

# Нильпотентные орбиты и смешанные градуировки полупростых алгебр Ли

Дмитрий И. Панюшев



Семинар по группам Ли и теории инвариантов,  
24 февраля 2021 г.

- 1 Обозначения и постановка задачи
- 2 Смешанные градуировки: начало
  - Первые результаты
  - Чётные нильпотенты
- 3 Главная внутренняя инволюция и действие ( $B : [u, u]$ )
  - Главные градуировки
  - Плотная  $B$ -орбита в  $[u, u]$
  - Таблицы
- 4 Смешанные градуировки и делимые орбиты
  - Делимые орбиты
  - Хорошие случаи
- 5 Новые инволюции из старых
  - Определение  $\check{\sigma}$
  - О сопряженности  $\sigma$  и  $\sigma\check{\sigma}$
- 6 Литература

- ◇  $G$  – комплексная полупростая группа Ли и  $\mathfrak{g} = \text{Lie } G$ ;
- ◇  $\mathfrak{g}_{\text{reg}} = \{x \in \mathfrak{g} \mid \dim G \cdot x = \dim \mathfrak{g} - \text{rk } \mathfrak{g}\}$  – регулярные элементы;
- ◇  $\sigma \in \text{Inv}(\mathfrak{g})$  и  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$  – соответствующая  $\mathbb{Z}_2$ -градуировка;
- ◇  $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}^\sigma$  и  $G_0 \subset G$  – связная редуктивная подгруппа;
- ◇  $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_G(\mathfrak{g})$  – множество нильпотентных элементов в  $\mathfrak{g}$ ;
- ◇ для любого  $e \in \mathfrak{N} \setminus \{0\}$  есть  $\mathfrak{sl}_2$ -тройка  $\{e, h, f\}$  и диаграмма  $\mathcal{D}(e)$ ;
- ◇  $\text{Sat}(\sigma)$  – диаграмма Сатаке инволюции  $\sigma$  (если  $\mathfrak{g}$  простая);

Kostant и Rallis: изучение действия  $(G_0 : \mathfrak{g}_1)$  и его связи с  $(G : \mathfrak{g})$ .

**Фундаментальные свойства:**

- (1)  $\mathfrak{N}_{G_0}(\mathfrak{g}_1) = \mathfrak{N} \cap \mathfrak{g}_1$  (K-R, 1971);
- (2) если  $x \in \mathfrak{g}_1$ , то  $\dim G \cdot x = 2 \dim G_0 \cdot x$  (K-R, 1971);
- (3)  $G \cdot x \cap \mathfrak{g}_1$  гладко и неприводимые компоненты суть  $G_0$ -орбиты (Винберг, 1975); [Верно не только для инволюций!]
- (4)  $G \cdot e \cap \mathfrak{g}_1 \neq \emptyset \Leftrightarrow G \cdot h \cap \mathfrak{g}_1 \neq \emptyset$  (Антонаян, 1982).
- (5) Сравнив  $\text{Sat}(\sigma)$  и  $\mathcal{D}(e)$ , можно понять, когда  $G \cdot e \cap \mathfrak{g}_1 \neq \emptyset$ .

Для  $\mathfrak{g}_0$  есть аналоги свойств (1) и (3). Естественные вопросы:

- 1 Когда  $G \cdot e \cap \mathfrak{g}_0$  не пусто для  $e \in \mathfrak{N}$ ? Какие будут неприводимые компоненты пересечения? [Бывает разная размерность!]
- 2 Для  $e \in \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{N}$  знаем орбиту  $G_0 \cdot e$ . Какой будет орбита  $G \cdot e$ ?  
 Более конкретно, по диаграмме Дынкина для  $G_0 \cdot e$  хочется найти диаграмму Дынкина для  $G \cdot e$ .

**Задача.** Изучить/понять связь между  $G$ -орбитами и  $G_0$ -орбитами для элементов из  $\mathfrak{g}_0$ .

Описание нильпотентных орбит в  $\mathfrak{so}_n$  или  $\mathfrak{sp}_{2n}$  через разбиения даёт ответы на вопросы 1,2 для внешних инволюций  $\mathfrak{sl}_n$ .

- Тут уже видны некоторые проблемы.
- Будем заниматься, в основном, вопросом 2. Простых общих ответов ожидать не следует!

- ▶  $\mathfrak{g}^x = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(x)$  – централизатор  $x \in \mathfrak{g}$ ; если  $x \in \mathfrak{g}_i$ , то  $\mathfrak{g}^x = \mathfrak{g}_0^x \oplus \mathfrak{g}_1^x$ .
- ▶ Если  $x \in \mathfrak{g}_1$ , то  $\dim \mathfrak{g}_0 - \dim \mathfrak{g}_1 = \dim \mathfrak{g}_0^x - \dim \mathfrak{g}_1^x$  (K-R, 71);
- ▶ Если  $x \in \mathfrak{g}_0$ , то  $\dim \mathfrak{g}_0^x + \text{rk } \mathfrak{g} \geq \dim \mathfrak{g}_1^x$  (П, 2013).

**Диаграмма Дынкина нильпотента**  $\mathcal{D}(e) =$  схема Дынкина алгебры  $\mathfrak{g}$ , снабженная отметками  $\alpha(h)$ ,  $\alpha \in \Pi$ , если  $h \in \mathfrak{h}$  и  $\alpha(h) \geq 0$ . Тогда  $\alpha(h) \in \{0, 1, 2\}$ .

$\{e, h, f\} \subset \mathfrak{g} \rightsquigarrow \mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}(j)$ , где  $\mathfrak{g}(j) = \{x \in \mathfrak{g} \mid [h, x] = jx\}$ . Назовем это  $(\mathbb{Z}, h)$ -**градуировкой**. Тут  $e \in \mathfrak{g}(2)$  и  $\text{ad } e : \mathfrak{g}(j) \rightarrow \mathfrak{g}(j+2)$ .

При этом  $e$  лежит в открытой  $G(0)$ -орбите в  $\mathfrak{g}(2)$ . Положим  $d(j) = \dim \mathfrak{g}(j) \Rightarrow d(j) = d(-j)$ . Известно, что:

- $\mathfrak{g}^e = \mathfrak{g}_{\text{red}}^e \oplus \mathfrak{g}_{\text{nil}}^e$  и  $\mathfrak{g}_{\text{red}}^e = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(e, h, f) = \mathfrak{g}^e \cap \mathfrak{g}^h = \mathfrak{g}^e \cap \mathfrak{g}(0)$ ;
- $\mathfrak{g}_{\text{nil}}^e \subset \mathfrak{g}( > 0)$ .
- $\dim \mathfrak{g}_{\text{red}}^e = d(0) - d(2)$  и  $\dim \mathfrak{g}_{\text{nil}}^e = d(1) + d(2)$ .

