

Open problems in mathematical physics and geometry

Mikhail Skopenkov mikhail.skopenkov@gmail.com

Это подборка открытых проблем в математической физике и классической геометрии. Формулировки большинства задач элементарны и используют только небольшое количество определений, приведенных в тексте. В то же время их решение подводит к важным идеям современной математики. Каждая из нумерованных задач (кроме упражнений) может быть темой для курсовой работы (достаточно даже частичного продвижения). Задачи подходят для студентов любого курса. Также приводится подборка упражнений для быстрого введения в каждое из трех исследовательских направлений.

This is a collection of visual open problems in mathematical physics and in classical geometry. The statements of most problems are elementary and use only a few definitions given in the text. But their solution leads to important ideas of modern mathematics. Each individual problem with a number (except exercises) is a topic for a one-year term work (even a partial advance is sufficient). The problems are appropriate at any education term. A collection of exercises for quick introduction to the 3 research directions is also presented.

Содержание

Направление I. Наглядная теория поля	2
1 Стартовые упражнения: шашки Фейнмана	2
2 Открытые проблемы: шашки Фейнмана	3
3 Открытые проблемы: обобщения шашек Фейнмана	4
4 Открытые проблемы: одновременное протекание	5
Направление II. Наглядная теория потенциала и замощения	6
5 Стартовые упражнения	6
6 Открытые проблемы о замощениях с физической интерпретацией	7
Направление III. Наглядная геометрия для архитектуры	8
7 Стартовые упражнения	8
Direction I. Visual field theory	9
8 Leading exercises: Feynman checkers	9
9 Open problems: Feynman checkers	10
10 Open problems: generalizations of Feynman checkers	11
Direction II. Visual potential theory and tilings	12
11 Leading excercises	12
12 Open tiling problems with networks interpretation	13
13 Inverse problem for alternating-current networks	14
14 Asymptotic estimates for conductance	15
Direction III. Visual geometry for architecture	15
15 Surfaces containing two parabolas through each point	16
16 Surfaces containing two circles through each point	17

Направление I. Наглядная теория поля

Mikhail Skopenkov mikhail.skopenkov@gmail.com

Одна из важнейших открытых проблем математики — строгое определение *квантовой теории поля*.

1. Стартовые упражнения: шашки Фейнмана

Вопрос: какова вероятность обнаружения электрона в клетке (x, y) , если он был испущен из клетки $(0, 0)$?

Предположения: электрон равномерно движется по оси y и не движется по оси z , точечный источник, единичная масса и шаг решетки, нет взаимодействия, нет рождения электрон-позитронных пар.

Результаты: эксперимент на двух щелях, сохранение заряда.

На бесконечной шахматной доске шашка ходит на соседнюю по диагонали клетку, влево-вверх или вправо-вверх. Каждому пути s шашки сопоставим вектор $\vec{a}(s)$ на плоскости следующим образом. В начале движения этот вектор направлен вверх и имеет длину 1. Пока шашка движется вдоль прямой, вектор не меняется, а после каждого поворота шашки он поворачивается на 90° по часовой стрелке (независимо от того, в какую сторону повернула шашка). В конце движения вектор сжимается $2^{(y-1)/2}$ раз, где y — общее число ходов шашки (т.е. заменяется на вектор такого же направления, но длины $1/2^{(y-1)/2}$). Полученный в итоге вектор и есть $\vec{a}(s)$. Например, для верхнего пути на рис. 1 вектор $\vec{a}(s) = (1/8, 0)$.

Обозначим $\vec{a}(x, y) := \sum_s \vec{a}(s)$, где суммирование ведется по всем путям шашки из клетки $(0, 0)$ в клетку (x, y) , начинаяющихся с хода вправо-вверх. Если таких путей нет, то будем считать $\vec{a}(x, y) := \vec{0}$. Например, $\vec{a}(1, 3) = (0, -1/2) + (1/2, 0) = (1/2, -1/2)$. Квадрат длины вектора $\vec{a}(x, y)$ называется *вероятностью¹ обнаружения в точке (x, y) электрона, испущенного из точки $(0, 0)$* . Она обозначается $P(x, y) := |\vec{a}(x, y)|^2$.

На рис. 3 цвет точки (x, y) , где $x + y$ четно, показывает значение $P(x, y)$.

Будем называть клетки (x, y) с четным и нечетным $x + y$ *черными* и *белыми* соответственно.

1. Наблюдения для малых y . Ответьте на вопросы для $y = 1, 2, 3, 4$ (и сформулируйте свои собственные вопросы и предположения для произвольного y): найдите $\vec{a}(x, y)$ и $P(x, y)$ для всех x ; когда $P(x, y) = 0$? Чему равна $\sum_{x \in \mathbb{Z}} P(x, y)$ для фиксированного y ? Как направлены $\vec{a}(1, y)$ и $\vec{a}(0, y)$?

Вероятность² обнаружения электрона в клетке (x, y) при поглощении в клетке (x', y') определяется аналогично $P(x, y)$, только суммирование производится по путям s , не проходящим через (x', y') . Обозначим ее $P(x, y$ минус $x', y')$, и аналогично $P(x, y$ минус $M)$ для набора клеток M .

2. Эксперимент на двух щелях. Верно ли, что $P(x, y) = P(x, y$ минус $0, 2) + P(x, y$ минус $2, 2)$? А что $P(x, y$ минус $x', y') \leq P(x, y)$?

3. Найдите $P(0, 12)$. Придумайте быстрый способ составления таблицы значений $\vec{a}(x, y)$, не требующий перебора всех путей.

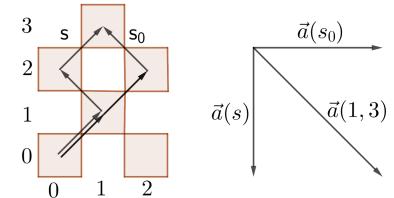
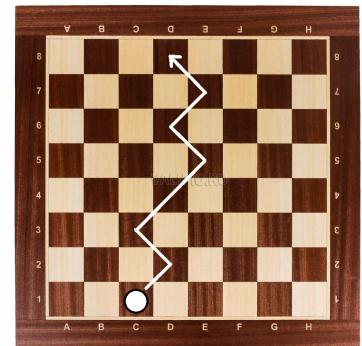


Рис. 1: Пути шашек

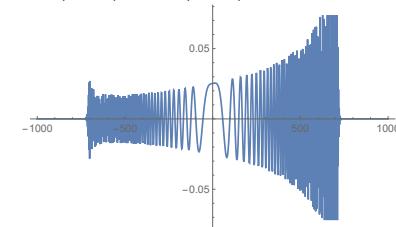


Рис. 2: $a_2(x, 1000)$

Обозначим через $a_1(x, y)$ и $a_2(x, y)$ координаты вектора $\vec{a}(x, y)$; см. рис. 2.

4. (Загадка) Нарисуйте все пути, дающие ненулевой вклад в $a_1(1, 5)$. То же для $a_2(1, 5)$.

5. Уравнение Дирака. Выразите $a_1(x, y)$ и $a_2(x, y)$ через $a_1(x \pm 1, y - 1)$ и $a_2(x \pm 1, y - 1)$.

6. Сохранение вероятности/заряда. Для каждого целого $y > 0$ выполнено $\sum_{x \in \mathbb{Z}} P(x, y) = 1$.

7. Симметрия. Найдите формулу, которая связывает между собой $a_1(x, 100)$ при $x < 0$ и при $x \geq 0$ (выразите значения при $x < 0$ через значения при $x \geq 0$). Тот же вопрос про $a_1(x, 100) + a_2(x, 100)$.

8. Принцип Гюйгенса. Как быстро найти $\vec{a}(x, 199)$, зная значения $\vec{a}(x, 100)$ при всех целых x ?

9. Используя компьютер, постройте графики функций $f_y(x) = P(x, y)$ для разных y (соедините каждую пару точек $(x, f_y(x))$ и $(x + 2, f_y(x + 2))$ отрезком); ср. с рис. 2. То же для функции $a_1(x, y)$.

10. * Найдите явную формулу для $\vec{a}(x, y)$ (в ответе можно использовать сумму не более y слагаемых).

¹Удобно считать, что значение y фиксировано, а клетки $(-y, y), (-y + 2, y), \dots, (y, y)$ — это все возможные исходы эксперимента. Например, y -тая горизонталь может быть фотопластиной, детектирующей электрон. Знакомство с теорией вероятностей не требуется для решения задач.

Если бы шашка просто ходила случайно (после первого хода вправо-вверх), то $|\vec{a}(s)|^2$ было бы вероятностью пути s . Последняя вероятность не имеет смысла в нашей модели, но объясняет нормирующий множитель $2^{(y-1)/2}$.

Осторожно! Такое правило вычисления вероятности годится только для базовой модели; оно изменится при обобщениях.

