УДК 519.4

О неприводимости коммутаторных многообразий связанных с инволюциями простых алгебр Ли

Дмитрий И. Панюшев

Независимый Московский Университет, Большой Власьевский пер. 11
121002 Москва, Россия
e-mail: panyush@mccme.ru

Введение

Основное поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто и имеет характеристику нуль. Пусть G – редуктивная алгебраическая группа и $\mathfrak g$ – ее алгебра Ли. В данной работе мы рассматриваем коммутаторные многообразия для представлений изотропии симметрических пространств. А именно, если $\mathfrak g = \mathfrak g_0 \oplus \mathfrak g_1$ – произвольная $\mathbb Z_2$-градуировка, то нас интересует многообразие $\mathfrak C_1 = \{(x,y) \mid [x,y]=0\} \subset \mathfrak g_1 \times \mathfrak g_1$. В моей статье [6] было доказано, что $\mathfrak C_1$ неприводимо, если $\mathbb Z_2$-градуировка имеет максимальный ранг, т.е., $\mathfrak g_1$ содержит картановскую подалгебру из $\mathfrak g$. Здесь мы покажем, что $\mathfrak C_1$ неприводимо для $(\mathfrak g, \mathfrak g_0) = (\mathfrak{sl}_{2n}, \mathfrak{sp}_{2n})$ или $(\mathbf E_6, \mathbf F_4)$. В случае симметрических пар ранга 1 будет показано, что число неприводимых компонент $\mathfrak C_1$ равно числу ненулевых ϑ-нерегулярных нильпотентных G_0-орбит в $\mathfrak g_1$. Мы также обсудим общую задачу о неприводимости коммутаторных многообразий.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 01-01-00756.

1. Напоминания о симметрических парах

Пусть $\mathfrak g$ – редуктивная алгебраическая алгебра Ли и ϑ – ее инволютивный автоморфизм. Собственные подпространства ϑ задают в $\mathfrak g$ $\mathbb Z_2$-градуировку:

$$\mathfrak g = \mathfrak g_0 \oplus \mathfrak g_1\ , \quad \text{где} \quad \mathfrak g_i = \{x \in \mathfrak g \mid \vartheta(x) = (-1)^i x\}.$$

В этом случае мы также говорим, что $(\mathfrak g, \mathfrak g_0)$ – *симметрическая пара.* Если G_0 – связная алгебраическая группа с алгеброй Ли $\mathfrak g_0$, то $\mathfrak g_1$ это G_0-модуль. Для любого подмножества $M \subset \mathfrak g$, его централизатор в $\mathfrak g$ обозначается через $\mathfrak z(M)$. Если $M \subset \mathfrak g_1$, то $\mathfrak z(M)$ ϑ-инвариантно и наследует $\mathbb Z_2$-градуировку от $\mathfrak g$. В частности, если $s \in \mathfrak g_1$ полупрост, то $(\mathfrak z(s), \mathfrak z(s)_0)$ – это некоторая новая симметрическая пара, которая называется *подсимметрической парой* для $(\mathfrak g, \mathfrak g_0)$ или для ϑ. Пусть $\mathfrak c \subset \mathfrak g_1$ – какое-нибудь максимальное подпространство, состоящее из коммутирующих полупростых элементов. Оно называется *картановским*. Все такие подпространства G_0-сопряжены. В следующем утверждении собраны другие полезные результаты из теории орбит и инвариантов группы G_0 в пространстве $\mathfrak{g}_1$.

Предложение 1.1. (Костант - Раллис [3]) *Пусть $x \in \mathfrak{g}_1$.*

(1) *Орбита $G_0{\cdot}x$ замкнута $\Longleftrightarrow$ $G_0{\cdot}x \cap \mathfrak{c} \neq \varnothing$; замыкание орбиты $G_0{\cdot}x$ содержит $0 \in \mathfrak{g}_1$ $\Longleftrightarrow$ x – нильпотентный элемент.*

(2) $\dim G{\cdot}x = 2\dim G_0{\cdot}x$.

(3) *$G{\cdot}\mathfrak{c}$ плотно в $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{z}(\mathfrak{c})_1 = \mathfrak{c}$.*

(4) *$\mathfrak{g}_1/\!\!/G_0 = \operatorname{Spec}\Bbbk[\mathfrak{g}_1]^{G_0}$ – аффинное пространство размерности $\dim\mathfrak{c}$ и морфизм факторизации $\pi : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_1/\!\!/G_0$ – равноразмерен; каждый слой π содержит конечное число G_0-орбит.*

Из 1.1(2) следует, что $\dim\mathfrak{g}_0 - \dim\mathfrak{z}(x)_0 = \dim\mathfrak{g}_1 - \dim\mathfrak{z}(x)_1$ для любого $x \in \mathfrak{g}_1$.

Определение 1.2. Пусть $x \in \mathfrak{g}_1$. Тогда x называется *ϑ-регулярным*, если его G_0-орбита имеет максимальную размерность; x называется *ϑ-отмеченным*, если $\mathfrak{z}(x)_1$ не содержит ненулевых полупростых элементов. (Из наличия разложения Жордана сразу следует, что ϑ-отмеченный элемент нильпотентен.)