Для  $e \in \mathfrak{N} \cap \mathfrak{g}_0 \rightsquigarrow \{e, h, f\} \subset \mathfrak{g}_0$ . Тогда  $\mathfrak{g}_i(j) := \{x \in \mathfrak{g}_i \mid [h, x] = jx\}$  и это даёт  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$ -градуировку

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}_2, j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_i(j),$$

называемую **смешанной** или  $(\sigma, e)$ -**градуировкой**. Здесь  $e \in \mathfrak{g}_0(2)$  и  $\text{ad } e : \mathfrak{g}_i(j) \rightarrow \mathfrak{g}_i(j+2)$ ;  $G_0(0) \subset G(0)$  – связная редукт. подгруппа.

$j$	...	-2	-1	0	1	2	...
$\mathfrak{g}_0$	...	$f$	...	$h$	...	$e$	...
$\mathfrak{g}_1$	...	...	...	...	...	...	...

Положим  $d_i(j) = \dim \mathfrak{g}_i(j)$ , т.е.  $d(j) := d_0(j) + d_1(j)$ .

Тогда  $d_0(0) \geq d_0(2) \geq d_0(4) \dots$  и  $d_1(0) \geq d_1(2) \geq \dots$

Также  $d_0(0) \geq d_1(1)$  и  $d_0(0) \geq d_1(2)$ , так как  $G_0(0)$  имеет конечное число орбит в  $\mathfrak{g}_i(j)$  при  $j \neq 0$  (приложение **леммы Винберга**).

Общая терминология:

- ▶  $e$  называется **регулярным** в  $\mathfrak{g}$ , если  $\overline{G \cdot e} = \mathfrak{N}$ ;  $e \in \mathfrak{g}_{\text{reg}} \cap \mathfrak{N}$ ,
- ▶  $e$  назыв. **чётным** в  $\mathfrak{g}$ , если все собств. значения  $h$  в  $\mathfrak{g}$  – чётные,
- ▶  $e$  называется **отмеченным** (= distinguished), если  $\mathfrak{g}_{\text{red}}^e = \{0\}$ ,
- ▶  $e$  называется **почти отмеченным**, если  $\mathfrak{g}_{\text{red}}^e$  абелева.

Факты:

- ◇ “регулярный”  $\Rightarrow$  “отмеченный”  $\stackrel{(B)}{\Rightarrow}$  “чётный”;
- ◇ “почти отмеченный”  $\not\Rightarrow$  “чётный”.

**Пример ( $\lambda(e) \vdash \dim V$ )**

- Если  $\mathfrak{g}$  – классическая алгебра Ли и  $e \sim \lambda(e) = (\lambda_1, \dots, \lambda_t)$ , то  $e$  будет чётным  $\Leftrightarrow$  все  $\lambda_i$  имеют одинаковую чётность;
- Для  $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(V)$  или  $\mathfrak{sp}(V)$ :  $e$  – отмеченный  $\Leftrightarrow$  все  $\lambda_i$  – разные.
- Для  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(V)$ :  $e$  – почти отмеченный  $\Leftrightarrow$  все  $\lambda_i$  – разные.

Напомним, что  $\mathfrak{g}_{\text{red}}^e = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(e, h, f) = \mathfrak{g}^e \cap \mathfrak{g}^h = \mathfrak{g}^e \cap \mathfrak{g}(0)$ .

### Лемма (1)

*Если  $e$  - чётный в  $\mathfrak{g}_0$ , то собственные значения  $h$  в  $\mathfrak{g}_1$  имеют одинаковую чётность. То есть,  $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_1^+$  или  $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_1^-$ .*

Запишем  $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_1^+ \oplus \mathfrak{g}_1^- \dots$

### Лемма (2)

*$\mathfrak{g}_0$  - полупростая и  $e \in \mathfrak{g}_0$  - отмеченный в  $\mathfrak{g}_0$ , то  $e$  - чётный и почти отмеченный в  $\mathfrak{g}$ .*

### Доказательство.

- Предположение означает, что  $\mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(e, h, f) = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}_0}(e, h, f) = \{0\}$ , т.е.  $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(e, h, f) \subset \mathfrak{g}_1$ . Значит, эта алгебра Ли - абелева.
- По лемме 1,  $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_1^-$  или  $\mathfrak{g}_1^+$ . Если верно первое, то получается, что  $\mathfrak{g}_{\text{red}}^e = 0$ , т.е.  $e$  - отмеченный и, значит, чётный. Противоречие!  $\square$

## Примеры

- 1 Если  $\sigma \in \text{Inv}(\mathfrak{sl}_{2n+1})$  – внутренняя, то  $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{sl}_k \dot{+} \mathfrak{sl}_{2n+1-k} \dot{+} \mathfrak{t}_1$  и  $k < 2n + 1 - k$ . Для  $e \in \mathfrak{g}_{0,\text{reg}}$  имеем  $\lambda(e) = (2n + 1 - k, k)$  и  $e$  не будет чётным в  $\mathfrak{g}$ . Поэтому  $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_1^-$ .
- 2  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}$  и  $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{sp}_{2k} \dot{+} \mathfrak{sp}_{2n-2k}$  при  $0 < k < n$ . Если  $e$  – регулярный в  $\mathfrak{sp}_{2k}$ , то  $\lambda(e) = (2k, 1, \dots, 1)$ , т.е.  $e$  не будет чётным в  $\mathfrak{g}$ .
- 3 Бывает так, что  $\mathfrak{g}_0$  – простая алгебра Ли и  $e \in \mathfrak{g}_0$  – чётный, но  $e$  не будет чётным в  $\mathfrak{g}$ . Например, пусть  $\sigma \in \text{Inv}(\mathbf{F}_4)$  такая, что  $(\mathbf{F}_4)^\sigma = \mathfrak{so}_9$ . Возьмем  $e \in \mathfrak{so}_9$  для которого  $\lambda(e) = (3, 3, 3)$ . Тогда  $\mathcal{D}(e)$  есть  $\textcircled{0} - \textcircled{1} = \textcircled{0} - \textcircled{0}$ .

Далее всегда предполагается, что  $e$  – чётный в  $\mathfrak{g}_0$ .