²Здесь появляется дополнительный исход эксперимента, когда электрон поглощается и не достигает фотопластины.

Открытые проблемы в математической физике

Mikhail Skopenkov mikhail.skopenkov@gmail.com

Это подборка открытых проблем по математической физике³. Формулировки большинства из них используют только понятия, доступные первокурсникам, но их решение подводит к важным идеям современной математики. Каждая из задач может быть темой для курсовой работы (на любом курсе).

2. Открытые проблемы: шашки Фейнмана

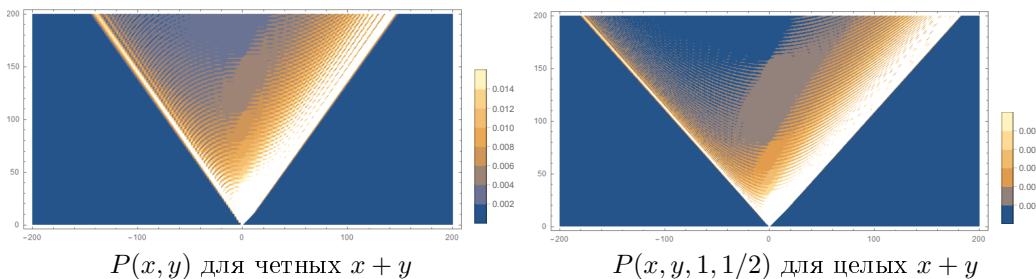


Рис. 3: Вероятность обнаружить электрон в малом квадрате вокруг данной точки (белым показаны сильные колебания этой вероятности). Слева: для базовой модели из §1. Справа: для обобщения из §3.

Графики на рис. 3 и 4 слева показывают, что для фиксированного y вероятнее всего обнаружить электрон вблизи точки $x = y/\sqrt{2}$ (!). Хотя это заметили в 2001, следующий вопрос все еще открыт.

1. (А. Даниярходжаев–Ф. Куюнов; см. рис. 3 и 4 слева) Обозначим через $x_{\max}(y)$ точку, в которой $P(x,y)$ достигает максимума при фиксированном y . Ограничено ли $x_{\max}(y) - y/\sqrt{2}$ при $y \rightarrow \infty$?
2. (С. Нечаев, загадка; см. рис. 4 слева-внизу) Найти положения “широких провалов” (участков, где колебания меньше) в графике вероятности $P(x,y)$ для фиксированного большого y .

При $x > y/\sqrt{2}$ графики показывают, что величина $a(x,y)$ мала. А насколько быстро она убывает?

3. (А. Бородин) Найти асимптотику величины $a(2\lceil\frac{vy}{2}\rceil, y)$ при $y \rightarrow \infty$ для фиксированного $v > 1/\sqrt{2}$.

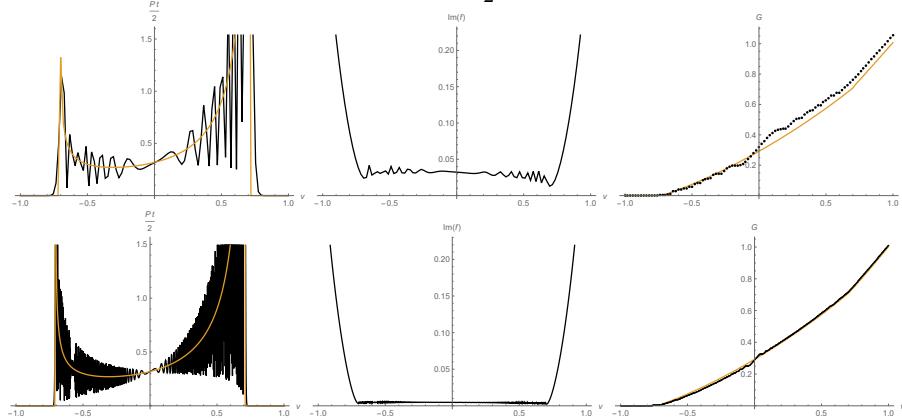


Рис. 4: Графики нормализованной вероятности $\frac{y}{2}P(2\lceil\frac{vy}{2}\rceil, y)$, свободной энергии $\operatorname{Im} f_y(v) := -\frac{4}{\pi y} \log |a(2\lceil\frac{vy}{2}\rceil, y)|$, распределения $G_y(v) := \sum_{x \leq vy} \frac{2}{y} \left| \frac{a_2(x,y)}{a(x,y)} \right|^2$ при $y = 100$ (сверху) и $y = 1000$ (снизу).

Цель следующих 3 задач — установить *фазовый переход* в шашках Фейнмана в сильном смысле: предельная плотность свободной энергии и другие величины неаналитичны при $v = \pm 1/\sqrt{2}$.

4. (См. рис. 4 в центре.) Для каждого $v \in [-1, 1]$ найдите предел $\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{y} \log |a(2\lceil\frac{vy}{2}\rceil, y)|$. Докажите, что полученная в пределе функция имеет разрывную производную в точках $v = \pm 1/\sqrt{2}$.

Следующая задача — о “вероятности” одинакового направления первого и последнего хода.

5. (См. рис. 4 справа.) Для каждого $0 < v < 1/\sqrt{2}$ докажите равенство

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \sum_{0 \leq x \leq vy} \frac{2}{y} \left| \frac{a_2(x,y)}{a(x,y)} \right|^2 = \frac{1}{2} \left(1 + v - \sqrt{1 - v^2} + \log \frac{1 + \sqrt{1 - v^2}}{2} \right).$$

Вычислите этот же предел при $1/\sqrt{2} < v < 1$.

³Имена авторов указаны после номеров задач. Некоторые из гипотез были предложены участниками летней конференции Турнира городов и летней школы “Современная математика” на основе численных экспериментов. Слово “загадка” означает, что нужно придумать и точную формулировку утверждения, и доказательство.

Теперь задача о “вероятности” одинакового направления первого, последнего и “среднего” хода.

6. Найдите слабый предел $\lim_{y \rightarrow \infty} \left| \sum_{x \in \mathbb{Z}} \frac{a_2(x, y)^2}{a_2(2\lceil vy \rceil - 1, 2y - 1)} \right|^2$.

Для множества клеток M обозначим $P(M) := \sum_{p \in M} P(p \text{ минуя } M \setminus \{p\})$ вероятность обнаружения электрона в множестве M .

7. (Г. Минаев–И. Русских) Верны ли равенства

$$P(\{(-1, y) : y \geq 3 \text{ нечетно}\}) = \frac{1}{2}P(\{(3, y) : y \geq 3 \text{ нечетно}\}) = \frac{4}{\pi} - 1?$$

Отметим, что похожие числа возникают как проводимости между узлами сетки \mathbb{Z}^2 ; см. §14.

3. Открытые проблемы: обобщения шашек Фейнмана

В дальнейших задачах используется следующее обобщение модели. Зафиксируем $\varepsilon, m > 0$, называемые *стороной клетки и массой частицы*. Будем считать, что центры клеток расположены в точках с координатами вида $(k\varepsilon, l\varepsilon)$, где k и l – целые. Каждому пути s шашки сопоставим вектор $\vec{a}(s, m\varepsilon)$ следующим образом. В начале движения это $(0, 1)$. Пока шашка движется вдоль прямой, вектор не меняется, а после каждого поворота он поворачивается на 90° по часовой стрелке и умножается на $m\varepsilon$. В конце движения вектор сжимается в $(1 + m^2\varepsilon^2)^{(y/\varepsilon - 1)/2}$ раз, где y/ε – общее число ходов. Полученный в итоге вектор и есть $\vec{a}(s, m\varepsilon)$. Вектор $\vec{a}(x, y, m, \varepsilon)$ и число $P(x, y, m, \varepsilon)$ определяются аналогично $\vec{a}(x, y)$ и $P(x, y)$, только вместо $\vec{a}(s)$ используется $\vec{a}(s, m\varepsilon)$. В частности, $P(x, y, 1, 1) = P(x, y)$. На правом графике рис. 3 цвет точки (x, y) показывает значение $P(x, y, 1, 1/2)$.

8. Верно ли, что $P(x, y, m, \varepsilon) \neq 0$ при $y > |x|$ и четном $(x + y)/\varepsilon$?

9. (И. Гайдай–Турлов–Т. Ковалев–А. Львов) Верно ли, что $\lim_{y \rightarrow +\infty} \sum_{x \in \mathbb{Z}} a_1(x\varepsilon, y\varepsilon, m, \varepsilon)^2 = \frac{m\varepsilon}{2\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}}$?

Следующая задача обобщает и уточняет задачу 1 выше.

