно, является B -эквивариантным морфизмом алгебраических многообразий.

Следующее утверждение — стандартный факт из теории сферических многообразий (см. [46], [26, Lemma 3.2], [9]).

Теорема 4.10. *Отображение $\pi_{\alpha, Y}: P_{\alpha} \times^B Y \rightarrow Y'$ либо бирационально, либо прообраз точки общего положения состоит из двух точек.*

Оказывается, что для некоторых классов сферических многообразий отображение $\pi_{\alpha, Y}$ всегда бирационально. Это иногда позволяет строить для замыканий орбит в таких многообразиях разрешения особенностей. Впервые этот прием был применен к многообразиям Шуберта в многообразиях флагов в работе Р. Ботта и Х. Самельсона [6] в комплексно-аналитической ситуации; алгебраическая формулировка принадлежит Демазюру [15] и Хансену [22]. А именно, имеет место следующее предложение.

Предложение 4.11 (см., напр., [12]). *Пусть $X = G/P$ — многообразие флагов. Тогда:*

- (1) $Y_{\min} = eP \subset G/P$ является единственной минимальной орбитой для слабого порядка на X ;
- (2) Для любых замыканий орбит Y, Y' , для которых $Y' = P_{\alpha} Y$, отображение $\pi_{\alpha, Y}$ бирационально.

Это предложение позволяет построить разрешения особенностей для всех замыканий орбит. А именно, пусть $Y \subset X$ — замыкание некоторой B -орбиты. Поскольку $Y_{\min} \preceq Y$ (минимальная орбита для слабого порядка единственна, а следовательно, является наименьшей), существует такая последовательность минимальных параболических подгрупп, для которой $Y = P_{\alpha_r} \dots P_{\alpha_1} Y_{\min}$. В силу второй части предыдущего предложения отображение из итерированного \mathbb{P}^1 -расслоения, которое мы обозначим через Z , в Y

$$\pi_{\alpha_1, \dots, \alpha_r} : Z = P_{\alpha_r} \times^B P_{\alpha_{r-1}} \times^B \dots \times^B P_{\alpha_1} \times^B Y_{\min} \rightarrow Y$$

бирационально. Но Y_{\min} состоит из одной точки, т.е., в частности, является гладким многообразием. Значит, и итерированное \mathbb{P}^1 -расслоение над ним гладко. Тем самым имеет место следующий результат.

Теорема 4.12. $\pi_{\alpha_1, \dots, \alpha_r} : Z \rightarrow Y$ есть разрешение особенностей.

Замечание 4.13. Вообще говоря, последовательность параболических подгрупп, «поднимающих» Y_{\min} до Y , можно выбрать не единственным образом; соответственно, при этом могут получиться разные разрешения особенностей. Кроме того, можно действовать более экономно, беря вместо расслоений с базой \mathbb{P}^1 расслоения, базой которых является какой-либо больший грассманиан. Оказывается, что в случае, когда $X = \text{Gr}(k, n)$, в классе таких разрешений всегда есть так называемые *малые разрешения*. Это позволяет дать геометрическое описание полиномов Каждана–Люстига (и, в частности, доказать положительность их коэффициентов). Подробности см. в [57].

4.5. Двойные комикровесовые многообразия флагов.

Определение 4.14. Максимальная параболическая подгруппа P_α , ассоциированная с корнем $\alpha \in \Delta$, называется *комикровесовой* (cominuscule), если корень α входит в разложение старшего корня с коэффициентом 1. Двойственный корню α фундаментальный вес ω называется *комикровесом*. Многообразии флагов G/P_α в этом случае также называется *комикровесовым*.

Вот список комикровесов и соответствующих многообразий флагов для полупростых алгебраических групп каждого из типов:

A_n : Все фундаментальные веса являются комикровесами; $G/P_k \cong \text{Gr}(k, n+1)$.

B_n : ω_1 ; многообразии флагов $G/P_1 \cong Q^{2n-1}$ есть нечетномерная квадррика;

C_n : ω_n ; многообразии флагов $G/P_n \cong \text{LGr}(n)$ есть лагранжевы грассманианы;

D_n : $\omega_1, \omega_{n-1}, \omega_n$; многообразия флагов — квадрика $G/P_1 = Q^{2n-2}$ и ортогональные грассманианы $G/P_{n-1} \cong G/P_n \cong \text{OGr}(n)$.

E_6 : ω_1, ω_6 ; многообразие флагов — проективная плоскость Кэли $\mathbb{O}\mathbb{P}^2$;

E_7 : ω_7 ; многообразие флагов — $G_\omega(\mathbb{O}^3, \mathbb{O}^6)$ (см. [45], [29]).

Для групп типа E_8, F_4 и G_2 комикровесов нет.

Комикровесовые флаговые многообразия примечательны в силу ряда алгебраических и геометрических свойств, в том числе следующих:

- Унипотентный радикал подгруппы P_α абелев;
- Порядок Брюа на множестве B -орбит на G/P_α есть дистрибутивная решетка;
- Подгруппа Леви в P_α действует на касательном пространстве в точке eP с конечным числом орбит.

Из классификационной теоремы Литтельмана [31] (см. также раздел 3) следует

Теорема 4.15. *Всякое двойное комикровесовое многообразие флагов (т.е. прямое произведение двух комикровесовых флаговых многообразий) сферично относительно диагонального действия G .*

В работе [1] изучается геометрия замыканий B -орбит на двойных комикровесовых многообразиях флагов. Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 4.16 ([1, Theorem 1]). *Пусть G — группа с простыми связями (т.е. с простыми факторами типа A, D или E). Пусть $P, Q \subset G$ — комикровесовые параболические подгруппы, содержащие борелевскую подгруппу $B \subset G$, и $X = G/P \times G/Q$. Тогда замыкания B -орбит в X являются нормальными коэн-маколеевыми многообразиями и имеют рациональные особенности.*

В случае, когда G — группа типа A , двойное многообразие флагов есть произведение двух грассманианов. В этом случае нормальность и рациональность особенностей замыканий B -орбит были ранее доказаны Г. Бобиньским и Г. Зварой [3] с использованием теории представлений колчанов.

Для доказательства этого результата в общем случае авторы детально изучают структуру B -орбит на двойных комикровесовых многообразиях флагов и устанавливают два следующих факта, представляющих и самостоятельный интерес. Для случая двойных грассманианов эти факты были отмечены в работе [51].

Предложение 4.17. *B -орбиты на X , минимальные в смысле слабого порядка, являются $B \times B$ -инвариантными, т.е. тем самым являются произведениями многообразий Шуберта в G/P и G/Q .*

Предложение 4.18. *Пусть группа G содержит лишь простые факторы типа A, D, E , и пусть Y и Y' — замыкания B -орбит на $X = G/P \times G/Q$, сравнимые в смысле слабого порядка, причем*

$\dim Y' = \dim Y + 1$ (т.е. $Y' = P_\alpha Y$ для некоторой минимальной параболической подгруппы P_α). Тогда отображение $P \times^B Y \rightarrow Y'$ бирационально.

Это предложение позволяет построить для замыканий B -орбит на X разрешение особенностей, аналогичное разрешению Ботта–Самельсона (теорема 4.12).