## Теорема (1)

Пусть  $e \in \mathfrak{g}_{0,\text{reg}} \cap \mathfrak{N}$ . Тогда

- (i)  $[\mathfrak{g}^h, \mathfrak{g}^h] \simeq (\mathfrak{sl}_2)^k$  и  $\mathcal{D}(e)$  имеет изолированные нули. Точнее, если  $\dim \mathfrak{g}^h = \text{rk } \mathfrak{g} + 2k$ , то  $\mathcal{D}(e)$  имеет  $k$  изолированных нулей.
- (ii)  $\dim \mathfrak{g}_{\text{nil}}^e \leq 2\text{rk}(\mathfrak{g}_0)$ ; и если есть равенство, то  $\mathfrak{g}_0$  полупроста.

## Доказательство.

(i)  $\mathfrak{g}^h = \mathfrak{g}_0^h \oplus \mathfrak{g}_1^h$ , причем  $\mathfrak{g}_0^h$  – картановская в  $\mathfrak{g}_0$ . Поэтому  $\mathfrak{s} := [\mathfrak{g}^h, \mathfrak{g}^h]$  – полупростая алгебра, у которой  $\mathfrak{s}^\sigma$  – абелева. Это возможно только если все простые идеалы в  $\mathfrak{s}$  изоморфны  $\mathfrak{sl}_2$ .

(ii) По лемме 1,  $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_1^+$  или  $\mathfrak{g}_1^-$ . Если верно первое, то  $\mathfrak{g}(1) = 0$  и  $\dim \mathfrak{g}_{\text{nil}}^e = d_0(2) + d_1(2) \leq 2d_0(0) = 2\text{rk } \mathfrak{g}_0$ . (Для второго – похоже!)

В обоих вариантах, если есть равенство, то  $d_0(0) = d_0(2)$ . Отсюда следует, что  $\mathfrak{g}_0$  полупроста. □

В условиях теоремы  $e$  может не быть чётным в  $\mathfrak{g}$ . Но единственное исключение – внутренние инволюции для  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{2n+1}$ , см. Пример 1.

Причина этого – “неправильное” число Кокстера  $c(\mathfrak{g})$  для  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{2n+1}$ .

### Предложение (1)

Пусть  $\mathfrak{g}$  – простая и  $e \in \mathfrak{g}_{0,\text{reg}}$ . Если  $c(\mathfrak{g})$  – чётно, то  $e$  – чётный в  $\mathfrak{g}$ .

**Док-во:** если  $\mathfrak{g}_0$  полупростая, то используем лемму 2. Если же  $\mathfrak{g}_0$  имеет центр, то  $\sigma$  – внутренняя и такие  $\mathbb{Z}_2$ -градуировки связаны с параболическими подалгебрами с абелевым нильрадикалом. ...  $\square$

► Обозначим через  $\kappa(\mathfrak{g})$  мощность наибольшего вполне несвязного подмножества на диаграмме Дынкина алгебры  $\mathfrak{g}$ . Диаграмма – это дерево; для получения  $\kappa(\mathfrak{g})$  берем вершины через одну...

Если  $\mathfrak{g} \neq \mathbf{D}_{2n}$ , то  $\kappa(\mathfrak{g}) = \left\lfloor \frac{\text{rk}(\mathfrak{g})+1}{2} \right\rfloor$ , тогда как  $\kappa(\mathbf{D}_{2n}) = n + 1$ . Если  $\text{ht}(\gamma)$  – это **высота** корня  $\gamma$ , то общая (замысловатая) формула – это

$$\kappa(\mathfrak{g}) = \#\{\gamma \in \Delta^+ \mid \text{ht}(\gamma) = [(c(\mathfrak{g}) + 1)/2]\}.$$

Я могу доказать это, если  $c(\mathfrak{g})$  чётно, хотя можно и перебором.

Далее считаем, что  $e$  – чётный в  $\mathfrak{g}$ . Поэтому  $(\sigma, e)$ -градуировка выглядит так:  $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}_2, j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_i(2j)$ . Положим  $m_i = \max\{k \mid d_i(k) \neq 0\}$  про  $i = 0, 1$ . Тогда  $m_i = \max\{t \mid (\text{ad } e|_{\mathfrak{g}_i})^t \neq 0\}$ .

### Предложение (2)

Предположим, что  $d_0(0) = d_1(2)$  для этой градуировки. Тогда

- 1  $G(0) \cdot e \cap \mathfrak{g}_1(2) \neq \emptyset$ . В частности,  $G \cdot e \cap \mathfrak{g}_1 \neq \emptyset$ ;
- 2  $e$  – почти отмеченный в  $\mathfrak{g}$ ;
- 3  $|m_0 - m_1| \leq 2$  и  $d_0(0) \leq d_1(0)$ .

**Док-во:** У нас  $e \in \mathfrak{g}_0(2)$  и  $h \in \mathfrak{g}_0(0)$ .

1. Если  $e' \in \mathfrak{g}_1(2)$ , то  $[\mathfrak{g}_1(-2), e']$  – ортогон. дополнение к  $\mathfrak{g}_0^{e'}(0)$  в  $\mathfrak{g}_0(0)$ . Если взять  $e'$  в открытой  $G_0(0)$ -орбите в  $\mathfrak{g}_1(2)$ , то  $[\mathfrak{g}_1(-2), e'] = \mathfrak{g}_0(0)$ . Поэтому  $h$  – характеристика для  $e'$  и  $e' \in G(0) \cdot e$ .

2. Для общего  $e' \in \mathfrak{g}_1(2)$  имеем:  $\mathfrak{g}_0^{e'}(0) = 0$ . Поэтому  $\mathfrak{g}_{\text{red}}^{e'}$  абелева.

3.  $\mathfrak{g}_i(m_i)$  должно лежать в образе  $\text{ad } e'$ . □

Условие предложения 2 довольно сильное. Оно означает, что

$$\#\{\text{все простые } \mathfrak{sl}_2\text{-модули в } \mathfrak{g}_0\} = \#\{\text{нетрив. пр. } \mathfrak{sl}_2\text{-модули в } \mathfrak{g}_1\}.$$

То есть,  $\mathfrak{g}_0$  не может быть сильно больше, чем  $\mathfrak{g}_1$ .

### Пример (когда условие не выполнено)

Пусть  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0) = (\mathfrak{so}_{2n}, \mathfrak{so}_{2n-1})$  и  $e \in \mathfrak{g}_{0, \text{reg}}$ . Тогда  $d_0(0) = n - 1$ ,  
 $d_1(0) = d_1(2) = 1$ ,  $m_0 = 4n - 6$ , and  $m_1 = 2n - 2$ . И также  $G \cdot e \cap \mathfrak{g}_1 = \emptyset$ .  
 Для  $(\mathfrak{so}_{2n+1}, \mathfrak{so}_{2n})$  – аналогично.