10. (А. Даниярходжаев–Ф. Куянов) Обозначим через $x_{\max} = x_{\max}(y, m, \varepsilon)$ точку, в которой $P(x) := P(x, y, m, \varepsilon)$ достигает максимума. Является ли величина $x_{\max}/\varepsilon - y/\varepsilon\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}$ равномерно ограниченной? Убывает ли $P(x)$ при $x > x_{\max}$? Найдите асимптотику для $a(x, y, m, \varepsilon)$ для x , лежащих в окрестности точки $y/\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}$.

11. (М. Бланк–С. Шлосман) Остается ли ограниченным количество смен знака функции $a_1(x) := a_1(x, y, m, \varepsilon)$ на отрезке $[-y, y]$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ для фиксированных y, m ?

Оставшиеся две задачи опираются на понятия, не определенные в этом тексте.

12. Найти слабые пределы $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{1}{2\varepsilon} a\left(2\varepsilon\left\lceil \frac{x}{2\varepsilon} \right\rceil, 2\varepsilon\left\lceil \frac{y}{2\varepsilon} \right\rceil, m, \varepsilon\right)$ и $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{1}{4\varepsilon^2} P\left(2\varepsilon\left\lceil \frac{x}{2\varepsilon} \right\rceil, 2\varepsilon\left\lceil \frac{y}{2\varepsilon} \right\rceil, m, \varepsilon\right)$ как распределений на \mathbb{R}^2 . Равен ли первый предел $(1+1)$ -мерному запаздывающему пропагатору Дирака, включая обобщенную функцию на прямых $y = \pm x$? Каков физический смысл второго предела (он может придать смысл некорректно определенному квадрату пропагатора).

Последняя задача неформальна. Она стоит уже полвека.

13. (Р. Фейнман, загадка) Обобщите модель на 4 измерения так, чтобы

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} a\left(2\varepsilon\left\lceil \frac{x}{2\varepsilon} \right\rceil, 2\varepsilon\left\lceil \frac{y}{2\varepsilon} \right\rceil, 2\varepsilon\left\lceil \frac{z}{2\varepsilon} \right\rceil, 2\varepsilon\left\lceil \frac{t}{2\varepsilon} \right\rceil, m, \varepsilon\right)$$

совпал с $(3+1)$ -мерным запаздывающим пропагатором Дирака.

Публикации школьников и студентов. Задачи 7, 8, 9 решены в [3, 5, 2] соответственно. Асимптотика из задачи 10 при $m = \varepsilon = 1$ найдена в [7]. Задача 12 в случае $y > |x|$ решена в [4, Appendix B], а ее аналог для модели с однородным магнитным полем – в [6]. Вводные задачи приводятся в [1].

- [1] Е. Ахмедова, Р. Валиева, А. Воропаев, М. Скопенков, А. Устинов, Шашки Фейнмана. Введение в ‘алгоритмическую’ квантовую теорию поля, 31-я летняя конференция международного математического Турнира городов, 2019, <https://www.turgor.ru/1ktg/2019/2-Feynman%20checkerboard/index.htm>.
- [2] I. Bogdanov, Feynman checkers: the probability of direction reversal, preprint (2020) [arXiv:2010.04583](https://arxiv.org/abs/2010.04583).
- [3] M. Dmitriev, Semi-infinite Feynman Checkers, preprint (2021).
- [4] A. Lvov. Pointwise continuum limit. In: M. Skopenkov, A. Ustinov, Feynman checkers: towards algorithmic quantum theory, preprint (2020), [arXiv:2007.12879](https://arxiv.org/abs/2007.12879).
- [5] I. Novikov, Feynman checkers: the probability to find an electron vanishes nowhere inside the light cone, preprint (2020), [arXiv:2010.05088](https://arxiv.org/abs/2010.05088).
- [6] F. Ozhegov, The continuum limit of the ‘Feynman checkers’ model with electromagnetic field, preprint (2021).
- [7] P. Zakorko, Maxima of probability in Feynman Checkers, preprint (2021).

4. Открытые проблемы: одновременное протекание

В этих задачах известные вопросы о протекании жидкости обобщаются на несколько жидкостей. Предупредим, что наиболее яркие задачи из этого раздела были решены в 2019, а оставшиеся, по-видимому, требуют тяжелой техники.

Рассмотрим объединение M_n всех клеток шестиугольной решетки со стороной клетки $1/n$, расположенных внутри правильного шестиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ со стороной 1 и центром в клетке O .

Пусть каждая клетка окрашивается в один из 4 цветов (обозначаемых “0”, “1”, “2”, “3”) с равными вероятностями независимо друг от друга. Неформально, мы изучаем протекание трех жидкостей: цвета 1, 2, 3 означают, что клетка пропускает только жидкость 1, 2 или 3 соответственно, а цвет 0 — что все три жидкости сразу.

Пусть задана некоторая раскраска и число $k = 1, 2$ или 3 . Будем говорить, что жидкость k протекает между клетками x и y , если x и y можно соединить цепочкой клеток, соседних по стороне, в которой каждая клетка имеет цвет k или 0. Аналогично определяется протекание между двумя наборами x и y клеток решетки.

Пусть X_n, Y_n, Z_n — попарно-независимые события, например, протекания жидкостей 1, 2, 3 между центром O и границей многоугольника M_n (доказательство их независимости мы пропускаем). Назовем X_n, Y_n, Z_n положительно скоррелированными, если $P(X_n \cap Y_n \cap Z_n) > P(X_n)P(Y_n)P(Z_n)$, где $P(X_n \cap Y_n \cap Z_n)$ — вероятность одновременного наступления этих событий, а $P(X_n), P(Y_n), P(Z_n)$ — вероятности каждого из них.

1. Являются ли протекания жидкостей 1, 2, 3 между центром O и границей решетки положительно скоррелированными?

События X_n, Y_n, Z_n становятся независимыми с ростом n , если $\frac{P(X_n \cap Y_n \cap Z_n)}{P(X_n)P(Y_n)P(Z_n)} \rightarrow 1$.

2. Пусть событие X_n^k — протекание жидкости k между центром O и границей многоугольника M_n . Становятся ли X_n^1, X_n^2, X_n^3 независимыми с ростом n ?

Есть неформальный аргумент К. Изъюрова в пользу отрицательного ответа на этот вопрос [1, §5].

Протекание между сторонами x и y шестиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ — это протекание между наборами граничных клеток, для которых ближайшая сторона — это x и y соответственно (считаем, что нет граничных клеток, расстояния от которых до x и y одинаковы).

3. Являются ли положительно скоррелированными протекания жидкости k между противоположными сторонами A_kA_{k+1} и $A_{k+3}A_{k+4}$ для $k = 1, 2, 3$?

Пусть теперь вместо шестиугольника дан правильный треугольник $A_1A_2A_3$ со стороной 1 и центром в клетке O . Рассмотрим все клетки, из которых жидкость 1 протекает до стороны A_2A_3 . Они образуют несколько многоугольников, возможно, с несколькими “дырками”. Пусть событие X_n состоит в том, что O находится внутри одного из многоугольников (в том числе, возможно, внутри одной из “дырок”). Аналогично определим Y_n и Z_n . Предел вероятности одновременного наступления событий X_n, Y_n, Z_n при $n \rightarrow \infty$ (если существует) назовем вероятностью тройного окружения.

4. Решите аналоги предыдущих задач для тройного окружения вместо протекания.

5. Сформулируйте и решите аналоги предыдущих задач для 8 цветов вместо 4.

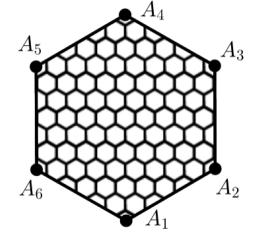
Публикации студентов. Аналог задачи 2 для протекания между противоположными сторонами был решен независимо К. Изъюровым и А. Магазиновым (частное сообщение) и записан И. Новиковым [1]. М. Федоров получил аналог центральной предельной теоремы для протекания n жидкостей (т.е. модели с 2^{n-1} цветами вместо 4) [2]. Мотивировка модели приводится в [3].

[1] I. Novikov, Percolation of three fluids on a honeycomb lattice, preprint (2019), in English and in Russian, <https://arxiv.org/abs/1912.01757>.

[2] М. Федоров, Некоторые особенности распределения вероятностей протекания нескольких жидкостей на шестиугольной решетке, препринт (2019), <https://arxiv.org/abs/1908.11783>.

Другие ссылки.

[3] M. Skopenkov, Lattice gauge theory and a random-medium Ising model, preprint (2019), <https://arxiv.org/abs/2012.02591>.



Направление II. Наглядная теория потенциала и замощения

Mikhail Skopenkov mikhail.skopenkov@gmail.com

Открытый Вопрос. Какие многоугольники можно сложить из подобных друг другу прямоугольников с данным отношением сторон x ?

5. Стартовые упражнения

— У меня есть мысль! — сказал удав, открывая глаза. — Мысль. И я её думаю.
— Какая мысль? — спросила мартышка.
— Так сразу не скажешь...