А именно, пусть Y — замыкание некоторой B -орбиты. Рассмотрим замыкание орбиты Y_{\min} , минимальной в смысле слабого порядка, для которой $Y_{\min} \preceq Y$. Иными словами, существует такая последовательность минимальных параболических подгрупп, для которой $Y = P_{\alpha_r} \dots P_{\alpha_1} Y_{\min}$. В силу предыдущего предложения, отображение

$$\pi_{\alpha_1, \dots, \alpha_r} : P_{\alpha_r} \times^B P_{\alpha_{r-1}} \times^B \dots \times^B P_{\alpha_1} \times^B Y_{\min} \rightarrow Y$$

бирационально.

Отличие от случая многообразий флагов состоит в том, что, во-первых, минимальная орбита, меньшая данной в смысле слабого порядка, может быть не единственна, и, во-вторых, замыкание орбиты Y_{\min} может быть особым. Однако в силу предложения 4.17 все замыкания минимальных орбит Y_{\min} являются $B \times B$ -инвариантными многообразиями, т.е. произведениями многообразий Шуберта в G/P и G/Q . Взяв прямое произведение разрешений Ботта–Самельсона для этих многообразий, мы получаем бирациональный изоморфизм $\pi_{\min} : Z_{\min} \rightarrow Y_{\min}$, где Z_{\min} гладко. Тем самым сквозное отображение

$$\begin{array}{c} P_{\alpha_r} \times^B P_{\alpha_{r-1}} \times^B \dots \times^B P_{\alpha_1} \times^B Z_{\min} \xrightarrow{\text{Id} \times \pi_{\min}} \\ \xrightarrow{\text{Id} \times \pi_{\min}} P_{\alpha_r} \times^B P_{\alpha_{r-1}} \times^B \dots \times^B P_{\alpha_1} \times^B Y_{\min} \xrightarrow{\pi_{\alpha_1, \dots, \alpha_r}} Y \end{array}$$

— это бирациональный изоморфизм гладкого многообразия и Y , т.е. разрешение особенностей.

Конструкция этого разрешения особенностей является ключевым шагом для доказательства теоремы 4.16. Дальнейшее доказательство нормальности, коэн–маколеевости и рациональности особенностей замыканий B -орбит существенно опирается на факты о сферических многообразиях, приведенные в работах [9] и [10], и в целом следует исходному доказательству нормальности многообразий Шуберта в G/P , принадлежащему Сешадри (см. его изложение, например, в книге [12]).

Требование наличия у G простых связей является существенным для теоремы 4.16. Пусть $G = \text{Sp}(3)$ действует стандартным образом на пространстве \mathbb{C}^6 с невырожденной кососимметричной билинейной формой, а подгруппа P есть стабилизатор максимального (трехмерного) изотропного подпространства в \mathbb{C}^6 . Тогда многообразии G/P есть лагранжевы грассманиан $LGr(3, 6)$. В работе [1,

Прор. 5.1] приводится пример B -орбиты в $G/P \times G/P$, замыкание которой не является нормальным. Также для этого примера не выполняется предложение 4.18: для некоторых отображений $P \times^B Y \rightarrow Y'$ слой общего положения состоит из двух точек (т.е. эти отображения не бирациональны).

5. G -ОРБИТЫ НА КРАТНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ ФЛАГОВ

5.1. Кратные многообразия флагов с конечным числом G -орбит. В предыдущих разделах рассматривались орбиты борелевской подгруппы $B \subset G$, действующей диагонально на прямом произведении двух многообразий флагов $X = G/P_1 \times G/P_2$. Эти орбиты находятся во взаимно-однозначном соответствии с орбитами группы G , диагонально действующей на произведении трех многообразий флагов $G/P_1 \times G/P_2 \times G/B$; это соответствие сохраняет отношение примыкания орбит. Иными словами, многообразие X сферично тогда и только тогда, когда группа G действует на $X \times G/B$ с конечным числом орбит.

Эту ситуацию можно обобщить, взяв вместо $X \times G/B$ произвольный набор многообразий флагов G/P_i . Возникает следующий вопрос:

Проблема 5.1. *Для каких наборов параболических подгрупп (P_1, \dots, P_r) группа G действует на $G/P_1 \times \dots \times G/P_r$ с конечным числом орбит? Как описать орбиты этого действия в комбинаторных терминах?*

Ответ на этот вопрос был дан для групп $GL(n)$ и $Sp(2n)$ в работах П. Мадьяра, Е. Веймана и А. В. Зелевинского [34], [35]. Для произвольной редуктивной группы (в том числе для ортогональной) классификация таких троек параболических подгрупп пока неизвестна.

Критерий Мадьяра, Веймана и Зелевинского конечности числа орбит на кратном многообразии флагов типа A использует идеи и результаты из теории колчанов; этот результат весьма схож с принадлежащим П. Габриэлю [21] описанием колчанов конечного типа. Приведем здесь его формулировку.

Определение 5.2. *Разложением целого неотрицательного числа n называется упорядоченный набор целых неотрицательных чисел $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_p)$, сумма которых равна n . Эти числа называются частями разложения. Наименьшее из чисел a_1, \dots, a_p называется минимумом разложения и обозначается через $\min(\mathbf{a})$.*

Каждому разложению \mathbf{a} соответствует многообразие частичных флагов $\text{Fl}_{\mathbf{a}}$ группы $GL(n)$, состоящее из флагов $V_1 \subset \dots \subset V_p \cong \mathbb{C}^n$, для которых $\dim V_i/V_{i-1} = a_i$. Будем говорить, что набор разложений $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$ одного и того же числа n имеет *конечный тип*, если

группа $GL(n)$, действующая диагонально на $Fl_{\mathbf{a}_1} \times \cdots \times Fl_{\mathbf{a}_k}$, имеет конечное число орбит. Кроме того, назовем разложение, состоящее из одной компоненты, *тривиальным*; ему соответствует одноточечное многообразие флагов. Поэтому все разложения в данном наборе можно считать нетривиальными.

Теорема 5.3. *Если набор нетривиальных разложений $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$ имеет конечный тип, то $k \leq 3$.*

Доказательство (набросок). Для доказательства того, что любая четверка нетривиальных разбиений не имеет конечный тип, достаточно проверить это для «самой маленькой» четверки — а именно, четырех разбиений числа 2 вида $(1, 1)$. В этом случае соответствующее кратное многообразие флагов будет произведением четырех копий \mathbb{P}^1 . А четверки точек на \mathbb{P}^1 с точностью до действия группы $GL(2)$ задаются их двойным отношением, которое может принимать бесконечное множество значений. \square

Итак, всякий набор разложений конечного типа имеет не более трех компонент. При необходимости добавляя тривиальные компоненты, будем считать, что их ровно три. Обозначим их через $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$. Пусть p, q, r — число частей в этих разложениях; без ограничения общности будем считать, что $p \leq q \leq r$.