► Для  $e \in \mathfrak{g}_0(2)$  возможно, что  $G \cdot e \cap \mathfrak{g}_1 \neq \emptyset$ , но  $G(0) \cdot e \cap \mathfrak{g}_1(2) = \emptyset$ .  
 Возможная причина – пространство  $\mathfrak{g}_0(2)$  содержит одномерный  $G(0)$ -модуль.

$$\mathfrak{g} = \mathbf{B}_{2m+1}, \mathfrak{g}_0 = \mathbf{B}_{m+1} \dot{+} \mathbf{D}_m, \lambda(e) = (2m + 1, 2m - 1, 1),$$

$$\mathcal{D}(e) = (2202 \dots 0).$$

- У каждой инволюции  $\sigma$  есть **диаграмма Сатаке**  $\text{Sat}(\sigma)$ . Например,

$$\mathfrak{so}_{2n} \supset \mathfrak{gl}_n : \bullet \text{---} \circ \text{---} \dots \text{---} \bullet \text{---} \circ \text{---} \bullet \begin{cases} \circ \\ \circ \end{cases} \begin{matrix} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{matrix}, \text{ если } n = 2k + 1 \text{ нечётно.}$$

Здесь для общего полупростого  $x \in \mathfrak{g}_1$  имеем  $\mathfrak{g}_0^x = (\mathfrak{sl}_2)^k \oplus \mathfrak{t}_1$ .

### Предложение (3)

Если  $e \in \mathfrak{g}_{0,\text{reg}}$  и  $d_0(0) = d_1(2)$ , то  $\text{Sat}(\sigma)$  имеет (не более чем) изолированные черные вершины (ИЧВ) и они содержатся среди нулей  $\mathcal{D}(e)$ .

Док-во использует теорему 1, предложение 2 и свойства  $\text{Sat}(\sigma)$ . Берем  $e \sim e' \in \mathfrak{g}_1(2)$ . Тогда  $e' + f' \in \mathfrak{g}_1$  – полупростой и  $h \sim e' + f'$ . ...

### Пример ( $\mathfrak{g} = \mathbf{B}_{2m}$ , $\mathfrak{g}_0 = \mathbf{D}_{m+1} \dot{+} \mathbf{B}_{m-1}$ )

Здесь  $\text{Sat}(\sigma)$  – это  $\circ \text{---} \dots \text{---} \circ \Rightarrow \bullet$ ,  $\mathcal{D}(e)$  – это  $\textcircled{2} \text{---} \textcircled{0} \text{---} \dots \text{---} \textcircled{2} = \textcircled{0}$  и  $d_0(0) = d_1(2) = 2m$ .

Отныне  $\mathfrak{g}$  – простая. Зафиксируем  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$  и корни  $\Pi \subset \Delta^+ \subset \Delta$ ;  $u = [b, b]$ ,  $e_\gamma$  – корневой вектор для  $\gamma \in \Delta$ . Главная  $\mathbb{Z}$ -градуировка  $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}\langle i \rangle$  определяется условиями, что  $\mathfrak{g}\langle 0 \rangle = \mathfrak{h}$  и  $\mathfrak{g}\langle i \rangle = \bigoplus_{\gamma: \text{ht}(\gamma)=i} \mathfrak{g}_\gamma$  при  $i \neq 0$ . При этом  $\mathfrak{b} = \mathfrak{g}\langle \geq 0 \rangle$  и  $u = \mathfrak{g}\langle \geq 1 \rangle$ . Главная внутренняя инволюция (ГВИ)  $\vartheta$ :

$$\mathfrak{g}^\vartheta = \mathfrak{g}\langle 0 \rangle := \bigoplus_{i \text{ чет}} \mathfrak{g}\langle i \rangle, \quad \mathfrak{g}\langle 1 \rangle := \bigoplus_{i \text{ неч}} \mathfrak{g}\langle i \rangle.$$

С точностью до  $G$ -сопряженности,  $\vartheta$  однозначно определяется двумя свойствами: (i)  $\vartheta$  – внутренняя (ибо  $\text{rk } \mathfrak{g} = \text{rk } \mathfrak{g}\langle 0 \rangle$ ) и (ii)  $\mathfrak{g}\langle 1 \rangle$  содержит регулярный нильпотент, а именно  $e = \sum_{\alpha \in \Pi} e_\alpha \in \mathfrak{g}\langle 1 \rangle$ . Главная  $\mathbb{Z}$ -град. соответствует регулярной  $\mathfrak{sl}_2$ -тройке с  $e \in \mathfrak{g}\langle 1 \rangle$  и  $f \in \mathfrak{g}\langle -1 \rangle$ .

- Систем корней пары  $(\mathfrak{g}\langle 0 \rangle, \mathfrak{h})$  – это  $\Delta_{ev}$  и  $\Delta_{ev}^+ = \Delta_{ev} \cap \Delta^+$ ;
- $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{g}\langle 0 \rangle =: \mathfrak{b}\langle 0 \rangle$  – борелевская в  $\mathfrak{g}\langle 0 \rangle$ ;
- $\Delta(2)$  – это часть базиса в  $\Delta_{ev}^+$ , причем  $\#\Delta(2) = \text{rk } \mathfrak{g} - 1$ ;

**Факт:** все нильпотентные  $G$ -орбиты пересекают  $\mathfrak{g}\langle 1 \rangle$  (Антоян, 1982). Это единственная внутренняя инволюция с таким свойством.

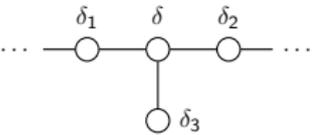
## Две возможности для $\mathfrak{g}_{\langle 0 \rangle}$

- (1) либо  $\mathfrak{g}_{\langle 0 \rangle}$  **неполупроста** и тогда  $\Delta(2)$  – базис в  $\Delta_{ev}^+$ ;
- (2) либо  $\mathfrak{g}_{\langle 0 \rangle}$  **полупроста**; и тогда базисом будет  $\Delta(2) \cup \{\beta\}$ , для некоторого  $\beta$  с  $ht(\beta) = 2k \geq 4$ . Здесь  $\mathfrak{g}_{\langle 1 \rangle}$  – простой  $\mathfrak{g}_{\langle 0 \rangle}$ -модуль.