— Ух ты! — подпрыгнула мартышка. — Ох, какая хорошая мысль. А можно я её тоже немножко подумаю?
Г. Остер, “Бабушка удава”

1. Сложите квадрат из нескольких прямоугольников $t \times n$, где t и n — целые числа.
2. Дизайнеру заказали рамы для квадратного окна. На проектах (рисунки A,B) показано, как должны примыкать стекла друг к другу, и как они должны быть ориентированы (короткой или длинной стороной вверх). Можно ли сделать все стекла в каждой раме подобными прямоугольниками?
3. Можно ли разрезать квадрат на 3 подобных, но неравных прямоугольника?
4. Можно ли разрезать квадрат на 5 квадратов?
5. Все полки у шкафа на рисунке C, как и все лоскутки, из которых сшито одеяло на рисунке D — квадратные. Являются ли квадратными сами шкаф и одеяло?
6. Можно ли замостить всю плоскость попарно различными квадратами, длины сторон которых — целые числа?



A



B



C



D

7. Можно ли квадрат разрезать на прямоугольники с отношением сторон $2 + \sqrt{2}$?
8. Является ли $1 + \sqrt{2}$ суммой квадратов чисел вида $a + b\sqrt{2}$, где a и b — рациональны?

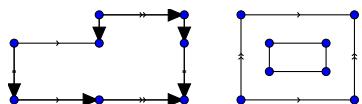
Пусть на прямоугольном листе бумаги нарисовано разбиение на прямоугольники. Разрешается разрезать лист вдоль любого отрезка на два прямоугольника, потом произвести такие операции по-отдельности с каждой из получившихся частей, и так далее. Если таким образом можно реализовать исходное разбиение, то назовем его *тривиальным*. Например, разбиения на рисунках A,B — тривиальные, а C,D — нет.

Следующие 4 упражнения предлагаются решить *только для тривиальных* разбиений.

9. Какие прямоугольники можно разрезать на прямоугольники со стороной 1?
10. Какие прямоугольники можно разрезать на квадраты?
11. Можно ли квадрат разрезать на прямоугольники с отношением сторон $\sqrt{2}$?
12. Все числа, которые можно представить в виде $x = a + b\sqrt{2}$ с рациональными a и b , назовем *хорошими*. При каких хороших x квадрат можно разрезать на прямоугольники с отношением сторон x ?

6. Открытые проблемы о замощениях с физической интерпретацией

1. Дан конверт в форме прямоугольника $a \times b$. При каких вещественных a и b его можно оклеить квадратными марками без просветов и наложений с обеих сторон? Квадраты разрешается перегибать через край прямоугольника, их размеры могут различаться.
2. Поверхности каких равногранных тетраэдров можно оклеить квадратами без просветов и наложений? А каких — правильными треугольниками?
3. Поверхности каких многогранников можно оклеить квадратами без просветов и наложений? А каких — правильными треугольниками?
4. Некоторые пары сторон многоугольника на рисунке (слева или справа) склеены. При каких длинах сторон полученную поверхность можно разрезать на квадраты?



5. Существует ли многоугольник, который можно разрезать на квадраты, но нельзя *тривиально* разрезать на квадраты (определение дано в §5, см. версию на сайте)?
6. Какие многоугольники разрезаются на прямоугольники с данным отношением сторон x ? А какие — на прямоугольники с данными отношениями сторон x_1, \dots, x_n ?
7. Какие многоугольники разрезаются на правильные треугольники?
8. Существует ли центрально-симметричный многоугольник, который можно разрезать на правильные треугольники, но нельзя разрезать на ромбы с углом 60° ?
9. Какие многоугольники можно разрезать на трапеции, гомотетичные данной?
10. Когда из параллелепипедов, подобных данному, можно составить куб?

Публикации студентов. Задача 1 для случая *равных* квадратов решена в [6], а для неравных в [2] получено необходимое условие. Задача 2 для *правильного* тетраэдра решена в [1]. Решение задачи 6 для *прямоугольника* и *хороших* x_1, \dots, x_n (определение — в §5) опубликовано в [11] и упрощено в [7]. Задачи 6 и 9 для частных случаев решены в [3, 5, 13]. Элементарное введение дано в [12, 10, 8], вводные задачи — в §5 и [9, 4].

- [1] Балакин А., Оклейивание тетраэдра квадратами // Математическое просвещение. Сер. 3. 2018. Вып. 23. С. 134–144.
- [2] Дмитриев М., Периодические замощения плоскости квадратами, 2020, предст. к публикации
- [3] Зверев И. С., Разрезания трапеций на трапеции, гомотетичные трапециям заданного набора, Матем. сб., 210:2 (2019), 87–114
- [4] Квадрат из подобных прямоугольников, 26-я летняя конференция международного математического Турина городов, 2014.
- [5] Новиков И., Разрезание на подобные прямоугольники многоугольников, составленных из равных прямоугольников, Мат. заметки, в печати.
- [6] Ожегов Ф., Оклейивание прямоугольника равными квадратами с обоих сторон, представлено к публикации, 2018.
- [7] Рябов П., Дополнение к результатам Ф. Шарова // Мат. просвещение. Сер. 3. 2018. Вып. 22 (весна). С. 165–170. [arXiv:1711.09406](https://arxiv.org/abs/1711.09406)
- [8] Скопенков М., Малиновская О., Дориченко С. Собери квадрат // Квант. 2015. N2. С. 6–11. [arXiv:1305.2598](https://arxiv.org/abs/1305.2598)
- [9] Скопенков М., Малиновская О., Дориченко С., Шаров Ф., Собери квадрат // Элементы математики в задачах. Через олимпиады и кружки — к профессии./Под ред. А.А.Заславского, А.Б.Скопенкова, М.Б.Скопенкова.— М.: МЦНМО, 2018.— 592 с.
- [10] Скопенков М., Прасолов М., Дориченко С. Разрезания металлического прямоугольника//Квант.2011.N3.C.10-16.
- [11] Шаров Ф.А., Разрезания прямоугольника на прямоугольники с заданными отношениями сторон // Математическое просвещение. Сер. 3. 2016. Вып. 20. С. 200–214. [arXiv:1604.00316](https://arxiv.org/abs/1604.00316)
- [12] Шаров Ф.А., Прямоугольник из квадратов, // Квант. 2019. N3. С. 10–14. [arXiv:1711.08503](https://arxiv.org/abs/1711.08503)
- [13] Широковских С., Преобразования двухпортовых цепей и разбиение на прямоугольники, препринт, 2021.

Направление III. Наглядная геометрия для архитектуры

Mikhail Skopenkov mikhail.skopenkov@gmail.com

Открытый Вопрос. На каких поверхностях через каждую точку проходят прямая и парабола с вертикальной осью, целиком лежащие на поверхности?

7. Стартовые упражнения

Пусть l_1 и l_2 — две прямые на плоскости, l — прямая, не параллельная ни одной из них. *Параллельным проектированием* прямой l_1 на прямую l_2 относительно направления l называют отображение, которое точке A прямой l_1 ставит в соответствие точку пересечения прямой l_A , параллельной l и проходящей через A , с прямой l_2 .

1. Любой ли параллельное проектирование прямой на прямую сохраняет длины отрезков?

Простым отношением упорядоченной тройки точек A, B, C на прямой ($B \neq C$) называется такое число x , что $\overrightarrow{AC} = x \cdot \overrightarrow{BC}$.

2. а) Простое отношение упорядоченной тройки точек на прямой равно x . Найдите простые отношения этих точек, записанных во всех других порядках.

б) Простое отношение упорядоченной тройки точек на прямой сохраняется при параллельном проектировании.

3. а) Композицией нескольких параллельных проектирований прямой можно перевести любые две различные точки в любые другие две различные точки.

б) Верно ли аналогичное утверждение для двух троек точек на прямой?

с) Дайте определение параллельного проектирования одной плоскости в пространстве на другую.

д) Композицией нескольких параллельных проектирований плоскости можно перевести любой треугольник в любой другой.

е) Верно ли аналогичное утверждение для двух четырехугольников?

4. а) Каждая сторона треугольника поделена на три равные части, и точки деления соединены с противоположными вершинами. Докажите, что диагонали “внутреннего” 6-угольника пересекаются в одной точке.

б) В каком отношении делит основания трапеции прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей и точку пересечения продолжений боковых сторон?

с) Даны две параллельные прямые и точки A, B на одной из них. Постройте одной линейкой середину отрезка AB .

5. Пусть непрерывная биекция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ середину любого отрезка переводит в середину его образа, а точки 0 и 1 оставляет на месте. Тогда для всех $x, y \in \mathbb{R}$ и $m, n \in \mathbb{Z}$,

а) $f(2x) = 2f(x)$; б) $f(x + y) = f(x) + f(y)$; в) $f(m/n) = m/n$; г) $f(x) = x$.