Из 1.1(4)следует, что число ϑ-регулярных нильпотентных орбит равно числу неприводимых компонент нуль-конуса $\mathcal{N}_1 = \pi^{-1}(\pi(0))$. Следующее утверждение известно, однако для удобства читателя мы приведем его короткое (новое) доказательство.

Лемма 1.3. *Любой ϑ-регулярный нильпотентный элемент является ϑ-отмеченным.*

Доказательство. Допустим x не является ϑ-отмеченным, и пусть $s \in \mathfrak{z}(x)_1$ – полупростой элемент. Тогда $x+s$ – разложение Жордана для суммы и поэтому $2\dim G_0{\cdot}(x+s) = \dim G{\cdot}(x+s) > \dim G{\cdot}x = 2\dim G_0{\cdot}x$. Это значит, что размерность G_0-орбиты точки x немаксимальна, то есть x не является ϑ-регулярным. □

2. Коммутаторные многообразия

Напомним, что *коммутаторное многообразие* в $\mathfrak{g}$ это множество пар коммутирующих элементов: $\mathfrak{C} = \{(x,y) \in \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \mid [x,y]=0\}$. Аналогично,

$$\mathfrak{C}_1 = \{(x,y) \in \mathfrak{g}_1\times\mathfrak{g}_1 \mid [x,y]=0\}$$

это коммутаторное многообразие, ассоциированное с симметрической парой $(\mathfrak{g},\mathfrak{g}_0)$ (или с $\mathfrak{g}_1$). Если требуется подчеркнуть зависимость коммутаторных многообразий от $\mathfrak{g}$, то мы пишем $\mathfrak{C}(\mathfrak{g})$ и $\mathfrak{C}(\mathfrak{g}_1)$, соответственно.

Фундаментальный результат Ричардсона [9] утверждает, что $\mathfrak{C}$ неприводимо и, более точно, $\mathfrak{C}=\overline{G{\cdot}(\mathfrak{t}\times\mathfrak{t})}$, где $\mathfrak{t}$ – произвольная картановская подалгебра в $\mathfrak{g}$. Однако до сих пор неизвестно, является ли $\mathfrak{C}$ нормальным и порождается ли идеал подмногообразия $\mathfrak{C}$ квадриками. Ситуация для симметрических пар сложнее и интереснее. С одной стороны, для некоторых ϑ удается доказать больше; с другой стороны, $\mathfrak{C}_1$ иногда бывает приводимым, а в некоторых случаях вопрос о неприводимости является открытым. Эффективный метод изучения коммутаторных многообразий, восходящий к Ричардсону [9], состоит в использовании разложения Жордана, индукции по $\dim\mathfrak{c}$ (переход к подсимметрическим парам) и рассмотрении проекции коммутаторного многообразия на 1-ый сомножитель $p:\mathfrak{C}_1\to\mathfrak{g}_1$. В работе [6] мы уже применяли этот метод к симметрическим парам и, более общо, к коммутаторным многообразиям, связанным с произвольными ϑ-группами Э.Б. Винберга.

Напомним, что $\mathfrak{c}\subset\mathfrak{g}_1$ – картановское подпространство. Число $\dim\mathfrak{c}$ называется *рангом* симметрической пары. В [6] было доказано, что $\mathfrak{C}_1=\overline{G_0{\cdot}(\mathfrak{c}\times\mathfrak{c})}$, если ϑ – инволюция максимального ранга (= инволюция Г. Вейля); причем $\mathfrak{C}_1$ – нормальное полное пересечение и его идеал в $\Bbbk[\mathfrak{g}_1\times\mathfrak{g}_1]$ порождается квадриками. С другой стороны, в [6, 3.5] приводится пример инволюции в $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_n$ для которой $\mathfrak{C}_1$ имеет 3 неприводимых компоненты разных размерностей.

Ниже мы собираемся предъявить новые симметрические пары для которых $\mathfrak{C}_1$ неприводимо, а также полностью разобрать случай симметрических пар ранга 1. Начнем с положительного результата, обеспечивающего неприводимость $\mathfrak{C}_1$.

Теорема 2.1. *Пусть ϑ – инволютивный автоморфизм редуктивной алгебраической алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и $(\mathfrak{g},\mathfrak{g}_0)$ - соответствующая симметрическая пара. Пусть для самой этой пары и для любой ее подсимметрической пары выполнено условие, что любой ϑ-отмеченный нильпотент является ϑ-регулярным. Тогда коммутаторное многообразие $\mathfrak{C}_1\subset\mathfrak{g}_1\times\mathfrak{g}_1$ неприводимо.*

Доказательство. Рассмотрим неприводимое подмногообразие $\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{c}}:=\overline{G_0{\cdot}(\mathfrak{c}\times\mathfrak{c})}\subset\mathfrak{C}_1$. Легко видеть (ср. [6, Sect. 3]), что

$$\dim\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{c}}=\dim G_0+2\dim\mathfrak{c}-\dim\mathfrak{z}(\mathfrak{c})_0=\dim\mathfrak{g}_1+2\dim\mathfrak{c}-\dim\mathfrak{z}(\mathfrak{c})_1=\dim\mathfrak{g}_1+\dim\mathfrak{c}\ .$$