Теорема 5.4. *Тройка разложений $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ имеет конечный тип тогда и только тогда, когда она принадлежит к одному из следующих классов:*

$$\begin{aligned} A_{p,q}: (p, q, r) &= (1, q, r), \quad 1 \leq q \leq r; \\ D_{r+2}: (p, q, r) &= (2, 2, r), \quad 2 \leq r; \\ E_6: (p, q, r) &= (2, 3, 3); \\ E_7: (p, q, r) &= (2, 3, 4); \\ E_8: (p, q, r) &= (2, 3, 5); \\ E_{r+3}^{(a)}: (p, q, r) &= (2, 3, r), \quad 3 \leq r, \min(\mathbf{a}) = 2; \\ E_{r+3}^{(b)}: (p, q, r) &= (2, 3, r), \quad 3 \leq r, \min(\mathbf{b}) = 1; \\ S_{p,q}: (p, q, r) &= (2, q, r), \quad 2 \leq q \leq r, \min(\mathbf{a}) = 1. \end{aligned}$$

5.2. Описание орбит. В этом разделе мы приводим комбинаторное описание множества $GL(V)$ -орбит на $Fl_{\mathbf{a}}(V) \times Fl_{\mathbf{b}}(V) \times Fl_{\mathbf{c}}(V)$ для каждой тройки разложений, имеющей конечный тип. Для разложения $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_p)$ (которое, возможно, включает нулевые части) запишем

$$|\mathbf{a}| = a_1 + \cdots + a_p, \quad \|\mathbf{a}\|^2 = a_1^2 + \cdots + a_p^2.$$

Число частей p назовём *длиной* разложения и обозначим через $\ell(\mathbf{a})$.

Для данной тройки (p, q, r) обозначим через $\Lambda_{p,q,r}$ аддитивную полугруппу всех троек разложений $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$, для которых $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| = n$, $(\ell(\mathbf{a}), \ell(\mathbf{b}), \ell(\mathbf{c})) = (p, q, r)$ («полугруппа положительных

корней»). Определим *квадратичную форму Титса* как

$$Q(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \dim \mathrm{GL}(V) - \dim \mathrm{Fl}_{\mathbf{a}}(V) - \dim \mathrm{Fl}_{\mathbf{b}}(V) - \dim \mathrm{Fl}_{\mathbf{c}}(V),$$

где $\dim V = |\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| = n$. Простое вычисление показывает, что

$$Q(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \frac{1}{2}(\|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 + \|\mathbf{c}\|^2 - n^2).$$

Определим множество «простых корней» $\Pi_{p,q,r}$ как множество таких $\mathbf{d} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$, для которых $Q(\mathbf{d}) = 1$.

Следующая теорема позволяет свести описание орбит к чисто комбинаторной задаче.

Теорема 5.5. Пусть $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \in \Lambda_{p,q,r}$ — тройка разложений конечного типа. Тогда $\mathrm{GL}(V)$ -орбиты в $\mathrm{Fl}_{\mathbf{a}}(V) \times \mathrm{Fl}_{\mathbf{b}}(V) \times \mathrm{Fl}_{\mathbf{c}}(V)$ биективно соответствуют наборам целых неотрицательных чисел $(m_{\mathbf{d}})$, где $\mathbf{d} \in \Pi_{p,q,r}$, для которых в полугруппе $\Lambda_{p,q,r}$ имеет место равенство

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \sum m_{\mathbf{d}} \mathbf{d}.$$

Множество $\Pi_{p,q,r}$ также имеет явное описание. Пусть \mathbf{a} — разложение. Обозначим через \mathbf{a}^+ разбиение, полученное из него удалением нулевых частей и упорядочением остальных частей по убыванию. Обозначим $\underbrace{(a, \dots, a)}_{p \text{ раз}} = (a^p)$.

Теорема 5.6. Тройка $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \in \Lambda_{p,q,r}$ принадлежит $\Pi_{p,q,r}$ тогда и только тогда, когда тройка разбиений $(\mathbf{a}^+, \mathbf{b}^+, \mathbf{c}^+)$ с точностью до порядка принадлежит следующему списку:

- $\{(1, 1, 1)\}$;
- $\{(3^2), (2^3), (2, 1, 1, 1, 1)\}$;
- $\{(4, 2), (2^3), (1^6)\}$;
- $\{(m+1, m), (m, m, 1), (1^{2m+1})\}$, $m \geq 2$;
- $\{(m, m), (m-1, m, 1), (1^{2m})\}$, $m \geq 2$;
- $\{(m-1, 1), (1^m), (1^m)\}$, $m \geq 2$.

Биекция в теореме 5.5 имеет следующую категорную интерпретацию. Рассмотрим аддитивную категорию, которую мы обозначим через $\mathcal{F}_{p,q,r}$. Ее объектами будут семейства $(V; A, B, C)$, где V — векторное пространство, (A, B, C) — тройка флагов в V , принадлежащая кратному многообразию флагов $\mathrm{Fl}_{\mathbf{a}}(V) \times \mathrm{Fl}_{\mathbf{b}}(V) \times \mathrm{Fl}_{\mathbf{c}}(V)$ для некоторого набора $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \in \Lambda_{p,q,r}$. Набор $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ называется *вектором размерности* объекта. Морфизм из объекта $(V; A, B, C)$ в объект $(V'; A', B', C')$ — это линейное отображение $f: V \rightarrow V'$, для которого $f(A_i) \subset A'_i$, $f(B_i) \subset B'_i$, $f(C_i) \subset C'_i$ при всех i ; прямые суммы определяются покомпонентно.

Категория $\mathcal{F}_{p,q,r}$ тем самым реализуется как подкатегория в категории представлений колчана $Q_{p,q,r}$ с $p+q+r-2$ вершинами, состоящего из трех ветвей длины p , q и r , причем стрелки на каждой

ветви направлены в сторону центральной вершины. Эта подкатегория выделяется следующим условием: все «стрелки», т.е. отображения между векторными пространствами, отвечающими вершинам колчана, являются вложениями. Это аддитивная подкатегория, замкнутая относительно взятия расширений, но не факторов (если $I, J \in \mathcal{F}_{p,q,r}$ — два объекта, причем $I \subset J$, то фактор J/I не обязан лежать в $\mathcal{F}_{p,q,r}$).

Классы изоморфизма объектов из $\mathcal{F}_{p,q,r}$ с заданным вектором размерности $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ совпадают с орбитами действия $\mathrm{GL}(V)$ на $\mathrm{Fl}_{\mathbf{a}}(V) \times \mathrm{Fl}_{\mathbf{b}}(V) \times \mathrm{Fl}_{\mathbf{c}}(V)$. Поэтому конечность числа орбит равносильна конечности числа классов изоморфизмов объектов с заданным вектором размерности из $\mathcal{F}_{p,q,r}$. Объекты в этой категории представляются в виде прямых сумм неразложимых объектов; по теореме Крулля–Ремака–Шмидта, такое разложение единственно с точностью до автоморфизма $(V; A, B, C)$. Тем самым класс изоморфизма объекта определяется набором кратностей неразложимых объектов, входящих в его разложение. Более того, оказывается, что неразложимый объект однозначно задается своим вектором размерности. Поэтому если список неразложимых объектов для данной категории известен, то задача классификации орбит $\mathrm{GL}(V)$ на $\mathrm{Fl}_{\mathbf{a}}(V) \times \mathrm{Fl}_{\mathbf{b}}(V) \times \mathrm{Fl}_{\mathbf{c}}(V)$ сводится к чисто комбинаторной задаче представления вектора размерности $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ в виде целочисленной положительной линейной комбинации векторов размерности неразложимых объектов. Отметим также, что если колчан $Q_{p,q,r}$ является колчаном конечного типа (т.е. его граф есть схема Дынкина типа A, D, E), отсюда автоматически следует, что число орбит конечно; это первые пять случаев в теореме 5.4.

Теорема 5.7. *Для всякого $\mathbf{d} \in \Pi_{p,q,r}$ существует единственный класс изоморфизма $I_{\mathbf{d}} \in \mathcal{F}_{p,q,r}$ с вектором размерности \mathbf{d} . Для каждой тройки конечного типа $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \in \Lambda_{p,q,r}$ всякий объект с вектором размерности $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ однозначно разлагается в прямую сумму объектов вида $I_{\mathbf{d}}$.*

Кроме того, помимо перечисления орбит действия $\mathrm{GL}(V)$ на кратном многообразии флагов, приводится способ указать по конкретному представителю в каждой из орбит; см. [34, Theorem 2.9].