Задача Дня. Основная теорема аффинной геометрии (Мёбиус–фон Штайдт). Любое непрерывное взаимно-однозначное отображение плоскости, переводящее прямые в прямые, является композицией параллельных проектирований.

Direction I. Visual field theory

Mikhail Skopenkov mikhail.skopenkov@gmail.com

One of the main open problems in mathematics is rigorous definition of *quantum field theory*.

8. Leading exercises: Feynman checkers

Question: what is the probability to find an electron at the point (x, y) , if it was emitted from the point $(0, 0)$?

Assumptions: no self-interaction, no creation of electron-positron pairs, unit mass and lattice step, point source; no nuclear forces, no gravitation, electron moves uniformly along the y -axis and does not move along the z -axis.

Results: double-slit experiment, charge conservation.

On an infinite checkerboard, a checker moves to the diagonal-neighboring squares, either upwards-right or upwards-left. To each path s of the checker, assign a vector $\vec{a}(s)$ as follows. Start with a vector of length 1 directed upwards. While the checker moves straightly, the vector is not changed, but each time when the checker changes the direction, the vector is rotated through 90° clockwise (independently of the direction the checker turns). In addition, at the very end the vector is divided by $2^{(y-1)/2}$, where y is the total number of moves. The final position of the vector is what we denote by $\vec{a}(s)$. For instance, for the path s in Figure 5 to the top, the vector $\vec{a}(s) = (1/8, 0)$.

Denote $\vec{a}(x, y) := \sum_s \vec{a}(s)$, where the sum is over all the paths of the checker from the square $(0, 0)$ to the square (x, y) , starting with the upwards-right move. Set $\vec{a}(x, y) := \vec{0}$, if there are no such paths. For instance, $\vec{a}(1, 3) = (0, -1/2) + (1/2, 0) = (1/2, -1/2)$. The length square of the vector $\vec{a}(x, y)$ is called the *probability*¹ to find an electron in the square (x, y) , if it was emitted from the square $(0, 0)$. Notation: $P(x, y) := |\vec{a}(x, y)|^2$.

In Figure 7 to the left, the color of a point (x, y) with even $x + y$ depicts the value $P(x, y)$.

In what follows squares (x, y) with even and odd $x + y$ are called *black* and *white* respectively.

1. Observations for small y . Answer the following questions for each $y = 1, 2, 3, 4$ (and state your own questions and conjectures for arbitrary y): Find the vector $\vec{a}(x, y)$ and the probability $P(x, y)$ for each x . When $P(x, y) = 0$? What is $\sum_{x \in \mathbb{Z}} P(x, y)$ for fixed y ? What are the directions of $\vec{a}(1, y)$ and $\vec{a}(0, y)$?

The *probability*² to find an electron in the square (x, y) subject to absorption in the square (x', y') is defined analogously to $P(x, y)$, only the summation is over those paths s that do not pass through (x', y') . The probability is denoted by $P(x, y \text{ bypass } x', y')$. Define $P(x, y \text{ bypass } M)$ analogously for a set of squares M .

2. Double-slit experiment. Is it true that $P(x, y) = P(x, y \text{ bypass } 0, 2) + P(x, y \text{ bypass } 2, 2)$? Is it true that $P(x, y) \geq P(x, y \text{ bypass } x', y')$?

3. Find $P(0, 12)$. How to table the values $\vec{a}(x, y)$ quickly without exhaustion of all paths?

Denote by $a_1(x, y)$ and $a_2(x, y)$ the coordinates of $\vec{a}(x, y)$; see Figure 6.

4. (Puzzle) Draw all the paths giving nonzero contribution to $a_1(1, 5)$.

The same for $a_2(1, 5)$.

5. Dirac's equation. Express $a_1(x, y)$ and $a_2(x, y)$ through $a_1(x \pm 1, y - 1)$ and $a_2(x \pm 1, y - 1)$.

6. Probability/charge conservation. For each positive integer y we have $\sum_{x \in \mathbb{Z}} P(x, y) = 1$.

7. Symmetry. How the values $a_1(x, 100)$ for $x < 0$ and for $x \geq 0$ are related with each other (that is, how to express the ones for $x < 0$ through the ones for $x \geq 0$)? The same for the values $a_1(x, 100) + a_2(x, 100)$.

8. Huygens' principle. What is a fast way to find $\vec{a}(x, 199)$, if we know $\vec{a}(x, 100)$ for all integers x ?

9. Using a computer, plot the graphs of the functions $f_y(x) = P(x, y)$ for various y , joining each pair of points $(x, f_y(x))$ and $(x + 2, f_y(x + 2))$ by a segment; cf. Figure 2. The same for the function $a_1(x, y)$.

10. * Find an explicit formula for $\vec{a}(x, y)$ (it is allowed to use a sum with at most y summands in the answer).

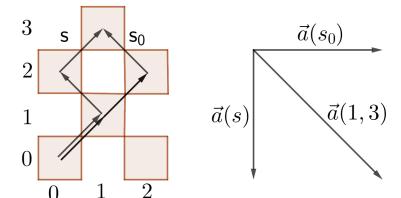
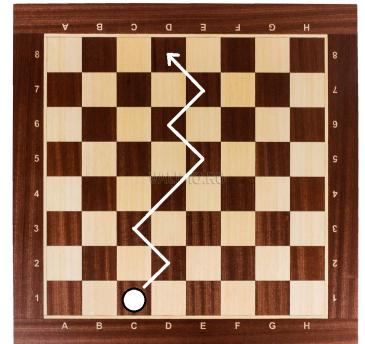


Fig 5: Checker paths

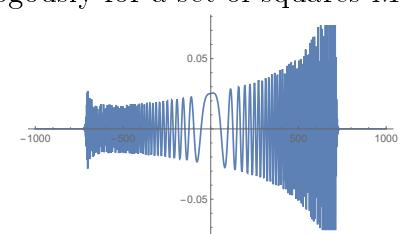


Fig 6: $a_2(x, 1000)$

¹One should think of the value y as fixed, and the squares $(-y, y), (-y+2, y), \dots, (y, y)$ as all the possible outcomes of an experiment. For instance, the y -th horizontal might be a photoplate detecting the electron. Familiarity with probability theory is *not* required for solving the presented problems. If the checker were performing just a random walk (after the first upwards-right move), then $|\vec{a}(s)|^2$ would be probability of a path s . The latter probability *no* sense in our model, but explains the normalization factor $2^{(y-1)/2}$.

²Thus an additional outcome of the experiment is that the electron has been absorbed and has not reached the photoplate.

Open problems in mathematical physics

Mikhail Skopenkov mikhail.skopenkov@gmail.com

This is a collection of visual open problems in mathematical physics¹. The statements of most of them use only a few definitions given in the text. But their solution leads to important ideas of modern mathematics.

9. Open problems: Feynman checkers

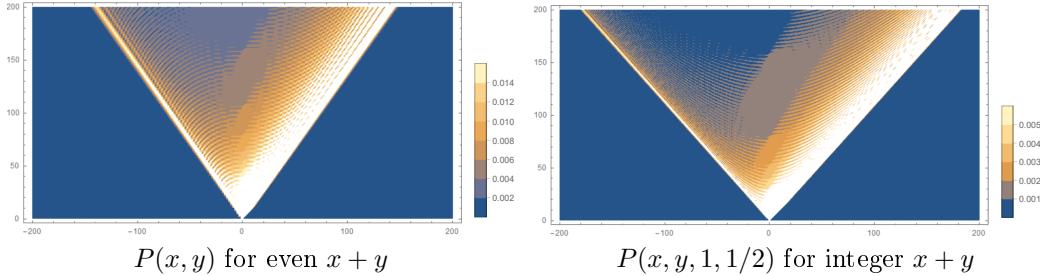


Fig 7: The probability to find an electron in a small square around a given point (white depicts large oscillations of the probability). Left: in the basic model from §8. Right: in the generalized model from §10.

The plots in Figures 7 and 8 to the left show that for fixed y , the most probable position of the electron is near to $x = y/\sqrt{2}$ (!). Although this was noticed in 2001, the following question is still open.

1. (A.Daniyarkhodzhaev–F.Kuyanov; see Figures 7 and 8 to the left) Denote by $x_{\max}(y)$ a point where $P(x,y)$ has a maximum for fixed y . Is $x_{\max}(y) - y/\sqrt{2}$ bounded as $y \rightarrow \infty$?
2. (S. Nечаev, puzzle; see Figure 8 to the bottom-left) Find the positions of “wide gaps” (intervals, where oscillations are smaller) in the graph of $P(x,y)$ for fixed large y .

For $x > y/\sqrt{2}$, the plots show that the value $a(x,y)$ is small. But how fast does it actually decrease?