Здесь используется тот факт, что $\mathfrak{z}(\mathfrak{c})_1 = \mathfrak{c}$ и для точки общего положения $x \in \mathfrak{c}$ мы имеем $\mathfrak{z}(x) = \mathfrak{z}(\mathfrak{c})$. Как показано в [6, 3.7], $\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{c}}$ – неприводимая компонента многообразия $\mathfrak{C}_1$. Будем называть ее *стандартной.* Все остальные компоненты (если они есть) назовем *странными.* Покажем, что странных компонент быть не может. Обозначим через $\hat{p}$ ограничение p на $\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{c}}$. Так как $\overline{G{\cdot}\mathfrak{c}} = \mathfrak{g}_1$, то проекция $\hat{p}$ сюръективна. Поэтому $\dim \hat{p}^{-1}(x) \geq \dim \mathfrak{c}$ для любого $x \in \mathfrak{g}_1$. С другой стороны, $\hat{p}^{-1}(x) \subset p^{-1}(x) = \{x\} \times \mathfrak{z}(x)_1$. Заметим, что $\dim \mathfrak{z}(x)_1 \geq \dim \mathfrak{c}$ для любого $x \in \mathfrak{g}_1$; причем равенство как раз характеризует ϑ-регулярные элементы. Для ϑ-регулярного нильпотента $e \in \mathfrak{g}_1$ это нам дает, что $p^{-1}(e) = \hat{p}^{-1}(e) \subset \mathfrak{C}_1^{\mathfrak{c}}$. Следовательно, G_0-орбита ϑ-регулярного нильпотента $e \in \mathfrak{g}_1$ никогда не порождает странной компоненты многообразия $\mathfrak{C}_1$ (в том смысле, что $G_0{\cdot}(\{e\} \times \mathfrak{z}(e)_1) \subset \mathfrak{C}_1^{\mathfrak{c}}$). Иначе говоря, если $(x, y) \in \mathfrak{C}_1$ и x это ϑ-регулярный нильпотент, то $(x, y) \in \mathfrak{C}_1^{\mathfrak{c}}$.

Число $\dim(\mathfrak{c} \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}])$ будем называть *полупростым рангом* симметрической пары. Копируя рассуждения Ричардсона, покажем индукцией по полупростому рангу, что $\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{C}_1^{\mathfrak{c}}$. Пусть $(x, y) \in \mathfrak{C}_1$ и $x = x_s + x_n$ – разложение Жордана.

1) Если $x_s \neq 0$ и $x_s \notin \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, то рассмотрим подсимметрическую пару $(\mathfrak{z}(x_s), \mathfrak{z}(x_s)_0)$. Ясно, что $x_n, y \in \mathfrak{z}(x_s)_1$ и даже $(x_n, y) \in \mathfrak{C}(\mathfrak{z}(x_s)_1)$. Не теряя общности можно считать, что $x_s \in \mathfrak{c}$. Тогда $\mathfrak{c}$ является картановским подпространством и в $\mathfrak{z}(x_s)_1$. Однако полупростой ранг подсимметрической пары $(\mathfrak{z}(x_s), \mathfrak{z}(x_s)_0)$ меньше. По предположению индукции имеем $(x_n, y) \in \overline{Z(x_s)_0{\cdot}(\mathfrak{c} \times \mathfrak{c})}$. Но тогда и $(x_s + x_n, y) \in \overline{Z(x_s)_0{\cdot}(\mathfrak{c} \times \mathfrak{c})} \subset \mathfrak{C}_1^{\mathfrak{c}}$.

2) Если $x_s \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, то задача сводится к рассмотрению случая $x = x_n$.

3) Пусть $x = x_n$. Если $\mathfrak{z}(x_n)_1$ содержит полупростой элемент, скажем s, то $cs + x_n \notin \mathcal{N}_1$ при $c \neq 0$ и $(cs + x_n, y) \in \mathfrak{C}_1$ при всех $c \in \Bbbk$. Как следует из части 1), $(cs + x_n, y) \in \mathfrak{C}_1^{\mathfrak{c}}$ при $c \neq 0$. Следовательно, $(x_n, y) \in \mathfrak{C}_1^{\mathfrak{c}}$.

4) Осталось только рассмотреть случай, когда $x = x_n$ – это ϑ-отмеченный нильпотент. Но тогда, ввиду предположения теоремы, x будет ϑ-регулярным. Однако выше мы уже показали, что все пары коммутирующих элементов, включающие ϑ-регулярные нильпотенты, лежат в $\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{c}}$. □

Замечание. В сущности, индуктивные рассуждения *à la* Ричардсон показывают, что приводимость $\mathfrak{C}_1$ всегда связана с тем, что для некоторой подсимметрической пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \bar{\mathfrak{g}}_0)$ в $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0)$ и для некоторого ϑ-отмеченного нильпотента $\bar{e} \in \bar{\mathfrak{g}}_1$ окажется, что $\bar{G}_0{\cdot}(\{\bar{e}\} \times (\mathfrak{z}(\bar{e}) \cap \bar{\mathfrak{g}}_1))$ не лежит в стандартной компоненте многообразия $\mathfrak{C}(\bar{\mathfrak{g}}_1)$.

3. Новые примеры неприводимых коммутаторных многообразий

Симметрическая пара $(\mathfrak{sl}_{2n}, \mathfrak{sp}_{2n})$.