Пример 5.8. Рассмотрим многообразие типа $A_{q,r}$, т.е. прямое произведение двух многообразий флагов $\mathrm{Fl}_{\mathbf{b}}(V) \times \mathrm{Fl}_{\mathbf{c}}(V)$. Пусть $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_q)$, $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_r)$. Пара флагов (B, C) соответствует объекту $(V; A, B, C)$ в категории $\mathcal{F}_{1,q,r}$, где A — тривиальный флаг $0 = A_0 \subset A_1 = V$. Согласно теореме 5.5, неразложимые объекты в этой категории имеют приведенный вектор размерности $(1, 1, 1)$, то есть имеют вид $I_{ij} = (V'; A', B', C')$, где $i \leq q$, $j \leq r$; при этом $\dim V' = 1$, $B' = (0 = B'_0 = \dots = B'_{i-1} \subset B_i = \dots = B_q = V'$,

$C' = (0 = C'_0 = \dots = C'_{j-1} \subset C_j = \dots = C_r = V'$ (т.е. единственный скачок размерности происходит на i -м и j -м местах).

Отсюда следует, что $\mathrm{GL}(V)$ -орбиты в $\mathrm{Fl}_{\mathbf{b}}(V) \times \mathrm{Fl}_{\mathbf{c}}(V)$ параметризуются матрицами (m_{ij}) размера $q \times r$ с целыми неотрицательными элементами, сумма которых по строкам равна b_1, \dots, b_q , а по столбцам — c_1, \dots, c_r . Такой орбите отвечает прямая сумма неразложимых объектов $\bigoplus_{i,j} m_{ij} I_{ij}$. В частности, если $\mathbf{b} = \mathbf{c} = (1^n)$, то мы имеем дело с произведением двух полных флагов, орбиты в котором нумеруются матрицами перестановок (они находятся в биекции с многообразиями Шуберта на G/B).

5.3. Примыкание орбит на кратных многообразиях флагов.

Следующий естественный вопрос — это описание обобщенного порядка Брюа на кратном многообразии флагов: при каких условиях одна G -орбита на $X = \mathrm{Fl}_{\mathbf{a}}(V) \times \mathrm{Fl}_{\mathbf{b}}(V) \times \mathrm{Fl}_{\mathbf{c}}(V)$ лежит в замыкании другой? Он тоже допускает ответ в терминах категории $\mathcal{F}_{p,q,r}$.

Пусть Ω_F и $\Omega_{F'}$ — две G -орбиты на X , отвечающие классам изоморфизма объектов M и M' в категории $\mathcal{F}_{p,q,r}$ (в смысле теоремы 5.5). Будем говорить, что $F \stackrel{\mathrm{deg}}{<} F'$, если $\Omega_F \subset \overline{\Omega_{F'}}$. Будем называть такой частичный порядок *порядком примыкания*.

Имеет место следующий результат, принадлежащий К. Ридтман [47].

Предложение 5.9. *Если $F \stackrel{\mathrm{deg}}{<} F'$, то для любого неразложимого объекта $I_{\mathbf{d}}$, где $\mathbf{d} \in \Pi_{p,q,r}$, имеет место неравенство*

$$\dim \mathrm{Hom}(I_{\mathbf{d}}, F) \geq \dim \mathrm{Hom}(I_{\mathbf{d}}, F').$$

Представляет интерес вопрос, является ли это необходимое условие также и достаточным, т.е. следует ли из этих неравенств примыкание соответствующих орбит. Из результатов К. Бонгарца [4, §2], [5, §4] следует, что это так в случае, когда граф колчана $Q_{p,q,r}$ является схемой Дынкина, т.е. имеет тип A_n, D_n, E_6, E_7, E_8 . В случаях A_n и D_n это можно проверить и непосредственно (см. [52]). Кроме того, П. Мадьяр [33] показал, что эти неравенства определяют примыкание орбит и в случае колчана $S_{p,q}$.

5.4. Случай $S_{p,q}$. Этот интересный «внесерийный» случай отвечает $\mathrm{GL}(V)$ -многообразию $G/P_1 \times G/P_2 \times \mathbb{P}(V)$. Иначе говоря, группа $\mathrm{GL}(V)$ действует с конечным числом орбит на наборах, состоящих из двух флагов заданного типа и прямой в V . В частности, положив $P_1 = B, P_2 = P$, получаем, что многообразие $G/P \times \mathbb{P}(V)$ будет сферично. Впервые это было отмечено, по-видимому, М. Брионом [8].

В работе [33] П. Мадьяр приводит описание G -орбит на $G/B \times G/B \times \mathbb{P}(V)$ (они задаются «декорированными» перестановками, т.е. перестановками из S_n , где $n = \dim V$, в которых отмечено некоторое подмножество в $\{1, \dots, n\}$) и доказывает простой критерий,

формулируемый в линейно-алгебраических терминах и позволяющий определить, когда одна G -орбита лежит в замыкании другой. Он также описывает накрывающие соотношения, т.е. пары орбит, меньшая из которых лежит в замыкании большей и имеет в ней коразмерность 1.

Это сферическое многообразие играет важную роль в описании *мираболического соответствия Робинсона–Шенстеда–Кнута*, см. [56], [18].

5.5. Симплектические кратные многообразия флагов конечного типа. В работе [35] проблема 5.1 была решена для случая группы $G = \mathrm{Sp}_{2n}$. Кроме того, по аналогии со случаем $G = \mathrm{GL}(V)$ удается свести задачу перечисления орбит на кратном многообразии флагов к чисто комбинаторной и указать в каждой из орбит по конкретному представителю.

Основным инструментом для этого является следующее (достаточно неожиданное) наблюдение: оказывается, два кратных флага в симплектическом $2n$ -мерном пространстве V лежат в одной Sp_{2n} -орбите тогда и только тогда, когда они лежат в одной GL_{2n} -орбите. Тем самым задача по существу сводится к случаю $\mathrm{GL}(V)$.

Приведём классификацию многообразий флагов конечного типа для группы Sp_{2n} . Пусть V — $2n$ -мерное симплектическое векторное пространство с невырожденной кососимметрической билинейной формой $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Группа автоморфизмов V , сохраняющих эту форму — это $\mathrm{Sp}(V) = \mathrm{Sp}_{2n}$. Подпространство $U \subset V$ называется *изотропным*, если $\langle U, U \rangle = 0$.

Пусть $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_p)$ — разложение числа $2n$, удовлетворяющее условию симметричности: $a_i = a_{p-i+1}$. Рассмотрим пространство флагов $0 = A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_p = V$, удовлетворяющих условию $\dim A_i/A_{i-1} = a_i$. Такой флаг называется *изотропным*, если он образован изотропными подпространствами и ортогоналами к ним; множество всех изотропных флагов мы будем обозначать через $\mathrm{Sp} \mathrm{Fl}_{\mathbf{a}}$:

$$\mathrm{Sp} \mathrm{Fl}_{\mathbf{a}} = \{A \in \mathrm{Fl}_{\mathbf{a}}(V) \mid \langle A_i, A_{p-i} \rangle = 0 \text{ при всех } i\}.$$

Мы получили реализацию многообразия частичных флагов Sp_{2n}/P . Многообразие полных флагов Sp_{2n}/B отвечает вектору размерности (1^{2n}) .