3. (A. Borodin) Find an asymptotic formula for $a(2\lceil \frac{vy}{2} \rceil, y)$ as $y \rightarrow \infty$ for fixed $v > 1/\sqrt{2}$.

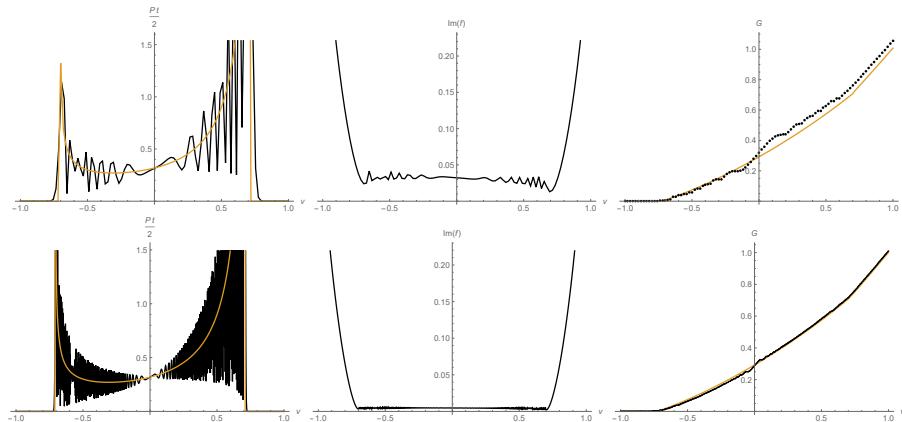


Fig 8: The plots of the normalized probability $\frac{y}{2}P(2\lceil \frac{vy}{2} \rceil, y)$, the free energy density $\text{Im } f_y(v) := -\frac{4}{\pi y} \log |a(2\lceil \frac{vy}{2} \rceil, y)|$, the distribution $G_y(v) := \sum_{x \leq vy} \frac{2}{y} \left| \frac{a_2(x,y)}{a(x,y)} \right|^2$ (dark) for $y = 100$ (top), $y = 1000$ (bottom).

The aim of the next 3 problems is to prove a *phase transition* in Feynman checkers in a strong sense: the limiting free energy density and other quantities are nonanalytic at $v = \pm 1/\sqrt{2}$ (see Figure 4 to the middle).

4. For each $v \in [-1, 1]$ find $\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{y} \log |a(2\lceil \frac{vy}{2} \rceil, y)|$. Prove that it has discontinuous derivative at $v = \pm 1/\sqrt{2}$.

The next problem is on the “probability” of equal directions of the first and the last move.

5. (See Figure 4 to the right) Prove that for each $0 < v < 1/\sqrt{2}$ we have

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \sum_{0 \leq x \leq vy} \frac{2}{y} \left| \frac{a_2(x,y)}{a(x,y)} \right|^2 = \frac{1}{2} \left(1 + v - \sqrt{1 - v^2} + \log \frac{1 + \sqrt{1 - v^2}}{2} \right).$$

Compute the same limit for $1/\sqrt{2} < v < 1$.

¹The author of a problem is shown after the number of the problem. Some of the conjectures have been suggested by participants of Summer Conference of Tournament of Towns and Summer School in Contemporary Mathematics. A *puzzle* is a problem, in which both a precise statement and a proof are requested.

The next one is on the “probability” of equal directions of the first, the last, and the “middle” move.

6. Find the weak limit $\lim_{y \rightarrow \infty} \left| \sum_{x \in \mathbb{Z}} \frac{a_2(x, y)^2}{a_2(2\lceil vy \rceil - 1, 2y - 1)} \right|^2$.

For a set M of squares let $P(M) := \sum_{p \in M} P(p)$ be the *probability that the electron hits M* .

7. (G. Minaev–I. Russkikh) Do the following equations hold (cf. §14):

$$P(\{(-1, y) : y \geq 3 \text{ odd}\}) = \frac{1}{2}P(\{(3, y) : y \geq 3 \text{ odd}\}) = \frac{4}{\pi} - 1?$$

Notice that similar numbers appear as conductances between nodes of the grid \mathbb{Z}^2 ; see §14.

10. Open problems: generalizations of Feynman checkers

In the next problems, the following generalization of the model is used. Fix $\varepsilon, m > 0$ called *side of the square* and *particle mass*. Assume that the centers of the squares have the coordinates $(k\varepsilon, l\varepsilon)$, where k and l are integers. To each path s of the checker, assign a vector $\vec{a}(s, m\varepsilon)$ as follows. Start with the vector $(0, 1)$. While the checker moves straightly, the vector is not changed, but each time when the checker changes the direction, the vector is rotated through 90° clockwise and multiplied by $m\varepsilon$. In addition, at the very end the vector is divided by $(1 + m^2\varepsilon^2)^{(y/\varepsilon-1)/2}$, where y/ε is the total number of moves. The final position of the vector is what we denote by $\vec{a}(s, m\varepsilon)$. The vectors $\vec{a}(x, y, m, \varepsilon)$ and the numbers $P(x, y, m, \varepsilon)$ are defined analogously to $\vec{a}(x, y)$ and $P(x, y)$, only $\vec{a}(s)$ is replaced by $\vec{a}(s, m\varepsilon)$. For instance, $P(x, y, 1, 1) = P(x, y)$. In Figure 7 to the right, the color of a point (x, y) depicts the value $P(x, y, 1, 1/2)$.

8. Is it true that $P(x, y, m, \varepsilon) \neq 0$ for $y > |x|$ and even $(x + y)/\varepsilon$?

9. (I.Gaidai-Turlov–T.Kovalev–A.Lvov) Is it true that $\lim_{y \rightarrow +\infty} \sum_{x \in \mathbb{Z}} a_1(x\varepsilon, y\varepsilon, m, \varepsilon)^2 = \frac{m\varepsilon}{2\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}}$?

The following problem generalizes and specifies Problem 1 above.

10. (A.Daniyarkhodzhaev–F.Kuyanov) Denote by $x_{\max} = x_{\max}(y, m, \varepsilon)$ the point where $P(x) := P(x, y, m, \varepsilon)$ has a maximum. Is $x_{\max}/\varepsilon - y/\varepsilon\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}$ uniformly bounded? Does $P(x)$ decrease for $x > x_{\max}$? Find an asymptotic formula for $a(x, y, m, \varepsilon)$ for x in a neighborhood of $y/\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}$.

11. (M. Blank–S. Shlosman) Is the number of times the function $a_1(x) := a_1(x, y, m, \varepsilon)$ changes the sign on $[-y, y]$ bounded as $\varepsilon \rightarrow 0$ for fixed y, m ?

The remaining two problems involve several notions not defined in this text.

12. Find the weak limits $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} a(2\varepsilon \lceil \frac{x}{2\varepsilon} \rceil, 2\varepsilon \lceil \frac{y}{2\varepsilon} \rceil, m, \varepsilon)$ and $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{4\varepsilon^2} P(2\varepsilon \lceil \frac{x}{2\varepsilon} \rceil, 2\varepsilon \lceil \frac{y}{2\varepsilon} \rceil, m, \varepsilon)$ on the whole \mathbb{R}^2 . Is the former limit equal to the $(1+1)$ -dimensional retarded Dirac propagator including the generalized function supported on the lines $y = \pm x$? What is the physical interpretation of the latter limit (providing a value to the ill-defined square of the propagator)?

The last problem is informal; it stands for half a century.

13. (R. Feynman; puzzle) Generalize the model to 4 dimensions so that

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} a\left(2\varepsilon \lceil \frac{x}{2\varepsilon} \rceil, 2\varepsilon \lceil \frac{y}{2\varepsilon} \rceil, 2\varepsilon \lceil \frac{z}{2\varepsilon} \rceil, 2\varepsilon \lceil \frac{t}{2\varepsilon} \rceil, m, \varepsilon\right)$$

coincides with the $(3+1)$ -dimensional retarded Dirac propagator.

Publications of pupils and students. Problems 7, 8, 9 are solved in [3, 5, 2] respectively. The asymptotic form from Problem 10 for $m = \varepsilon = 1$ is found in [7]. Problem 12 in the particular case $y > |x|$ is solved in [4, Appendix B], and its analogue for the model with homogeneous magnetic field is solved in [6]. Introductory problems are given in [1].