Как и выше,  $e_\gamma$  – ненулевой корневой вектор для  $\gamma \in \Delta^+$ .

- $\mathfrak{g}_{\langle 0 \rangle}$  неполупроста  $\iff \mathfrak{g} \in \{\mathbf{A}_n, \mathbf{C}_n\}$ . Тогда  $e_{\langle 2 \rangle} := \sum_{\gamma \in \Delta(2)} e_\gamma$  – регулярный нильпотент в  $\mathfrak{g}_{\langle 0 \rangle}$ , лежащий в  $\mathfrak{u}_{\langle 0 \rangle} = [\mathfrak{b}_{\langle 0 \rangle}, \mathfrak{b}_{\langle 0 \rangle}]$ .
- Если  $\mathfrak{g}_{\langle 0 \rangle}$  полупроста, то  $\tilde{e} = e_{\langle 2 \rangle} + e_\beta$  – регулярный нильпотент в  $\mathfrak{g}_{\langle 0 \rangle}$ , лежащий в  $\mathfrak{u}_{\langle 0 \rangle}$ . При этом всегда  $ht(\beta) = 4$ .

Картинка для  $\beta$  ( $\mathbf{D}_n$  и  $\mathbf{E}_n$ ):



и  $\beta = \delta + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3$ .

Для  $\mathbf{B}_n$ :  $\beta = \alpha_{n-2} + \alpha_{n-1} + 2\alpha_n$ .

Для  $\mathbf{F}_4$ :  $\beta = 2\alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4$ .

Для  $\mathbf{G}_2$ :  $\beta = 3\alpha_1 + \alpha_2$ .

Теорема (для  $\mathfrak{g} \neq \mathbf{A}_n, \mathbf{C}_n$ )

Пусть  $\mathfrak{g}_{\langle 0 \rangle} = \mathfrak{g}^{\vartheta}$  полупроста и  $\tilde{\epsilon} \in \mathfrak{g}_{\langle 0 \rangle, \text{reg}}$ , как выше. Тогда

- (i) орбита  $B \cdot \tilde{\epsilon}$  плотна в  $[\mathfrak{u}, \mathfrak{u}] = \mathfrak{g}_{\langle \geq 2 \rangle}$ ;
- (ii)  $\mathfrak{u} \cap \mathfrak{g}^{\tilde{\epsilon}} = \mathfrak{g}_{\text{nil}}^{\tilde{\epsilon}}$  и  $\dim \mathfrak{g}_{\text{nil}}^{\tilde{\epsilon}} = 2 \text{rk}(\mathfrak{g})$ ;
- (iii)  $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{g}^{\tilde{\epsilon}} = \mathfrak{u} \cap \mathfrak{g}^{\tilde{\epsilon}}$  и  $\mathfrak{g}^{\tilde{\epsilon}} \subset \mathfrak{g}_{\langle \geq -1 \rangle}$ .

Надо взять характеристику  $\tilde{h} \in \mathfrak{h}$  и рассмотреть  $(\vartheta, \tilde{\epsilon})$ -градуировку.

## Следствие

Диаграмма Дынкина  $\mathcal{D}(\tilde{\epsilon})$  имеет  $\kappa(\mathfrak{g})$  изолированных нулей.

## Доказательство.

По теореме 1 имеем неравенство для  $(\mathbb{Z}, \tilde{h})$ -градуировки в  $\mathfrak{g}$ :

$$\text{rk}(\mathfrak{g}) + 2k = \dim \mathfrak{g}^{\tilde{h}} = \dim \mathfrak{g}(0) \geq \dim \mathfrak{g}(2) = \dim \mathfrak{g}_{\text{nil}}^{\tilde{\epsilon}} = 2 \text{rk}(\mathfrak{g}).$$

Значит,  $\left[ \frac{\text{rk}(\mathfrak{g})+1}{2} \right] \leq k \leq \kappa(\mathfrak{g})$ , что доказывает всё для  $\mathfrak{g} \neq \mathbf{D}_{2n}$ . □

**Построение**  $\mathcal{D}(\tilde{e})$ :  $\gamma(\tilde{h}) = 2$  для  $\gamma \in \Delta(2) \cup \{\beta\}$ . Из картинки для  $\beta$  следует, что  $\gamma(\delta) = 2$  и затем надо расставить чередующиеся 0 и 2 на диаграмме.

### Теорема (для $\mathfrak{g} = \mathbf{A}_n$ или $\mathbf{C}_n$ )

Пусть  $\mathfrak{g}_{\langle 0 \rangle} = \mathfrak{g}^{\theta}$  неполупроста и  $e = e_{\langle 2 \rangle} \in \mathfrak{g}_{\langle 0 \rangle, \text{reg}}$ , как выше. Тогда

- (i) орбита  $B \cdot e$  плотна в  $[\mathfrak{u}, \mathfrak{u}]$ ,
- (ii)  $\dim(\mathfrak{g}^e \cap \mathfrak{u}) = 2\text{rk } \mathfrak{g} - 1$ ,
- (iii)  $2\text{rk } \mathfrak{g} - 2 \leq \dim \mathfrak{g}_{\text{nil}}^e \leq 2\text{rk } \mathfrak{g} - 1$ .

Кроме того, если  $e$  – почти отмеченный в  $\mathfrak{g}$ , то  $\dim \mathfrak{g}_{\text{nil}}^e = 2\text{rk } \mathfrak{g} - 1$ .

*Доказательства обеих теорем не используют перебор.*

**Вывод:** группа  $B$  имеет плотную орбиту в  $[\mathfrak{u}, \mathfrak{u}]$ , эта орбита соответствует регулярному нильпотенту в  $\mathfrak{g}_{\langle 0 \rangle}$  и (если  $\mathfrak{g} \neq \mathbf{A}_{2n}$ ) соотв. диаграмма Дынкина имеет максимальное число изолированных нулей.