Набор симметричных разложений $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$ называется набором Sp_{2n} -конечного типа, если группа Sp_{2n} действует с конечным числом орбит на $\mathrm{Sp} \mathrm{Fl}_{\mathbf{a}_1} \times \dots \times \mathrm{Sp} \mathrm{Fl}_{\mathbf{a}_k}$.

Так же, как для случая $\mathrm{GL}(V)$, доказывается аналог теоремы 5.3: набор имеет конечный тип только при $k \leq 3$. Перечислим все тройки разложений $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$, для которых это так. Будем считать, что в разложения не входят нули, а число ненулевых слагаемых в них равно соответственно (p, q, r) , причем $p \leq q \leq r$.

Теорема 5.10. *Тройка разбиений $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ имеет Sp -конечный тип тогда и только тогда, когда она принадлежит к одному из следующих классов:*

$$\text{Sp } A_{p,q}: (p, q, r) = (1, q, r), 1 \leq q \leq r;$$

$$\text{Sp } D_{r+2}: (p, q, r) = (2, 2, r), 2 \leq r;$$

$$\text{Sp } E_6: (p, q, r) = (2, 3, 3);$$

$$\text{Sp } E_7: (p, q, r) = (2, 3, 4);$$

$$\text{Sp } E_8: (p, q, r) = (2, 3, 5);$$

$$\text{Sp } E_{r+3}^{(b)}: (p, q, r) = (2, 3, r), 3 \leq r, \text{ ненулевые части } \mathbf{b} \text{ равны } (1, 2n - 2, 1);$$

$$\text{Sp } Y_{r+4}: (p, q, r) = (3, 3, r), 3 \leq r, \text{ ненулевые части одного из трех разбиений равны } (1, 2n - 2, 1).$$

6. КРАТНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ ФЛАГОВ С ОТКРЫТОЙ G -ОРБИТОЙ

Как было указано в разд. 2.6, конечность числа B -орбит на G -многообразии X эквивалентна наличию на X открытой B -орбиты. Это, в свою очередь, эквивалентно наличию открытой G -орбиты на $X \times G/B$. Отметим, что для произвольной параболической подгруппы P это, вообще говоря, не будет верно: из наличия открытой P -орбиты на X не следует конечность числа P -орбит.

Возникает другой, значительно более общий вопрос:

Проблема 6.1. *Для каких кратных многообразий флагов $G/P_1 \times \dots \times G/P_d$ диагональное действие группы G имеет открытую орбиту?*

6.1. Локально n -транзитивные действия на многообразиях флагов. В работе В. Л. Попова [44] был получен ответ на этот вопрос в следующем важном частном случае:

Вопрос 6.2. *Пусть G — связная простая линейная алгебраическая группа, P — ее максимальная параболическая подгруппа. Для каких G и P группа G действует на $G/P \times G/P \times G/P$ с открытой орбитой?*

Этот вопрос служит мотивировкой для следующих определений.

Определение 6.3. Пусть n — целое положительное число, G — алгебраическая группа, действующая алгебраически на неприводимом алгебраическом многообразии X . Обозначим это действие через $\alpha: G \times X \rightarrow X$. Будем называть α *локально n -транзитивным*, если диагональное действие $\alpha^n: G \curvearrowright X^n$ локально транзитивно, т.е. имеет открытую орбиту. (Если уже исходное действие не было локально транзитивным, будем называть его *локально 0 -транзитивным*).

Неформально говоря, локальная n -транзитивность означает, что «почти любой» набор из n точек многообразия может быть переведен действием группы в «почти любой другой» набор. Ясно, что

из локальной n -транзитивности действия следует его локальная m -транзитивность при всех $0 < m \leq n$. Также очевидна оценка сверху: α не является локально n -транзитивным, если $n \dim X > \dim G$.

Определение 6.4. *Степенью локальной транзитивности действия α называется число*

$$\text{gtd}(\alpha) := \sup n,$$

где супремум берется по всем n , для которых α локально n -транзитивно. *Максимальной степенью транзитивности связной алгебраической группы называется величина*

$$\text{gtd}(G) := \sup \text{gtd}(\alpha),$$

где супремум берется по всем нетривиальным действиям α группы G на всевозможных неприводимых алгебраических многообразиях.

В работе [44] были получены следующие результаты относительно максимальной степени транзитивности связных алгебраических групп.

Теорема 6.5. *Пусть G — нетривиальная связная алгебраическая группа. Тогда:*

- (1) *если G разрешима, $\text{gtd}(G) \leq 2$;*
- (2) *если G нильпотентна, $\text{gtd}(G) = 1$;*
- (3) *если G — редуктивная группа и $\tilde{G} \rightarrow G$ — изогения, то $\text{gtd}(\tilde{G}) = \text{gtd}(G)$;*
- (4) *если $G = Z \times S_1 \times \cdots \times S_d$, где Z — алгебраический тор, а S_1, \dots, S_d — связные простые алгебраические группы, то*

$$\text{gtd}(G) = \max_i \text{gtd}(S_i);$$

- (5) *максимальная степень транзитивности простых групп G приведена в следующей таблице:*

$\min G$	A_l	B_l	C_l	D_l	E_6	E_7	E_8	F_4	G_2
$\text{gtd}(G)$	$l + 2$	3	3	3	4	3	2	2	2

Возникает вопрос, для каких многообразий связная редуктивная группа G действует «наиболее транзитивно», то есть для каких G -многообразий достигается указанный максимум. Утверждается, что среди таких многообразий всегда есть многообразие флагов, отвечающее некоторой максимальной параболической подгруппе.

Теорема 6.6. *Пусть G — связная неабелева редуктивная группа. Тогда имеется максимальная параболическая подгруппа $P \subset G$, для которой степень локальной транзитивности стандартного действия G на G/P равняется максимальной степени транзитивности $\text{gtd}(G)$ группы G .*

Следующая теорема говорит, чему равняется степень локальной транзитивности действия группы G для различных G/P . Ясно, что действие G на G/P всегда будет 2-транзитивным. Для некоторых параболических подгрупп, перечисленных в следующей таблице, эта степень транзитивности будет выше.

Теорема 6.7. Пусть G — простая группа, $d \geq 3$, P_i — максимальная параболическая подгруппа в G , отвечающая корню α_i . Тогда диагональное действие G на кратном многообразии флагов $(G/P_i)^n$ имеет открытую орбиту тогда и только тогда, когда $n \leq 2$ или тройка (G, n, i) указана в следующей таблице:

Тип G	(n, i)
A_l	$n < \frac{(l+1)^2}{i(l+1-i)}$
$B_l, l \geq 3$	$n = 3, i = 1, l$
$C_l, l \geq 2$	$n = 3, i = 1, l$
$D_l, l \geq 4$	$n = 3, i = 1, l-1, l$
E_6	$n = 3, 4, i = 1, 6$
E_7	$n = 3, i = 7$

Интересно, что действие группы типа A_l на грассманианах будет «наиболее транзитивным»: его степень локальной транзитивности может быть равна 5 и более, тогда как для остальных групп она может равняться только двум, трем и (лишь в случае группы E_6) четырем. А именно:

Следствие 6.8. Пусть G — связная простая алгебраическая группа типа A_l . Тогда:

$$\text{gtd}(G : G/P_i) \begin{cases} = 3, & \text{если } 2i = l + 1; \\ \geq 4 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Отсюда получается ответ на вопрос 6.2:

Следствие 6.9. Пусть G — связная простая линейная алгебраическая группа, P — максимальная параболическая подгруппа. G действует с открытой орбитой на $(G/P)^3$ тогда и только тогда, когда P сопряжена стандартной параболической подгруппе, отвечающей микровесу или комикровесу.