- [1] E.Akhmedova, M.Skopenkov, A.Ustinov, R.Valieva, A.Voropaev, Feynman checkerboard, 31th Summer conference of the International mathematical Tournament of towns, 2019, <https://www.turgor.ru/lktg/2019/2-Feynman%20checkerboard/index.htm>.
- [2] I. Bogdanov, Feynman checkers: the probability of direction reversal, preprint (2020) [arXiv:2010.04583](https://arxiv.org/abs/2010.04583).
- [3] M. Dmitriev, Semi-infinite Feynman Checkers, preprint (2021).
- [4] A. Lvov. Pointwise continuum limit. In: M. Skopenkov, A. Ustinov, Feynman checkers: towards algorithmic quantum theory, preprint (2020), [arXiv:2007.12879](https://arxiv.org/abs/2007.12879).
- [5] I. Novikov, Feynman checkers: the probability to find an electron vanishes nowhere inside the light cone, preprint (2020), [arXiv:2010.05088](https://arxiv.org/abs/2010.05088).
- [6] F. Ozhegov, The continuum limit of the “Feynman checkers” model with electromagnetic field, preprint (2021).
- [7] P. Zakorko, Maxima of probability in Feynman Checkers, preprint (2021).

Direction II. Visual potential theory and tilings

Mikhail Skopenkov mikhail.skopenkov@gmail.com

Open question. Which polygons can be tiled by rectangles of given side ratio x ?

11. Leading excercises

— I have a thought! — said Boa and opened his eyes. — A thought. And I think it.
— Which thought? — asked Monkey.
— It takes time to explain...
— Wow! — jumped Monkey. — What a good thought! May I also think it a bit?

G. Oster, “Boa’s grandmother”

1. Form a square from rectangles $m \times n$, where m and n are integers.
2. A designer was offered to make square window frames. In Figures A,B it is shown how the panes should be adjacent to each other and how they should be oriented (with the short side or with the long one to the top). Can all panes in each frame be similar rectangles?
3. Is it possible to dissect a square into 3 similar, but not equal rectangles?
4. Is it possible to dissect a square into 5 squares?
5. All shelves in Figure C, and all scraps, from which consists the piecework in Figure D, are squares. Are the board and the piecework also squares?
6. Is it possible to tile the plane by pairwise distinct squares with integer sides?



A



B



C



D

7. Is it possible to dissect a square into rectangles of side ratio $2 + \sqrt{2}$?
8. Is $1 + \sqrt{2}$ a sum of squares of numbers of the form $a + b\sqrt{2}$, where a and b are rational?

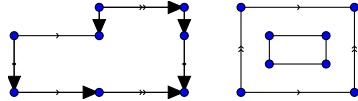
A tiling by rectangles is drawn on a rectangular sheet of paper. One may cut the sheet of paper along any straight line segment into two rectangles, then repeat the same operation separately for each of the obtained parts, and so forth. If it is possible to represent the initial tiling in this way, then the tiling is called *trivial*. For instance, the tilings shown in Figure A,B are trivial, but those in Figure C,D are not.

It is suggested that you solve the following 4 exercises only for trivial tilings.

9. Which rectangles can be tiled by rectangles with one of the sides equal to 1?
10. Which rectangles can be dissected into squares?
11. Is it possible to dissect a square into rectangles of side ratio $\sqrt{2}$?
12. All numbers, which can be represented in the form $x = a + b\sqrt{2}$ with rational a and b , are called *good*. For which good x a square may be tiled by rectangles of side ratio x ?

12. Open tiling problems with networks interpretation

1. An envelope has the shape of a rectangle $a \times b$. For which real a and b it can be completely covered by nonoverlapping square marks from both sides? It is allowed to fold the squares across the edges of the envelope, and the sizes of the squares may be different.
2. Which tetrahedra having four equal faces and made of paper can be dissected into squares? And into regular triangles?
3. Which polytopes made of paper can be dissected into squares? And into regular triangles?
4. Some pairs of sides of the polygon in the figure (to the left or to the right) are glued. For which side lengths the resulting surface can be tiled by squares?



5. Is there a polygon which can be tiled by squares but cannot be trivially tiled by squares (see the definition in §11)?
6. Which polygons can be tiled by rectangles of given side ratio x ? And by rectangles of given side ratios x_1, \dots, x_n ?
7. Which polygons can be tiled by regular triangles? And by rhombi with a 60° angle?
8. Is there a centrally-symmetric polygon which can be tiled by regular triangles but cannot be tiled by rhombi with a 60° angle?
9. Which polygons can be tiled by trapezoids homothetic to a given one?
10. When a cube can be tiled by parallelipipeds similar to a given one?

Publications of students. Problem 1 for *equal* squares is solved in [5]; a necessary condition for unequal ones is presented in [3]. Problem 2 for a *regular* tetrahedron is solved in [2]. A solution of Problem 6 for tilings of a *rectangle* and *good* x_1, \dots, x_n (see the definition in §11) is published in [7] and later simplified in [6]. Problems 6 and 9 are solved [13, 4, 9] in some particular cases. Elementary introduction to the methodology is given in [8, 12, 10], introductory problems are in [11, 1].

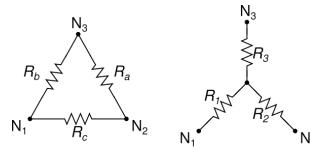
- [1] A square from similar rectangles, 26th summer conference of International mathematical Tournament of towns, 2014 (in English and in Russian), <http://www.turgor.ru/lktg/2014/3/index.htm>
- [2] A. Balakin, Covering a tetrahedron by squares, Mat. Prosveschenie 3rd ser. **23** (2018), 134–144 (in Russian).
- [3] M. Dmitriev, Periodic tillings of the plane by squares, 2020, submitted (in Russian). [arXiv:2003.05430](https://arxiv.org/abs/2003.05430).
- [4] I. Novikov, Tiling polygons composed of equal rectangles into similar rectangles, Math. Notes, to appear (in English and in Russian). [arXiv:1809.06627](https://arxiv.org/abs/1809.06627) (in Russian)
- [5] F. Ozhegov, Covering of a rectangle by equal squares from both sides, submitted, 2018 (in Russian).
- [6] P. Ryabov, A complement to the results by F. Sharov, Mat. Prosveschenie 3rd ser. **22** (Spring) (2018), 165–170. [arXiv:1711.09406](https://arxiv.org/abs/1711.09406)
- [7] F. Sharov, Dissection of a rectangle into rectangles with given side ratios, Mat. Prosveschenie 3rd ser. **20** (2016), 200–214 (in English and in Russian). [arXiv:1604.00316](https://arxiv.org/abs/1604.00316) (in English and in Russian).
- [8] F. Sharov, A rectangle from squares, Kvant **3** (2019), 10–14 (in Russian). [arXiv:1711.08503](https://arxiv.org/abs/1711.08503)
- [9] S. Shirokovskikh, Transformations of 2-port networks and tiling by rectangles, preprint, 2021.
- [10] M. Skopenkov, O. Malinovskaya, S. Dorichenko, Compose a square, Kvant **2** (2015), 6–11 (in Russian). [arXiv:1305.2598](https://arxiv.org/abs/1305.2598)
- [11] M. Skopenkov, O. Malinovskaya, S. Dorichenko, F. Sharov, Compose a square, // *Elements of mathematics in problems. Through olympiads and circles to profession.* / Edited by A. Skopenkov, M. Skopenkov, A. Zaslavsky. — Moscow Center for Continuous Mathematical Education, Moscow, 2018. — 592 pp. (in Russian). [arXiv:1905.10210](https://arxiv.org/abs/1905.10210)
- [12] M. Skopenkov, M. Prasolov, S. Dorichenko, Dissections of a metal rectangle, Kvant **3** (2011), 10–16 (in Russian). [arXiv:1011.3180](https://arxiv.org/abs/1011.3180)
- [13] I.S. Zverev, Dissections of trapezoids into trapezoids homothetical to trapezoids in a given family, Sb. Math., 210:2 (2019), 245–271 (in English and in Russian). [arXiv:1709.02773](https://arxiv.org/abs/1709.02773) (in Russian)

13. Inverse problem for alternating-current networks

²An *alternating-current* network is a (not necessarily planar) graph with a fixed subset of vertices (*boundary vertices*) and a complex number $c(xy)$ with positive real part (*conductance*) assigned to each edge xy [2, Section 2.4]. The *voltage* is any complex-valued function $v(x)$ on the set of vertices such that for each nonboundary vertex y we have $\sum_{xy} c(xy)(v(x) - v(y)) = 0$, where the sum is over all the edges containing the vertex y . One can see that the voltage is uniquely determined by its boundary values [2, Section 5.1]. The *current flowing into the network* through a boundary vertex y is $i(y) := \sum_{xy} c(xy)(v(x) - v(y))$. The network *response* is the matrix of the linear map taking the vector of voltages at the boundary vertices to the vector of currents flowing into the network through the boundary vertices.

The general *electrical-impedance tomography* problem is to reconstruct the network from its response. For direct-current planar networks, meaning that all the conductances are positive, the problem has been solved in [1].

Teaser. There is a matrix realizable as the response of the network in the figure to the right (for the boundary vertices N_1, N_2, N_3 and some edge conductances R_1, R_2, R_3) but not to the left.