Таблица: Глав. внутр. инволюции  $\vartheta$  и орбиты  $G \cdot \tilde{e}$  для особых алгебр Ли

$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{g}_{(0)}$	$G \cdot \tilde{e}$	$\mathcal{D}(\tilde{e})$	$\dim \mathfrak{g}^{\tilde{e}}$	$\mathfrak{g}_{\text{red}}^{\tilde{e}}$
$E_6$	$A_5 \dot{+} A_1$	$E_6(a_3)$		12	$\{0\}$
$E_7$	$A_7$	$E_6(a_1)$		15	$t_1$
$E_8$	$D_8$	$E_8(a_4)$		16	$\{0\}$
$F_4$	$C_3 \dot{+} A_1$	$F_4(a_2)$		8	$\{0\}$
$G_2$	$A_1 \dot{+} \tilde{A}_1$	$G_2(a_1)$		4	$\{0\}$
$A_{2n}$	$\mathfrak{gl}_{n+1} \dot{+} \mathfrak{sl}_n$	$(n+1, n)$		$4n$	$t_1$

Таблица: Гл. внутр. инволюции  $\vartheta$  и орбиты  $G \cdot e$  для классических алгебр

$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{g}_{\langle 0 \rangle}$	$\mathcal{D}(e)$	$\dim \mathfrak{g}^e$	$\mathfrak{g}_{\text{red}}^e$
$B_{2n}$	$B_n \dot{+} D_n$		$4n$	$\{0\}$
$B_{2n-1}$	$B_{n-1} \dot{+} D_n$		$4n-1$	$t_1$
$D_{2n}$	$D_n \dot{+} D_n$		$4n+2$	$t_2$
$D_{2n-1}$	$D_{n-1} \dot{+} D_n$		$4n-1$	$t_1$
$C_{2n-1}$	$\mathfrak{gl}_{2n-1}$		$4n-1$	$\mathfrak{sl}_2$
$C_{2n}$	$\mathfrak{gl}_{2n}$		$4n$	$t_1$
$A_{2n-1}$	$\mathfrak{gl}_n \dot{+} \mathfrak{sl}_n$		$4n-1$	$\mathfrak{sl}_2$

## Делимые орбиты

Пусть  $e \in \mathfrak{N}$  и  $\{e, h, f\}$  – какая-то  $\mathfrak{sl}_2$ -тройка.

### Определение

Орбита  $\mathcal{O} = G \cdot e$  (элемент  $e$ ) называется **делимой**, если  $h/2$  – снова характеристика нильпотентной орбиты.

Орбита с характеристикой  $h/2$  (если она существует) обозначается  $\mathcal{O}^{(2)} = G \cdot e^{(2)}$ . Тут  $e^{(2)} \in \mathfrak{g}(4)$  лежит в плотной  $G(0)$ -орбите. [Плотная орбита есть всегда, но не всегда её характеристика будет  $h/2$ .]

- Очевидно, делимый нильпотент чётен, но обратное неверно!
- Если  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ , то можно брать  $e^{(2)} = e^2$ ;
- Всегда  $\dim \ker (\operatorname{ad} e)^2 = \dim \ker (\operatorname{ad} e^{(2)})$ ;
- Для классических  $\mathfrak{g}$ , описание пар  $(\mathcal{O}, \mathcal{O}^{(2)})$  даётся в терминах разбиений; для особых  $\mathfrak{g}$  получены списки.

### Пример ( $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ )

Если  $\lambda(e) = (\lambda_1, \dots, \lambda_t)$ , то  $e$  – делимый тогда и только тогда, когда все  $\lambda_i$  – нечетные. Тогда  $\lambda(e^{(2)}) \sim ((\lambda_1 + 1)/2, [\lambda_1/2], \dots)$ .

Для  $\mathfrak{so}_n$  и  $\mathfrak{sp}_{2n}$  надо еще потребовать, чтобы получающееся разбиение удовлетворяло нужным условиям.

### Пример ( $\mathfrak{g} = \mathbf{E}_7$ )

$$\mathcal{D}(e) = \begin{array}{cccccc} \textcircled{0} & \textcircled{2} & \textcircled{0} & \textcircled{2} & \textcircled{0} & \textcircled{2} \\ & & & | & & \\ & & & \textcircled{0} & & \end{array}, \quad \mathcal{D}(e^{(2)}) = \begin{array}{cccccc} \textcircled{0} & \textcircled{1} & \textcircled{0} & \textcircled{1} & \textcircled{0} & \textcircled{1} \\ & & & | & & \\ & & & \textcircled{0} & & \end{array}.$$

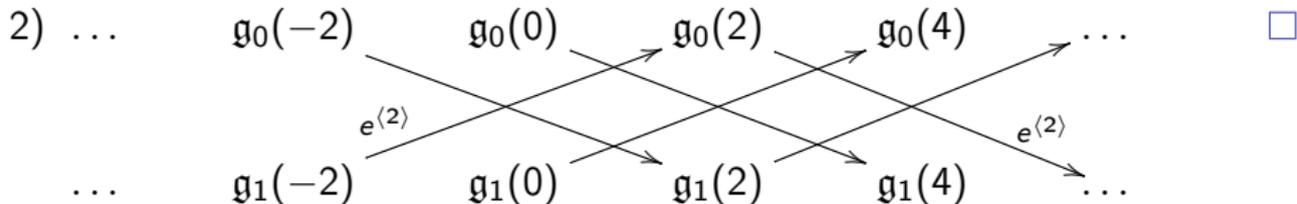
## Теорема (2)

Пусть  $e \in \mathfrak{N} \cap \mathfrak{g}_0$  – чётный в  $\mathfrak{g}$  и  $d_0(0) = d_1(4)$  для соответствующей смешанной градуировки. Тогда

- 1) орбита  $G \cdot e$  – делимая и есть  $e^{(2)} \in \mathfrak{g}_1(4)$ ;
- 2)  $d_0(0) = d_0(2) = d_1(2) = d_1(4)$  и также  $d_0(4k+2) = d_1(4k+2)$ ;
- 3)  $\mathfrak{g}_1$  не содержит 3-мерных  $\langle e, h, f \rangle$ -модулей,  $\mathfrak{g}_0$  полупроста и  $e$  – отмеченный в  $\mathfrak{g}_0$ ;
- 4)  $e$  и  $e^{(2)}$  – почти-отмеченные в  $\mathfrak{g}$ .

## Доказательство.

1) Если  $x \in \mathfrak{g}_1(4)$ , то  $[\mathfrak{g}_1(-4), x]$  – ортогон. дополнение к  $\mathfrak{g}_0^x(0)$  в  $\mathfrak{g}_0(0)$ . Если взять  $x$  в открытой  $G_0(0)$ -орбите в  $\mathfrak{g}_1(4)$ , то всё получится.



## Хорошие случаи

- инв. **максимального ранга**  $\Leftrightarrow \mathfrak{g}_1$  содержит подалгебру Картана.