Наша цель – доказать, что в этом случае применима Теорема 2.1 и, следовательно, $\mathfrak{C}_1$ неприводимо. Начнем с явной матричной модели $\mathbb{Z}_2$-градуировки в $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{2n}$. Пусть Υ_n это $n \times n$ матрица с единицами вдоль побочной диагонали. Положим $J = \begin{pmatrix} 0 & \Upsilon_n \\ -\Upsilon_n & 0 \end{pmatrix}$ и $\vartheta(X) = JX^tJ$. Тогда $\mathfrak{sp}_{2n} \simeq \mathfrak{g}_0 = \{X \in Mat_{2n}(\Bbbk) \mid XJ$ симметрична $\}$ и $\mathfrak{g}_1 = \{X \in Mat_{2n}(\Bbbk) \mid XJ$ кососимметрична $\}$. Для $A \in Mat_n(\Bbbk)$ положим $\hat{A} = \Upsilon_n A^t \Upsilon_n$. Легко видеть, что преобразование $A \mapsto \hat{A}$ – это транспонирование относительно побочной диагонали. В этих обозначениях мы имеем:

$$\mathfrak{g}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & -\hat{A} \end{pmatrix} \mid \hat{B} = B,\, \hat{C} = C \right\}, \quad \mathfrak{g}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} N & P \\ Q & \hat{N} \end{pmatrix} \mid \hat{P} = -P,\, \hat{Q} = -Q,\, \operatorname{tr} N = 0 \right\}.$$

Предложение 3.1.

(i) *Пусть $e \in \mathfrak{g}_1$ – нильпотентный элемент. Тогда $SL_{2n}{\cdot}e \cap \mathfrak{g}_1$ это единственная Sp_{2n}-орбита.*

(ii) *Если $\mathcal{O}$ произвольная нильпотентная SL_{2n}-орбита, то $\mathcal{O} \cap \mathfrak{g}_1 \ne \varnothing$ тогда и только тогда, когда любая часть разбиения, соответствующего $\mathcal{O}$, встречается четное число раз.*

Доказательство. (i) Это утверждение хорошо известно. Чисто классификационное доказательство можно найти в [5]. Более концептуальное рассуждение имеется в [8, 4.3].

(ii) Инволюция ϑ, выделяющая $\mathfrak{sp}_{2n}$, имеет следующую диаграмму Сатаке:

$$\bullet\!-\!\!\circ\!\!-\!\bullet\!-\!\!\circ\!\!-\ \cdots\ -\!\bullet$$

(n черных кружков и $n-1$ белый). Как отмечено в [7, p. 1469], результат Антоняна [1, Теорема 1] показывает, что нильпотентная G-орбита пересекает $\mathfrak{g}_1$ тогда и только тогда, когда ее характеристика имеет нулевые отметки на черных кружках диаграммы Сатаке и равные отметки на белых кружках, соединенных стрелками, если последние имеются. В данной ситуации, это как раз означает, что все части соответствующего разбиения встречаются четное число раз. (Следует воспользоваться алгоритмом написания характеристики по разбиению, см. [11, IV.1.13].) $\square$

Далее нам потребуются подалгебра $\mathfrak{s} = \{B = C = 0\} \subset \mathfrak{g}_0$ и подпространство $V = \{P = Q = 0\} \subset \mathfrak{g}_1$. Очевидно, $\mathfrak{s} \simeq \mathfrak{gl}_n$, $V \simeq \mathfrak{sl}_n$ и, по модулю центра, представление $\mathfrak{s}$ на V изоморфно присоединенному представлению $\mathfrak{sl}_n$.

Теорема 3.2.

(i) Имеются естественные биекции между множествами

– нильпотентных SL_{2n}-орбит в $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{2n}$ пересекающих $\mathfrak{g}_1$,

– нильпотетных G_0-орбит в $\mathfrak{g}_1$

– и нильпотентных $\mathfrak{s}$-орбит в V.

Эти биекции задаются отображениями:

$$\mathcal{O} \mapsto \mathcal{O} \cap \mathfrak{g}_1 \mapsto \mathcal{O} \cap V \ ,$$

где $\mathcal{O}$ – нильпотентная орбита в $\mathfrak{g}$. При этом, если $\mathcal{O}$ задается разбиением $(n_1^{2k_1}, \dots, n_t^{2k_t})$, то $\mathcal{O} \cap V$ дается разбиением $(n_1^{k_1}, \dots, n_t^{k_t})$;

(ii) Биекции из части (i) уважают примыкания орбит, т.е.,

$$\overline{\mathcal{O}} \supset \mathcal{O}' \Leftrightarrow \overline{\mathcal{O} \cap \mathfrak{g}_1} \supset \mathcal{O}' \cap \mathfrak{g}_1 \Leftrightarrow \overline{\mathcal{O} \cap V} \supset \mathcal{O}' \cap V \ .$$

(iii) В $\mathfrak{g}_1$ есть единственная ϑ-регулярная нильпотентная орбита и любой ϑ-отмеченный нильпотент в $\mathfrak{g}_1$ является регулярным;

(iv) Любая подсимметрическая пара в $(\mathfrak{sl}_{2n}, \mathfrak{sp}_{2n})$ есть прямая сумма пар такого же вида и тривиальной пары.