6.2. Случай параболических подгрупп, не являющихся максимальными. Результаты Попова были обобщены Р. А. Девятовым [17] на случай многообразий вида G/P , где G — простая алгебраическая группа, не являющаяся локально изоморфной SL_l , а P — произвольная (не обязательно максимальная) параболическая подгруппа.

Обозначим пересечение нескольких максимальных стандартных параболических подгрупп через $P_{i_1, \dots, i_s} = P_{i_1} \cap \dots \cap P_{i_s}$. Тогда имеет место такой результат.

Теорема 6.10 ([17]). Пусть G — простая алгебраическая группа, тип которой отличен от типа A_l , а $P = P_{i_1, \dots, i_s}$ — стандартная параболическая подгруппа в G , не являющаяся максимальной. Степень локальной транзитивности действия G на G/P равна 3 для случаев, перечисленных в таблице, и 2 для всех остальных случаев.

Тип G	P
$D_l, l \geq 5$ нечетно	$P_{1, l-1}, P_{1, l}$
$D_l, l \geq 4$ четно	$P_{1, l-1}, P_{1, l}, P_{l-1, l}$

Кроме того, в работе непосредственно проверяется, что для данных многообразий число G -орбит на $(G/P)^3$ будет бесконечно. Тем самым получается следующий результат.

Теорема 6.11. Пусть G — простая алгебраическая группа, $P \subset G$ — параболическая подгруппа, $n \geq 3$. Следующие условия эквивалентны:

- G действует на $(G/P)^n$ с конечным числом орбит;
- $n = 3$, P максимальна и на $(G/P)^n$ имеется открытая G -орбита;
- $n = 3$ и $G/P \times G/P$ сферично.

6.3. Произведения грассманианов с открытой $GL(n)$ -орбитой.

В работах Попова и Девятова изучалось действие группы G на произведении нескольких копий одного и того же многообразия флагов G/P . В работе И. Джошкуна, М. Хадиана и Д. В. Захарова [13] рассматривается действие группы $GL(n)$ на произведении нескольких, вообще говоря, различных грассманианов $X = Gr(d_1, n) \times \dots \times Gr(d_k, n)$ и дается частичный ответ на следующий вопрос, являющийся частным случаем проблемы 6.1.

Вопрос 6.12. Для каких наборов размерностей $(d_1, \dots, d_k; n)$ действие $GL(n)$ на $Gr(d_1, n) \times \dots \times Gr(d_k, n)$ имеет открытую орбиту? (Будем называть такой вектор размерности плотным).

Соображения размерности позволяют немедленно выписать следующее необходимое условие на существование такой орбиты:

$$\sum_{i=1}^k d_i(n - d_i) \leq n^2 - 1. \quad (*)$$

Наличие -1 в правой части связано с тем, что центр группы $GL(n)$ действует на X тривиально. Поэтому в дальнейшем мы будем говорить о действии не $GL(n)$, а $PGL(n)$.

Следующий пример показывает, что это условие не является достаточным.

Пример 6.13. Возьмем вектор $(1, 1, 2, 2; 3)$. Для него $X = \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^{2*} \times \mathbb{P}^{2*}$, $\dim X = 8 = \dim PGL(3)$, то есть необходимое условие выполнено.

Элемент X можно рассматривать как конфигурацию $(p_1, p_2, \ell_1, \ell_2)$ из двух точек и двух прямых в \mathbb{P}^2 . Покажем, что действие $\mathrm{PGL}(3)$ на таких четверках не имеет открытой орбиты. Пусть ℓ — прямая, содержащая p_1 и p_2 , а q_1 и q_2 — точки пересечения ℓ с ℓ_1 и ℓ_2 соответственно. Тогда двойное отношение точек p_1, p_2, q_1, q_2 на ℓ является $\mathrm{PGL}(3)$ -инвариантом; более того, фиксируя p_1 и p_2 и изменяя ℓ_1 и ℓ_2 , можно добиться того, чтобы этот инвариант принял бы любое значение. Значит, орбиты $\mathrm{PGL}(3)$ имеют коразмерность не менее 1.

Этот же пример допускает обобщение на случай произвольной размерности: возьмем вектор размерности $(1, 1, n-1, n-1; n)$ при $n \geq 3$. Для него $\dim X = 4(n-1) \leq n^2 - 1$; элементами X являются четверки (p_1, p_2, H_1, H_2) , состоящие из двух точек и двух гиперплоскостей в \mathbb{P}^{n-1} . Для таких четверок также имеется непрерывный инвариант: пусть $\ell = \langle p_1, p_2 \rangle$, $q_i = \ell \cap H_i$, $i = 1, 2$. Тогда двойное отношение четверки точек p_1, p_2, q_1, q_2 на прямой ℓ сохраняется действием $\mathrm{PGL}(n)$.

В обоих этих примерах удаётся найти меньшую конфигурацию подпространств, получаемых из исходной взятием сумм и пересечений, для которой неравенство (*) уже не будет выполнено. Действительно, четверка точек на прямой (p_1, p_2, q_1, q_2) — это элемент четырехмерного многообразия $(\mathbb{P}^1)^4$, на котором группа $\mathrm{PGL}(2)$, имеющая размерность 3, не может иметь открытую орбиту. Гипотетически, для любого произведения грассманианов, для которого действие $\mathrm{PGL}(n)$ не имеет открытую орбиту, можно указать «препятствие» к её наличию: такую конфигурацию подпространств, получаемую из исходной операциями суммы и пересечения, для которой неравенство (*) будет нарушаться.

Далее вопрос плотности или неплотности интересующих нас векторов размерности часто удается свести к вопросу плотности/неплотности векторов в меньшем пространстве. Следующее очевидное утверждение при этом часто выступает в качестве «базы индукции»:

Лемма 6.14. *Вектор размерности $(d_1, \dots, d_k; n)$ плотен, если*

$$\sum_{i=1}^k d_i \leq n.$$

Далее удастся классифицировать все векторы размерности с малым числом компонент. Как мы видели выше, группа $\mathrm{GL}(n)$ действует на прямом произведении не более чем трёх грассманианов с открытой орбитой — и даже с конечным числом орбит, см. раздел 5. Оказывается, что для четырех компонент плотны «почти все» векторы размерности.

Теорема 6.15. *Пусть \mathbf{d} — вектор размерности длины $k \leq 4$. Он не является плотным тогда и только тогда, когда $k = 4$ и $\mathbf{d} = (a, b, c, d; n)$, причем $a + b + c + d = 2n$.*

Доказательство. Приведем доказательство части «тогда». Во-первых, в том случае, когда $a = b = c = d = n/2$, открытой орбиты нет по соображениям размерности: $4(n/2)(n - n/2) = n^2 > n^2 - 1 = \dim \mathrm{PGL}(n)$.

Если a, b, c, d не все одинаковы, будем доказывать утверждение индукцией по $a + b + c + d = 2n$. Нам потребуется следующая лемма.