### Теорема (3)

Равенство  $d_0(0) = d_1(4)$  для  $(\sigma, e)$ -градуировок выполнено только в следующих случаях:

- $\mathfrak{g} = \mathbf{E}_n$ ,  $\sigma$  – инволюция максимального ранга и  $e \in \mathfrak{g}_{0, \text{reg}}$ .
- $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ ,  $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{so}_n$  и  $\lambda(e) = (2m_1 + 1, \dots, 2m_s + 1)$ , причём  $m_i - m_{i+1} \geq 2$ ; (тут  $\sigma$  – тоже максимального ранга).

**Набросок:** ищем пары  $(\mathcal{O}, \mathcal{O}^{(2)})$  такие, что обе орбиты – почти отмеченные. Для  $\mathfrak{sl}_n$  имеем  $\lambda(e^{(2)}) = (m_1 + 1, m_1, m_2 + 1, m_2, \dots)$  & формулы Клебша–Гордана. Для  $\mathfrak{so}_n$  и  $\mathfrak{sp}_{2n}$  таких пар орбит нет.  $\square$

- Всегда выходит, что  $\sigma$  – максимального ранга;
- ограничения на  $\{m_i\}$  исключают случаи  $n = 2, 4$ . То есть, в хороших случаях  $\mathfrak{g}_0$  – тоже простая алгебра Ли.

Пример ( $\mathfrak{g} = \mathbf{E}_6, \mathfrak{g}_0 = \mathbf{C}_4$ , внешняя)

	$i$	0	2	4	6	8	10	12	14	16
$G \cdot e = \mathbf{E}_6(a_1)$ :	$d_0(i)$	4	4	3	3	2	2	1	1	-
	$d_1(i)$	4	4	4	3	3	2	1	1	1

Пример ( $\mathfrak{g} = \mathbf{E}_7, \mathfrak{g}_0 = \mathbf{A}_7$ , внутренняя)

	$i$	0	2	4	6	8	10	12	14	16
$G \cdot e = \mathbf{E}_6(a_1)$ :	$d_0(i)$	7	7	6	5	4	3	2	1	-
	$d_1(i)$	8	7	7	5	5	3	2	1	1

Есть много примеров, когда  $d_0(0) > d_1(4)$  и  $e$  – делимый. То есть, можно найти  $e^{(2)} \in \mathfrak{g}(4)$ . Но тут нет гарантии, что  $e^{(2)} \in \mathfrak{g}_1(4)$ .

	$i$	0	2	4	6	8	10
$\mathbf{F}_4 \supset \mathbf{C}_3 \dot{+} \mathbf{A}_1$ $G \cdot e = \mathbf{F}_4(a_2)$	$d_0(i)$	4	4	2	2	1	1
	$d_1(i)$	4	4	3	2	2	1

## Переход $\sigma \mapsto \check{\sigma} \mapsto \sigma\check{\sigma}$

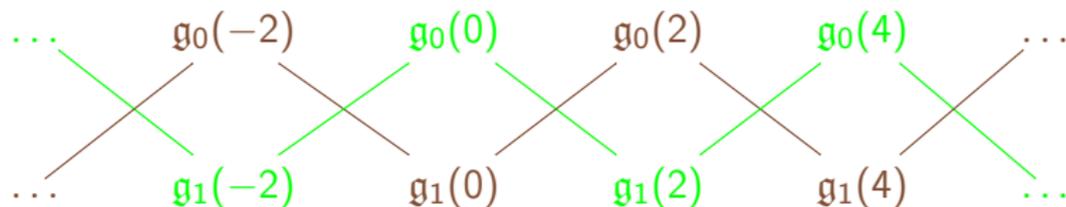
Пусть  $\sigma \in \text{Inv}(\mathfrak{g})$  и  $e \in \mathfrak{g}_{0,\text{reg}}$ . Если  $e$  остается чётным в  $\mathfrak{g}$ , то мы определим новую инволюцию  $\check{\sigma}$ , используя  $(\sigma, e)$ -градуировку:

$$\mathfrak{g}_{\{0\}} := \bigoplus_{i \text{ чет}} \mathfrak{g}(2i), \quad \mathfrak{g}_{\{1\}} := \bigoplus_{i \text{ неч}} \mathfrak{g}(2i).$$

Тогда  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\{0\}} \oplus \mathfrak{g}_{\{1\}}$  и  $\check{\sigma}$  – инволюция для этой  $\mathbb{Z}_2$ -градуировки.

### Свойства перехода:

- $\check{\sigma}$  всегда внутренняя;
- так как  $e \in \mathfrak{g}_0(2) \subset \mathfrak{g}_0$ , то  $e \in \mathfrak{g}_{\{1\}}$ .
- Инволюции  $\sigma$  и  $\check{\sigma}$  коммутируют; так что  $\sigma\check{\sigma}$  – снова инволюция.
- $\sigma$  и  $\sigma\check{\sigma}$  лежат в одной связной компоненте группы  $\text{Aut}(\mathfrak{g})$ .
- для  $\sigma\check{\sigma}$ :  $\mathfrak{g}_{[0]} := \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{\bar{i}}(2i)$ ,  $\mathfrak{g}_{[1]} := \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{i+1}(2i)$ , где  $\bar{i}$  – образ  $i$  в  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . При этом также  $e \in \mathfrak{g}_{[1]}$ .



## Факт:

- ▶ Если  $\dim \mathfrak{g}_0(4k+2) = \dim \mathfrak{g}_1(4k+2)$  для всех  $k$ , то  $\dim \mathfrak{g}_0 = \dim \mathfrak{g}_{[0]}$ .
- ▶ Получается упорядоченная тройка инволюций.
- ▶ Конструкция даёт  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ -градуировку алгебры  $\mathfrak{g}$ .

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ -градуировка – это  $\mathfrak{g} = \begin{array}{cc} \mathfrak{g}_{00} & \mathfrak{g}_{01} \\ \oplus & \\ \mathfrak{g}_{10} & \mathfrak{g}_{11} \end{array} \check{\sigma}$ , где  $\mathfrak{g}_{00} = \mathfrak{g}^\sigma \cap \mathfrak{g}^{\check{\sigma}}$ .

## Предложение (4)

Для любой  $\sigma \in \text{Inv}(\mathfrak{g})$ , диаграммы Сатаке  $\text{Sat}(\check{\sigma})$  и  $\text{Sat}(\sigma\check{\sigma})$  имеют ИЧВ. Причем множество черных вершин любой из них содержится среди нулей  $\mathcal{D}(e)$ .