Доказательство. (i) Обозначим через $\mathcal{M}^{(2n)}$, $\mathcal{M}'$ и $\mathcal{M}^{(n)}$ три множества нильпотентных орбит, фигурирующие в условии. О биекции между первыми двумя говорится в Предложении 3.1(i). Имеется также естественное отображение $\nu : \mathcal{M}^{(n)} \to \mathcal{M}^{(2n)}$ при котором $n \times n$-матрица N переходит в $\begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & \hat{N} \end{pmatrix} \in V$. Очевидно, это отображение удваивает разбиение (т.е. количество жордановых блоков каждого размера). Поэтому, ввиду Предложения 3.1(ii), ν – биекция.

(ii) Обе импликации “$\Leftarrow$” очевидны. Поэтому достаточно установить что из $\overline{\mathcal{O}} \supset \mathcal{O}'$ следует $\overline{\mathcal{O} \cap V} \supset \mathcal{O}' \cap V$. А это, в свою очередь, следует из того, что примыкание нильпотетнтных орбит определятся стандартным частичным порядком на множестве разбиений [2, 6.2] и связью между разбиениями задающими орбиты $\mathcal{O}$ и $\mathcal{O} \cap V$.

(iii) Предыдущие биекции показывают, что *единственная* ϑ-регулярная орбита в $\mathfrak{g}_1$ происходит из нильпотентной орбиты в $\mathfrak{sl}_{2n}$ с разбиением (n, n); иначе говоря, из регулярной нильпотентной $\mathfrak{sl}_n$-орбиты в V. Любая же другая орбита происходит из нерегулярнной орбиты в $\mathfrak{sl}_n$. Централизатор нерегулярного нильпотентного элемента в $\mathfrak{sl}_n$ всегда содержит полупростые элементы. При отождествлении $\mathfrak{sl}_n$ с пространством V

(посредством “удвоения”, как в части (i)), это дает нам полупростой элемент в $\mathfrak{z}(e)_1$ для любого $e \in V \subset \mathfrak{g}_1$ не являющегося ϑ-регулярным.

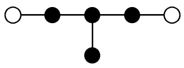
(iv) Подпространство $\mathfrak{c} = \{\mathrm{diag}(t_1, \dots, t_n, t_n, \dots, t_1) \mid \sum t_i = 0\} \subset V$ является картановским в $\mathfrak{g}_1$. Ввиду сопряженности картановских продпространств, достаточно рассматривать централизаторы элементов из $\mathfrak{c}$. В этом случае структура $\mathfrak{z}(x)$, $x \in \mathfrak{c}$, видна непосредственно из матричного описания $\mathfrak{g}_0$ и $\mathfrak{g}_1$. □

Следствие 3.3. *Для $(\mathfrak{sl}_{2n}, \mathfrak{sp}_{2n})$ коммутаторное многообразие $\mathfrak{C}_1$ неприводимо.*

Доказательство. Это следует из Теоремы 2.1 и Теоремы 3.2(iii),(iv). □

Симметрическая пара $(\mathbf{E}_6, \mathbf{F}_4)$.

Будем следовать тем же путем, что и выше. Сначала немного нумерологии. В данном случае $\dim \mathfrak{g}_0 = 52$, $\dim \mathfrak{g}_1 = 26$, $\dim \mathfrak{c} = 2$. Диаграмма Сатаке данной пары – это



. В $\mathbf{E}_6$ есть только 2 ненулевых нильпотентных орбиты с характеристиками, имеющими нулевые отметки на черных кружках:

$$\begin{smallmatrix} 2-0-0-0-2 \\ 0 \end{smallmatrix} \rightsquigarrow \tilde{\mathcal{O}}_{48} \quad \text{и} \quad \begin{smallmatrix} 1-0-0-0-1 \\ 0 \end{smallmatrix} \rightsquigarrow \tilde{\mathcal{O}}_{32},$$

где индекс обозначает размерность. Так как инволюция ϑ связана с диаграммным автоморфизмом $\mathbf{E}_6$, то, ввиду [8, 4.3], пересечения $\tilde{\mathcal{O}}_i \cap \mathfrak{g}_1$ это в точности $\mathbf{F}_4$-орбиты (половинной размерности). Таким образом, $\mathfrak{g}_1$ имеет две ненулевых нильпотентных $\mathbf{F}_4$-орбиты: $\mathcal{O}_{24}$ и $\mathcal{O}_{16}$. Очевидно, $\mathcal{O}_{24}$ – это ϑ-регулярная орбита. Что касается $\mathcal{O}_{16}$ (или $\tilde{\mathcal{O}}_{32}$), то мы сравним редуктивные части централизаторов $\mathfrak{z}(e)$ и $\mathfrak{z}(e)_0$ для $e \in \mathcal{O}_{16}$. По таблицам Элашвили [12, Таблица 4] находим, что $\mathfrak{z}(e)^{red} = \mathbf{B}_3 \times T_1$. Здесь T_1 – это алгебра Ли одномерного тора. С другой стороны, e – старший вектор в 26-мерном неприводимом представлении $\mathbf{F}_4$. Поэтому $(\mathfrak{z}(e)_0)^{red} = \mathbf{B}_3$. Следовательно, $\mathfrak{z}(e)_1 \supset T_1$ и e не является ϑ-отмеченным.