Лемма 6.16 ([13, Лемма 4.2]). *Пусть $\mathbf{d} = (a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_s; n)$ — вектор размерности, для которого $\sum_{i=1}^r a_i = n - k < n$ и $\sum_{j=1}^s (n - b_j) \leq n - k$. Тогда \mathbf{d} плотен тогда, когда плотен вектор $\mathbf{d}' = (a_1, \dots, a_r, b_1 - k, \dots, b_s - k; n - k)$.*

Можно считать (перенумеровывая пространства и, если нужно, переходя к их двойственным), что $a + b < n$. Теперь применим предыдущую лемму. Пусть $(V_1, V_2, V_3, V_4; V)$ — какая-то конфигурация векторных пространств, отвечающая вектору $(a, b, c, d; n)$. Рассмотрим $a + b$ -мерное пространство $W := V_1 + V_2$. Тогда конфигурация пространств $(V_1, V_2, W \cap V_3, W \cap V_4; W)$ отвечает вектору размерности $\mathbf{d}' = (a, b, a + b + c - n, a + b + d - n; a + b)$. Сумма его четырех компонент равна $2(a + b) < 2n$. Значит, вектор \mathbf{d}' неплотен по предположению индукции. Поэтому вектор \mathbf{d} также неплотен. \square

Аналогичные лемме 6.16 соображения позволяют привести алгоритм, при помощи которого можно получить полный список плотных векторов размерности, для которых $\max d_i$ не превосходит некоторого заданного числа l . Приведем ответ для $l \leq 3$. Будем обозначать a -кратное вхождение компоненты, равной d , через a^d .

Пусть $l = 1$. Этот случай тривиален: вектор $(1^r; n)$ является плотным при $r \leq n + 1$ и неплотным в противном случае (группа $\mathrm{PGL}(n)$ транзитивно действует на наборах из не более чем $n + 1$ точки).

Далее, рассмотрим случай $l = 2$, $\mathbf{d} = (1^a, 2^b; n)$ (т.е. конфигурации из a точек и b прямых на \mathbb{P}^{n-1}).

Теорема 6.17. *Ниже перечислены все плотные векторы размерности, максимальная компонента в которых не превосходит 2.*

- $(1^a, 2^b; n)$, где $a + 2b \leq n + 1$;
- $(1^a, 2^b; n)$, где $a + 2b = n + 2$ и $a \leq 3$;
- Конечное число «исключительных» векторов, для которых $a + 2b \geq n + 3$: $(2^3; 3)$, $(1, 2^3; 3)$, $(2^4; 3)$, $(1, 2^3; 4)$ и $(2^4; 5)$.

Теорема 6.18. *Ниже перечислены все плотные векторы размерности, максимальная компонента в которых не превосходит 3.*

- $(1^a, 2^b, 3^c; n)$, где $a + 2b + 3c \leq n + 1$;
- $(1^a, 2^b, 3^c; n)$, где $a + 2b + 3c = n + 2$ и $a \leq 3$;
- $(1^a, 2^b, 3^c; n)$, где $a + 2b + 3c = n + 3$, $a + b \leq 4$ и $(a, b) \neq (2, 2)$;
- Конечное число «исключительных» векторов, для которых $a + 2b + 3c \geq n + 4$: $(2, 3^2; 4)$, $(2^3, 3, 4)$, $(1, 2, 3^2; 4)$, $(3^3; 4)$,

$(1, 3^3; 4), (2, 3^3; 4), (3^4; 4), (1, 3^4; 4), (2^3, 3; 5), (1, 2, 3^2; 5), (3^3; 5),$
 $(1, 3^3; 5), (2, 3^3; 5), (3^4; 5), (1, 3^3; 6), (2^2, 3^2; 6), (2, 3^3; 6), (2, 3^3; 7),$
 $(3^4; 8), (2, 3^4; 9)$ и $(3^5; 11)$.

Далее ситуация обстоит таким же образом: для вектора $\mathbf{d} = (1^{e_1}, 2^{e_2}, \dots, k^{e_k}; n)$, для которого $e_1 + 2e_2 + \dots + ke_k = n + l + 1$, $l < k$, критерий его плотности выписывается явно: он сводится к вопросу о плотности вектора в меньшем объемлющем пространстве и с меньшей максимальной компонентой. А именно, имеет место следующая теорема.

Теорема 6.19. (1) Пусть $\mathbf{d} = (1^{e_1}, 2^{e_2}, \dots, k^{e_k}; n)$, причем $e_1 + 2e_2 + \dots + ke_k = n + l + 1$ и $l < k$. Тогда \mathbf{d} плотен тогда и только тогда, когда плотен вектор размерности $(1^{e_1}, 2^{e_2}, \dots, l^{e_l}; l + 1)$.

(2) При данном k число плотных векторов, для которых $e_1 + 2e_2 + \dots + ke_k \geq n + k + 1$, конечно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Piotr Achinger and Nicolas Perrin. Spherical multiple flags. *arXiv preprint arXiv:1307.7236*, 2013.
- [2] Ivan Arzhantsev, Ulrich Derenthal, Jürgen Hausen, and Antonio Laface. *Cox rings*, volume 144 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2015.
- [3] Grzegorz Bobiński and Grzegorz Zwara. Schubert varieties and representations of Dynkin quivers. *Colloq. Math.*, 94(2):285–309, 2002.
- [4] Klaus Bongartz. Degenerations for representations of tame quivers. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 28(5):647–668, 1995.
- [5] Klaus Bongartz. On degenerations and extensions of finite-dimensional modules. *Adv. Math.*, 121(2):245–287, 1996.
- [6] Raoul Bott and Hans Samelson. Applications of the theory of Morse to symmetric spaces. *Amer. J. Math.*, 80:964–1029, 1958.
- [7] Nicolas Bourbaki. *Lie groups and Lie algebras. Chapters 4–6*. Elements of Mathematics (Berlin). Springer-Verlag, Berlin, 2002. Translated from the 1968 French original by Andrew Pressley.
- [8] Michel Brion. Groupe de Picard et nombres caractéristiques des variétés sphériques. *Duke Math. J.*, 58(2):397–424, 1989.
- [9] Michel Brion. On orbit closures of spherical subgroups in flag varieties. *Comment. Math. Helv.*, 76(2):263–299, 2001.
- [10] Michel Brion. Multiplicity-free subvarieties of flag varieties. In *Commutative algebra (Grenoble/Lyon, 2001)*, volume 331 of *Contemp. Math.*, pages 13–23. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.
- [11] Michel Brion. Lectures on the geometry of flag varieties. In *Topics in cohomological studies of algebraic varieties*, Trends Math., pages 33–85. Birkhäuser, Basel, 2005.
- [12] Michel Brion and Shrawan Kumar. *Frobenius splitting methods in geometry and representation theory*, volume 231 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2005.
- [13] Izzet Coskun, Majid Hadian, and Dmitry Zakharov. Dense $\mathbb{P}GL$ -orbits in products of Grassmannians. *J. Algebra*, 429:75–102, 2015.