**Причина** в том, что  $e \in \mathfrak{g}_{\{1\}}$  и  $e \in \mathfrak{g}_{[1]}$  и есть теорема 1. □

- ◇ инволюции с ИЧВ определяются разностью  $\dim \mathfrak{g}_1 - \dim \mathfrak{g}_0$ ;
- ◇ Для любой  $\sigma \in \text{Inv}(\mathfrak{g})$ , числа  $\dim \mathfrak{g}_{[1]} - \dim \mathfrak{g}_{[0]}$  и  $\dim \mathfrak{g}_{\{1\}} - \dim \mathfrak{g}_{\{0\}}$ , а тем самым инволюции  $\check{\sigma}$  и  $\sigma\check{\sigma}$ , нетрудно вычислить;
- ◇ инволюции  $\sigma\check{\sigma}$  и  $\check{\check{\sigma}}$ , вообще говоря, различны!

### Лемма

Если  $\text{Sat}(\sigma)$  имеет ИЧВ, то

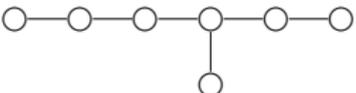
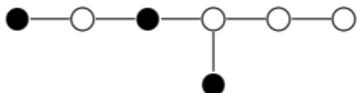
$$\dim \mathfrak{g}_1 - \dim \mathfrak{g}_0 = \text{rk}(\mathfrak{g}) - 2 \cdot \#\{\text{стрелки}\} - 4 \cdot \#\{\text{черные вершины}\}.$$

И для несопряженных инволюций эти значения различны.

Тут  $\dim \mathfrak{g}_1 - \dim \mathfrak{g}_0 = \dim \mathfrak{g}_1^x - \dim \mathfrak{g}_0^x$  для  $\forall x \in \mathfrak{g}_1$  (Костант–Раллис) и  $\dim \mathfrak{g}_1^x = \text{rk} \mathfrak{g} - \#\{\text{черные вершины}\} - \#\{\text{стрелки}\}$ . ...

## Когда $\sigma$ и $\sigma\check{\sigma}$ сопряжены относительно $G$ ?

- для сопряженности  $\sigma$  и  $\sigma\check{\sigma}$  необходимо, чтобы  $\text{Sat}(\sigma)$  имела ИЧВ;
- тогда достаточно иметь равенства  $\dim \mathfrak{g}_0(4k+2) = \dim \mathfrak{g}_1(4k+2)$  для всех  $k$ .
- если  $e \in \mathfrak{g}_{0,\text{reg}}$  – делимый и  $e^{(2)} \in \mathfrak{g}_1(4)$ , то равенства есть.
- **Вывод:** если  $d_0(0) = d_1(4)$  (теор. 2 и 3), то сопряженность есть.
- Есть много и других случаев, когда  $\sigma$  и  $\sigma\check{\sigma}$  сопряжены;
- бывает даже, что все три инволюции сопряжены (**триада** в смысле Э.Б. Винберга). Например, верно для  $\sigma = \vartheta$ , если  $\mathfrak{g} \in \{\mathbf{A}_{4n-1}, \mathbf{B}_{4k-1}, \mathbf{B}_{4k}, \mathbf{D}_{2k+1}, \mathbf{D}_{4k}, \mathbf{E}_6, \mathbf{E}_8, \mathbf{F}_4, \mathbf{G}_2\}$ .

- Пример:  $\sigma, \sigma\check{\sigma}$  :   $\check{\sigma}$  : 

Гипотеза (Для  $e \in \mathfrak{g}_{0,\text{reg}}$ )

Если  $G \cdot e$  – делимая и  $\text{Sat}(\sigma)$  имеет ИЧВ, то  $\sigma \sim \sigma\check{\sigma}$  и  $e^{(2)} \in \mathfrak{g}_1(4)$ .

## Экзотический случай

Если  $\sigma$  – **диаграммная** инволюция, то тройка  $(\sigma, \check{\sigma}, \sigma\check{\sigma})$  состоит из попарно несопряженных инволюций:

- ◇ Диаграммная инволюция – внешняя;
- ◇ Для диаграммной инволюции верно, что  $\mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{N}_{\text{reg}} \neq \emptyset$ ; т.е. если  $e \in \mathfrak{g}_{0,\text{reg}}$ , то  $e \in \mathfrak{g}_{\text{reg}}$ ;
- ◇ Тогда  $e \in \mathfrak{g}_{\{1\}}$  и поэтому  $\check{\sigma} = \vartheta$  – главная внутренняя;
- ◇ При этом  $\sigma\check{\sigma}$  – внешняя и  $\mathfrak{g}_{[1]} \cap \mathfrak{N}_{\text{reg}} \neq \emptyset$ .

При этом, как обычно, надо исключить случай  $\mathfrak{sl}_{2n+1}$ .

$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{g}^\sigma$	$\mathfrak{g}^{\check{\sigma}} = \mathfrak{g}^{\vartheta}$	$\mathfrak{g}^{\sigma\check{\sigma}}$
$A_{2n-1}$	$C_n$	$A_{n-1} \dot{+} A_{n-1} \dot{+} t_1$	$D_n$
$D_{2n}$	$B_{2n-1}$	$D_n \dot{+} D_n$	$B_n \dot{+} B_{n-1}$
$D_{2n+1}$	$B_{2n}$	$D_n \dot{+} D_{n+1}$	$B_n \dot{+} B_n$
$E_6$	$F_4$	$A_5 \dot{+} A_1$	$C_4$
$A_{2n}$	$B_n$	$A_n \dot{+} A_{n-1} \dot{+} t_1$	$B_n$

Таблица: Диаграммные инволюции  $\sigma$  и соотв. тройки

## Литература к докладу

- 1 В. KOSTANT and S. RALLIS. Orbits and representations associated with symmetric spaces, *Amer. J. Math.*, **93** (1971), 753–809.
- 2 Э.Б. ВИНБЕРГ. Группа Вейля градуированной алгебры Ли, *Изв. АН СССР. Сер. Матем.* т. **40**, вып. 3 (1976), 488–526.
- 3 Л.В. АНТОНЯН. О классификации однородных нильпотентных элементов  $\mathbb{Z}_2$ -градуированных полупростых алгебр Ли, *Вестник Моск. Ун-та. Серия Матем., Механика*, вып. 2 (1982), 29–34.
- 4 D. PANYUSHEV. On divisible weighted Dynkin diagrams and reachable elements, *Transformation Groups*, **15**, no. 4 (2010), 983–999.
- 5 D. PANYUSHEV. Nilpotent orbits and mixed gradings of semisimple Lie algebras, *Indag. Math.*, to appear (arXiv: 2101.09228)

Спасибо за внимание!