Единственная нетривиальная собственная подсимметрическая пара, связанная с $(\mathbf{E}_6, \mathbf{F}_4)$ – это $(\mathbf{D}_5, \mathbf{B}_4)$. У последней есть единственная нетривиальная нильпотентная орбита. Следовательно, здесь применима Теорема 2.1, и мы заключаем, что

Предложение 3.4. *Для $(\mathbf{E}_6, \mathbf{F}_4)$ коммутаторное многообразие $\mathfrak{C}_1$ неприводимо.*

4. Коммутаторные многообразия для симметрических пар ранга 1

В этом разделе мы рассматривем симметрические пары для которых $\dim \mathfrak{c} = 1$. Поэтому стандартная неприводимая компонента $\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{c}}$ имеет размерность $\dim \mathfrak{g}_1 + 1$. Напомним, что

$\mathcal{N}_1 \subset \mathfrak{g}_1$ – нуль-конус и что, как показано в (2.1), ϑ-регулярная орбита из $\mathcal{N}_1$ никогда не порождает странной неприводимой компоненты.

Теорема 4.1. *Любая нетривиальная G_0-орбита в $\mathfrak{g}_1$, не являющаяся ϑ-регулярной, порождает странную неприводимую компоненту. Более точно, если $\dim G_0{\cdot}e < \dim \mathfrak{g}_1 - 1$, то $\overline{G_0{\cdot}(\{e\} \times \mathfrak{z}(e)_1)}$ – странная неприводимая компонента многообразия $\mathfrak{C}_1$, размерности* $\dim \mathfrak{g}_1$. *Причем разные орбиты порождают разные неприводимые компоненты.*

Доказательство. У нас $\dim \mathfrak{c} = 1$, поэтому $\dim G_0{\cdot}x \le \dim \mathfrak{g}_1 - 1$ для любого $x \in \mathfrak{g}_1$. Так как $\dim G_0{\cdot}x = \dim \mathfrak{g}_0 - \dim \mathfrak{z}(x)_0 = \dim \mathfrak{g}_1 - \dim \mathfrak{z}(x)_1$, то:

$$(*) \qquad x \text{ является } \vartheta\text{-регулярным} \ \Leftrightarrow\ \dim \mathfrak{z}(x)_1 = 1 \ \Leftrightarrow\ \mathfrak{z}(x)_1 = \Bbbk x.$$

В случае ранга 1, любой элемент в $\mathfrak{g}_1$ либо полупрост, либо нильпотентен; причем все полупростые элементы ϑ-регулярны. Следовательно, нерегулярный элемент обязательно нильпотентен. Кроме того, $\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{c}}$ – это просто множество пар пропорциональных элементов из $\mathfrak{g}_1$.

Если $e \in \mathcal{N}_1 \setminus \{0\}$ – нерегулярный элемент, то $\dim \mathfrak{z}(e)_1 \ge 2$. Пусть $e' \in \mathfrak{z}(e)_1 \setminus \Bbbk e$. Тогда $(e, e') \in \mathfrak{C}_1 \setminus \mathfrak{C}_1^{\mathfrak{c}}$. Точнее, $\overline{G_0{\cdot}(\{e\} \times \mathfrak{z}(e)_1)}$ это $\dim \mathfrak{g}_1$-мерное неприводимое подмногообразие в $\mathfrak{C}_1$, не лежащее в $\mathfrak{C}_1^{\mathfrak{c}}$. Заметим, что $G_0{\cdot}(\{x\} \times \mathfrak{z}(x)_1) \subset \mathfrak{C}_1^{\mathfrak{c}}$, если x ϑ-регулярен (следует из $(*)$) или $x = 0$. Поэтому

$$(**) \qquad \mathfrak{C}_1 = \mathfrak{C}_1^{\mathfrak{c}} \cup \left(\textstyle\bigcup_{i \in I} \overline{G_0{\cdot}(\{e_i\} \times \mathfrak{z}(e_i)_1)}\right),$$

где e_i пробегает множество представителей всех ненулевых ϑ-нерегулярных G_0-орбит в $\mathfrak{g}_1$. Положим $\mathfrak{C}^{(i)} = \overline{G_0{\cdot}(\{e_i\} \times \mathfrak{z}(e_i)_1)}$. Тогда мы имеем:

- I конечно ввиду конечности множества нильпотентных орбит, см. 1.1(4);
- $\dim \mathfrak{C}^{(i)} = \dim \mathfrak{g}_1$ для любого $i \in I$;
- $\mathfrak{C}^{(i)} \ne \mathfrak{C}^{(j)}$ (ибо они имеют разные проекции на 1-ый сомножитель);
- $\mathfrak{C}^{(i)} \not\subset \mathfrak{C}_1^{\mathfrak{c}}$ (см. выше).

Значит, $(**)$ – это разложение на неприводимые компоненты. □

Пример. Следующая табличка содержит все симметрические пары ранга 1, и указывает для каждой число неприводимых компонент у $\mathfrak{C}_1$.

Симм. пара	$(\mathfrak{so}_n, \mathfrak{so}_{n-1})$ $n \ge 3$	$(\mathfrak{sp}_{2n}, \mathfrak{sp}_{2n-2} \times \mathfrak{sp}_2)$ $n \ge 2$	$(\mathbf{F}_4, \mathbf{B}_4)$	$(\mathfrak{sl}_n, \mathfrak{sl}_{n-1} \times T_1)$ $n \ge 3$
$\#\ \mathrm{Irr}(\mathfrak{C}_1)$	1	2	2	3

Последний столбец как раз представляет собой пример, рассмотренный в [6, 3.5].