- [14] V. I. Danilov and G. A. Koshevoĭ. Massifs and the combinatorics of Young tableaux. *Uspekhi Mat. Nauk*, 60(2(362)):79–142, 2005.
- [15] Michel Demazure. Désingularisation des variétés de Schubert généralisées. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 7:53–88, 1974. Collection of articles dedicated to Henri Cartan on the occasion of his 70th birthday, I.
- [16] Michel Demazure. A very simple proof of Bott’s theorem. *Invent. Math.*, 33(3):271–272, 1976.
- [17] Rostislav Devyatov. Generically transitive actions on multiple flag varieties. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (11):2972–2989, 2014.
- [18] Michael Finkelberg, Victor Ginzburg, and Roman Travkin. Mirabolic affine Grassmannian and character sheaves. *Selecta Math. (N.S.)*, 14(3-4):607–628, 2009.
- [19] William Fulton. *Young tableaux*, volume 35 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997. With applications to representation theory and geometry.
- [20] William Fulton and Joe Harris. *Representation theory*, volume 129 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1991. A first course, Readings in Mathematics.
- [21] Peter Gabriel. Unzerlegbare Darstellungen. I. *Manuscripta Math.*, 6:71–103; correction, *ibid.* 6 (1972), 309, 1972.
- [22] H. C. Hansen. On cycles in flag manifolds. *Math. Scand.*, 33:269–274 (1974), 1973.
- [23] James E. Humphreys. *Reflection groups and Coxeter groups*, volume 29 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [24] S. L. Kleiman and Dan Laksov. Schubert calculus. *Amer. Math. Monthly*, 79:1061–1082, 1972.
- [25] Steven L. Kleiman. The transversality of a general translate. *Compositio Math.*, 28:287–297, 1974.
- [26] Friedrich Knop. On the set of orbits for a Borel subgroup. *Comment. Math. Helv.*, 70(2):285–309, 1995.
- [27] A. Knutson and P. Zinn-Justin. The Brauer loop scheme and orbital varieties. *J. Geom. Phys.*, 78:80–110, 2014.
- [28] Allen Knutson, Terence Tao, and Christopher Woodward. The honeycomb model of $GL_n(\mathbb{C})$ tensor products. II. Puzzles determine facets of the Littlewood-Richardson cone. *J. Amer. Math. Soc.*, 17(1):19–48, 2004.
- [29] Joseph M. Landsberg and Laurent Manivel. On the projective geometry of rational homogeneous varieties. *Comment. Math. Helv.*, 78(1):65–100, 2003.
- [30] Peter Littelmann. A Littlewood-Richardson rule for symmetrizable Kac-Moody algebras. *Invent. Math.*, 116(1-3):329–346, 1994.
- [31] Peter Littelmann. On spherical double cones. *J. Algebra*, 166(1):142–157, 1994.
- [32] Dudley E Littlewood and Archibald R Richardson. Group characters and algebra. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, pages 99–141, 1934.
- [33] Peter Magyar. Bruhat order for two flags and a line. *J. Algebraic Combin.*, 21(1):71–101, 2005.
- [34] Peter Magyar, Jerzy Weyman, and Andrei Zelevinsky. Multiple flag varieties of finite type. *Adv. Math.*, 141(1):97–118, 1999.
- [35] Peter Magyar, Jerzy Weyman, and Andrei Zelevinsky. Symplectic multiple flag varieties of finite type. *J. Algebra*, 230(1):245–265, 2000.

- [36] Anna Melnikov. B -orbits in solutions to the equation $X^2 = 0$ in triangular matrices. *J. Algebra*, 223(1):101–108, 2000.
- [37] Anna Melnikov. The combinatorics of orbital varieties closures of nilpotent order 2 in \mathfrak{sl}_n . *Electron. J. Combin.*, 12:Research Paper 21, 20, 2005.
- [38] D. I. Panyushev. Complexity and rank of double cones and tensor product decompositions. *Comment. Math. Helv.*, 68(3):455–468, 1993.
- [39] K. R. Parthasarathy, R. Ranga Rao, and V. S. Varadarajan. Representations of complex semi-simple Lie groups and Lie algebras. *Ann. of Math. (2)*, 85:383–429, 1967.
- [40] Nicolas Perrin. On the geometry of spherical varieties. *Transform. Groups*, 19(1):171–223, 2014.
- [41] E. V. Ponomareva. Classification of double flag varieties of complexity 0 and 1. *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.*, 77(no. 5):155–178, 2013.
- [42] E. V. Ponomareva. Invariants of the Cox rings of low-complexity double flag varieties for classical groups. *Trans. Moscow Math. Soc.*, pages 71–133, 2015.
- [43] E. V. Ponomareva. Invariants of Cox rings of double flag varieties of small complexity for special groups. *Mat. Sb.*, 208(5):129–166, 2017.
- [44] Vladimir L. Popov. Generically multiple transitive algebraic group actions. In *Algebraic groups and homogeneous spaces*, volume 19 of *Tata Inst. Fund. Res. Stud. Math.*, pages 481–523. Tata Inst. Fund. Res., Mumbai, 2007.
- [45] Kevin Purbhoo and Frank Sottile. The recursive nature of cominuscule Schubert calculus. *Adv. Math.*, 217(5):1962–2004, 2008.
- [46] R. W. Richardson and T. A. Springer. The Bruhat order on symmetric varieties. *Geom. Dedicata*, 35(1-3):389–436, 1990.
- [47] Christine Riedtmann. Degenerations for representations of quivers with relations. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 19(2):275–301, 1986.
- [48] Hermann Schubert. *Kalkül der abzählenden Geometrie*. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1979. Reprint of the 1879 original, With an introduction by Steven L. Kleiman.
- [49] M.-P. Schützenberger. La correspondance de Robinson. In *Combinatoire et représentation du groupe symétrique (Actes Table Ronde CNRS, Univ. Louis-Pasteur Strasbourg, Strasbourg, 1976)*, pages 59–113. Lecture Notes in Math., Vol. 579. Springer, Berlin, 1977.
- [50] Jean-Pierre Serre. Représentations linéaires et espaces homogènes kählériens des groupes de Lie compacts (d’après Armand Borel et André Weil). In *Séminaire Bourbaki, Vol. 2*, pages Exp. No. 100, 447–454. Soc. Math. France, Paris, 1995.
- [51] E. Yu. Smirnov. Resolutions of singularities for Schubert varieties in double Grassmannians. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 42(no. 2):56–67, 96, 2008.
- [52] Evgeny Smirnov. *Orbites d’un sous-groupe de Borel dans le produit de deux grassmanniennes*. PhD thesis, Université Joseph-Fourier-Grenoble I, 2007.
- [53] Evgeny Smirnov. Grassmannians, flag varieties, and Gelfand-Zetlin polytopes. In *Recent Developments in Representation Theory. Proceedings of Maurice Auslander Distinguished Lectures and International Conference*, volume 673 of *Contemp. Math.*, pages 179–226. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2016.
- [54] John R. Stembridge. Multiplicity-free products and restrictions of Weyl characters. *Represent. Theory*, 7:404–439, 2003.
- [55] Dmitry A. Timashev. *Homogeneous spaces and equivariant embeddings*, volume 138 of *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*. Springer, Heidelberg, 2011. Invariant Theory and Algebraic Transformation Groups, 8.
- [56] Roman Travkin. Mirabolic Robinson-Schensted-Knuth correspondence. *Selecta Math. (N.S.)*, 14(3-4):727–758, 2009.

- [57] A. V. Zelevinskiĭ. Small resolutions of singularities of Schubert varieties. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 17(2):75–77, 1983.

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ЛАБОРАТОРИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ,
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКО-
НОМИКИ, УЛ. УСАЧЁВА, 6, 119048 МОСКВА

НЕЗАВИСИМЫЙ МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ, БОЛЬШОЙ ВЛАСЬЕВСКИЙ ПЕР.,
11, 119002 МОСКВА

E-mail address: esmirnov@hse.ru