Замечания. 1. В случае пар ранга 1 *любой* ненулевой нильпотент в $\mathfrak{g}_1$ является ϑ-отмеченным. (Ибо все ненулевые полупростые элементы в $\mathfrak{g}_1$ ϑ-регулярны.)

2. Вопрос о неприводимости коммутаторных многообразий для пар ранга 1 рассматривается в недавней работе [10]. Наши результаты были получены одновременно и независимо. Однако наш подход короче и дает явное описание неприводимых компонент.

5. Что дальше?

Отбрасывая симметрические пары максимального ранга, два случая, рассмотренные в параграфе 3, и пары ранга 1, мы видим, что вопрос о неприводимости коммутаторного многообразия остается открытым для следующих симметрических пар:

$(\mathfrak{sl}_{n+m}, \mathfrak{sl}_n \times \mathfrak{sl}_m \times T_1)$, $1 < m \le n$; $(\mathfrak{so}_{n+m}, \mathfrak{so}_n \times \mathfrak{so}_m)$, $m \ge 2, n-m \ge 2$; $(\mathfrak{sp}_{n+m}, \mathfrak{sp}_n \times \mathfrak{sp}_m)$, $1 < m \le n$; $(\mathfrak{so}_{2n}, \mathfrak{sl}_n \times T_1)$, $n \ge 4$; $(\mathbf{E}_6, \mathbf{D}_5 \times T_1)$; $(\mathbf{E}_7, \mathbf{E}_6 \times T_1)$; $(\mathbf{E}_6, \mathbf{A}_5 \times \mathbf{A}_1)$; $(\mathbf{E}_7, \mathbf{D}_6 \times \mathbf{A}_1)$; $(\mathbf{E}_8, \mathbf{E}_7 \times \mathbf{A}_1)$.

Можно проверить, что каждая из этих пар содержит ϑ-отмеченные элементы, не являющиеся ϑ-регулярными, так что Теорема 2.1 здесь неприменима. Однако, я полагаю, что $\mathfrak{C}_1$ неприводимо во всех этих случаях. (Для классических серий и малых значений параметров m, n неприводимость можно проверять непосредственно.) Это может быть сформулировано и в более красивых и инвариантных терминах.

Рассмотрим представление $\rho_0 : G_0 \to GL(\mathfrak{g}_1)$ ассоциированное с симметрической парой $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0)$. Пусть $\tilde{G}_0$ – это наибольшая связная подгруппа в $GL(\mathfrak{g}_1)$, такая что $\Bbbk[\mathfrak{g}_1]^{G_0} = \Bbbk[\mathfrak{g}_1]^{\tilde{G}_0}$.

Гипотеза 5.1. *Многообразие $\mathfrak{C}_1$ неприводимо тогда и только тогда, когда симметрическая пара $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0)$ удовлетворяет условию $G_0 = \tilde{G}_0$.*

Все случаи, когда $G_0 \ne \tilde{G}_0$ были найдены в [4]. Оказывается (если $\mathfrak{g}$ – простая), это в точности симметрические пары ранга 1, отличные от $(\mathfrak{so}_n, \mathfrak{so}_{n-1})$! Таким образом, Теорема 4.1 и классификация полученная в [4] доказывают необходимость условия в Гипотезе 5.1. Отметим также, что Гипотеза, в частности, утверждает, что если ранг неразложимой симметрической пары ≥ 2, то $\mathfrak{C}_1$ неприводимо.

На эту ситуацию можно взглянуть и с более общей точки зрения. Забудем пока о симметрических парах и рассмотрим какое-нибудь представление $\rho : G \to GL(V)$ связной редуктивной группы G. Следуя работе [6], рассмотрим 'коммутаторное' многообразие $\mathfrak{C}_V \subset V \times V^*$. По определению,

$$\mathfrak{C}_V = \{(v, \xi) \in V \times V^* \mid < \xi, \mathfrak{g}{\cdot}v >= 0\}.$$

Здесь $< \, , \, >$ обозначает естественное спаривание между V и V^*. Иначе говоря, если $\varphi : V \times V^* \to \mathfrak{g}^* \simeq \mathfrak{g}$ – отображение момента (см. [6, Sect. 1]), то $\mathfrak{C}_V = \varphi^{-1}(0)$. Напомним, что действие $(G{:}V)$ называется *обозримым*, если все слои орбитного морфизма $\pi_{G,V} : V \to V/\!\!/G$ содержат конечное число орбит; действие называется *стабильным*, если среди G-орбит максимальной размерности найдется замкнутая. Как и выше, определим группу $\tilde{G}$ как максимальную связную подгруппу в $GL(V)$, обладающую тем свойством, что $\Bbbk[V]^G = \Bbbk[V]^{\tilde{G}}$. При этом не предполагается, что группа $\tilde{G}$ обязательно редуктивна.

Теорема 5.2. *Пусть действие $(G : V)$ стабильно и обозримо. Предположим что $\tilde{G} \supsetneqq G$ и, более того, найдется $v \in V$, такая что $\dim \tilde{G}{\cdot}v > \dim G{\cdot}v$. Тогда $\mathfrak{C}_V$ приводимо.*

Доказательство. Так как G и $\tilde{G}$ имеют одинаковые инварианты в V, то $V/\!\!/G \simeq V/\!\!/\tilde{G}$ и слои орбитных морфизмов у них одинаковы. Ввиду стабильности действия G, слой общего положения является замкнутой G-орбитой и, следовательно, замкнутой $\tilde{G}$-орбитой. Таким образом, действие $(\tilde{G} : V)$ также стабильно и обозримо. Рассмотрим коммутативную диаграмму, включающую отображения момента для действий групп G и $\tilde{G}$:

$$\begin{tikzcd} V \times V^* \arrow[r, "\tilde{\varphi}"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \tilde{\mathfrak{g}}^* \arrow[d] \\ & \mathfrak{g}^* \end{tikzcd}$$

. Здесь вертикальная стрелка – это отображение, двойственное к вложению $\mathfrak{g} \hookrightarrow \tilde{\mathfrak{g}}$. Положим $\tilde{\mathfrak{C}}_V = \tilde{\varphi}^{-1}(0)$. Ясно, что $\mathfrak{C}_V \supset \tilde{\mathfrak{C}}_V$. Согласно [6, 3.7], из обозримости и стабильности обоих рассматриваемых действий следует, что

$$\dim \mathfrak{C}_V = \dim V + \dim V/\!\!/G = \dim \tilde{\mathfrak{C}}_V \ .$$

(Соответствующее утверждение в [6] формулируется для редуктивных групп. Однако, по существу, редуктивность там нигде не используется.) Поэтому достаточно показать, что $\tilde{\mathfrak{C}}_V \neq \mathfrak{C}_V$. По нашему предположению, найдется $v \in V$, такая что $\tilde{\mathfrak{g}}{\cdot}v \supsetneqq \mathfrak{g}{\cdot}v$. Возьмем $\xi \in V^*$ так что $< \xi, \mathfrak{g}{\cdot}v >= 0$ и $< \xi, \tilde{\mathfrak{g}}{\cdot}v >\neq 0$. Тогда $(v, \xi) \in \mathfrak{C}_V \setminus \tilde{\mathfrak{C}}_V$. $\square$

Заметим, что может случиться так, что $\tilde{G} \supsetneqq G$ и $\Bbbk[V]^{\tilde{G}} = \Bbbk[V]^G \neq \Bbbk$, но все орбиты этих групп одинаковы! Например, $G = \mathbf{G}_2$ и V – пространство 7-мерного представления. Тогда $\tilde{G} = SO_7$.

Возвращаясь теперь к симметрическим парам, мы видим, что Теорема 5.2 частично объясняет ситуацию с симметрическими парами ранга 1. Если пара $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0)$ имеет ранг 1 и отлична от $(\mathfrak{so}_{\mathfrak{n}}, \mathfrak{so}_{\mathfrak{n}-1})$, то $\tilde{G}_0 = SO(\mathfrak{g}_1)$. При этом любая ϑ-нерегулярная G_0-орбита в $\mathfrak{g}_1$ порождает нильпотентную $SO(\mathfrak{g}_1)$-орбиту большей размерности. И в этом-то и состоит причина появления странных неприводимых компонент у $\mathfrak{C}(\mathfrak{g}_1)$.

Интересно было бы найти все обозримые и стабильные действия $(G : V)$ для которых $\tilde{G} \neq G$. Возможно таких просто не бывает, если $\dim V/\!\!/G > 1$.

Литература

[1] *Антонян Л.В.* О классификации однородных элементов $\mathbb{Z}_2$-градуированных полупростых алгебр Ли // Вестник Моск. Ун-та. Серия Матем., Механика. 1982. № 2. С. 29–34

[2] *Collingwood D.H.*, *McGovern W.* “Nilpotent orbits in semisimple Lie algebras”, New York: Van Nostrand Reinhold, 1993

[3] *Kostant B.*, *Rallis S.* Orbits and representations associated with symmetric spaces // Amer. J. Math. 1971. T. 93 P. 753–809

[4] *Levasseur T.*, *Ushirobira R.* Adjoint vector fields on the tangent space of semisimple symmetric spaces // J. Lie Theory. 1999. T. 9. P. 293–304

[5] *Ohta T.* Closures of nilpotent orbits in classical symmetric pairs and their singularities // Tohoku Math. J. (2) 1991. T. 43. P. 161–213

[6] *Panyushev D.* The Jacobian modules of a Lie algebra and geometry of commuting varieties // Compositio Math. 1994. T. 94. P. 181–199

[7] *Panyushev D.* On spherical nilpotent orbits and beyond // Ann. Inst. Fourier. 1999. T. 49. P. 1453–1476

[8] *Reeder M.* Desingularizations of some unstable orbit closures // Pacific J. Math. 1995. T. 167. P. 327–343

[9] *Richardson R.W.* Commuting varieties of semisimple Lie algebras and algebraic groups, // Compositio Math. 1979. T. 38. P. 311–327

[10] *Sabourin H.*, *Yu R.W.T.* Sur l’irreductibilite de la variété commutante d’une paire symétrique réductive de rang 1, // Bull. Sci. Math. 2002. T. 126. P. 143–150

[11] *Спрингер Т.А.*, *Штейнберг Р.* Классы сопряженных элементов, В кн.: “Семинар по алгебраическим группам”, С. 162–262. М.: “Мир”, 1973

[12] *Элашвили А.Г.* Централизаторы нильпотентных элементов в полупростых алгебрах Ли, // Труды Тбилисского матем. института имени Размадзе. 1975. Т. 46. С. 109–132