Denote by Ψ_b the set of complex $b \times b$ matrices Λ having the following 4 properties:

- (1) Λ is symmetric;
- (2) the sum of the entries of Λ in each row is zero;
- (3) $\text{Re}\Lambda$ is non-negatively definite;
- (4) if $U = (U_1, \dots, U_b) \in \mathbb{R}^b$ and $U^T(\text{Re}\Lambda)U = 0$ then $U_1 = \dots = U_b$.

11. Prove that the set of responses of all the possible connected alternating-current networks with b boundary vertices is the set Ψ_b .

The problem has been recently solved by G. Rote [3].

12. Given a response matrix provide an algorithm to reconstruct the network and the edge conductances.

13. Describe the set of all the responses of all the possible *series-parallel* networks with edge conductances having positive real parts.

14. Describe the set of all the responses of all the possible *planar* networks with edge conductances having positive real parts.

15. Let the conductance of each edge be either ω or $1/\omega$, where ω is a variable. Describe the set of all the possible responses of such networks as functions in ω .

This is known for $b = 2$ boundary vertices — Foster's reactance theorem [2, Theorem 2.5].

- [1] E. B. Curtis and J. A. Morrow, Inverse problems for electrical networks, Series on Appl. Math. **13**, World Scientific, Singapore, 2000.
- [2] M. Prasolov and M. Skopenkov, Tilings by rectangles and alternating current, *J. Combin. Theory A* **118:3** (2011), 920–937, <http://arxiv.org/abs/1002.1356>.
- [3] G. Rote, Characterization of the response maps of alternating-current networks, preprint (2019), [arXiv:1904.02031](https://arxiv.org/abs/1904.02031).

¹Published in Discrete differential geometry, Oberwolfach Reports, 2015

14. Asymptotic estimates for conductance

The *Green function* $R(x, y)$ is the resistance between the origin and the vertex (x, y) in a infinite square lattice of unit resistors.

Teaser. $R(0, 1) = 1/2$, $R(1, 1) = 2/\pi$, and $R(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln(x^2 + y^2) + O(1)$.

The same asymptotic form holds for triangular and hexagonal lattices.

16. Prove the same for arbitrary *nondegenerate uniform orthogonal* lattice.

17. Discrete harmonic functions on orthogonal lattices are Lipschitz, i.e., $|u(z) - u(w)| = O(|z - w|)$.

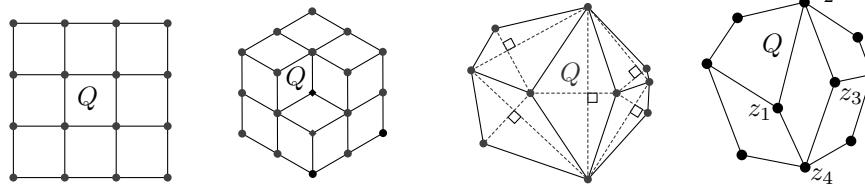
18. Generalize *star-triangle transformation* to nonrhombic lattices.

A *quadrilateral lattice* is a finite graph $Q \subset \mathbb{C}$ with rectilinear edges such that each bounded face is a quadrilateral. A complex-valued function f on the vertices of Q is called *discrete analytic*, if for each quadrilateral face $z_1 z_2 z_3 z_4$ we have

$$\frac{f(z_1) - f(z_3)}{z_1 - z_3} = \frac{f(z_2) - f(z_4)}{z_2 - z_4}.$$

The real part of a discrete analytic function is called a *discrete harmonic function*. The *discrete Dirichlet problem* is to find a discrete harmonic function with given values at the boundary. A function u is *equicontinuous*, if $|u(z) - u(w)| = O(\phi(|z - w|))$ for some function $\phi(x)$ such that $\lim_{x \rightarrow 0} \phi(x) = 0$.

Teaser. The function $f(z) = z$ is discrete analytic but $f(z) = z^2$ is not unless the faces of Q are parallelogramms.



19. Is it true that discrete harmonic functions are equicontinuous?

20. Is it true that the solution of the Dirichlet problem converges to its continuous counterpart under lattice refinement?

Publications of students. An elementary introduction to the subject was published jointly with A. Pakharev, V. Smykalov, A. Ustinov, A. Yuryev [2, 3, 1].

- [1] A. Pakharev, M. Skopenkov, A. Ustinov, Through the resisting net, Mat. Prosv. 3rd ser. 18 (2014), 33-65.
- [2] M. Skopenkov, V. Smykalov, A. Ustinov, Random walks and electric networks, Mat. Prosv. 3rd ser. 16 (2012), 25-47 (in Russian). Minor correction in: A. Yuryev, Random walks return, Mat. Prosv. 3rd ser. 20 (2016), 243-246.
- [3] A. Yuryev, Random walks return, Mat. Prosv. 3rd ser. 20 (2016), 243-246.

Open problems in geometry and potential theory

Direction III. Visual geometry for architecture

Mikhail Skopenkov mikhail.skopenkov@gmail.com

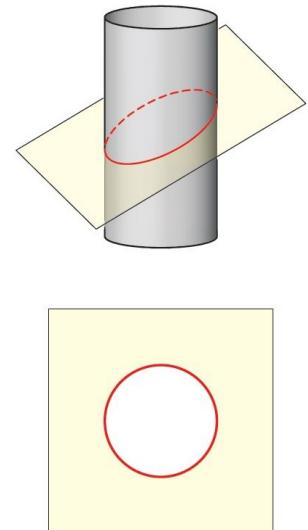
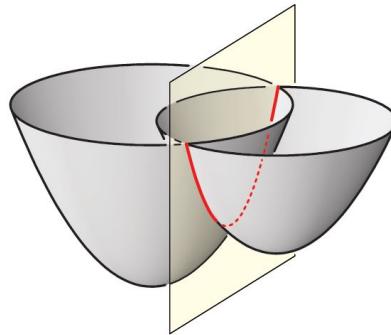
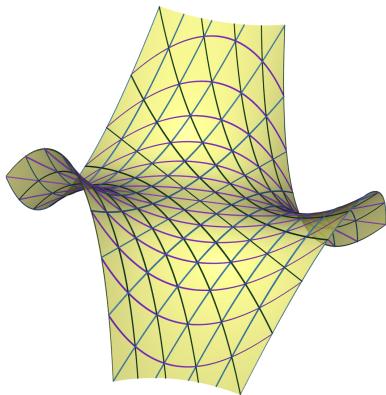
This is a collection of visual open problems in geometry. The statements of most problems are elementary and use only a few definitions given in the text. But their solution leads to important ideas of modern mathematics. Each individual problem with a number is a topic for a one-year term work. The problems are suitable at any education term.

15. Surfaces containing two parabolas through each point

1. Find all functions $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ with the following property: through each point of the plane one can draw two lines such that the restriction of the function f to one of the lines is a linear function, and the restriction to the other one is quadratic.

Example. The surfaces given by the equations

$z = xy(x + y)$ (left figure) or $z = x^2 + y^2$ (middle figure)



2. Find all surfaces in \mathbb{R}^3 containing two parabolas through each point such that both parabolas lie on one rotational paraboloid with a vertical axis.

An *isotropic circle* is either a parabola with the axis parallel to Oz (middle figure) or an ellipse whose projection into the plane Oxy is a circle (right figure).

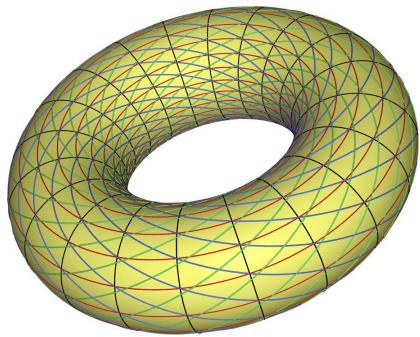
3. Find all surfaces in \mathbb{R}^3 containing a line and an isotropic circle through each point.
4. Find all surfaces in \mathbb{R}^3 containing two isotropic circles through each point.
5. Which sets of circles can be the top view of the isotropic circles on such surfaces?
6. Find all surfaces in \mathbb{R}^3 containing 3 isotropic circles through each point. Find all hexagonal webs from isotropic circles on surfaces (except isotropic spheres).
7. Find all surfaces in \mathbb{R}^3 enveloped by two families of cones of revolution.

Hint. Use isotropic model of Laguerre geometry [9, §2].

8. Find a system of differential equations characterizing functions with the graphs containing an isotropic circle through a generic point. The same for a conic through a generic point.

16. Surfaces containing two circles through each point

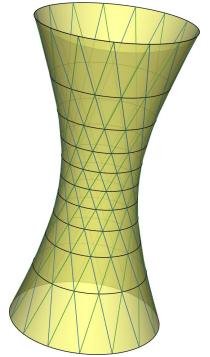
Torus



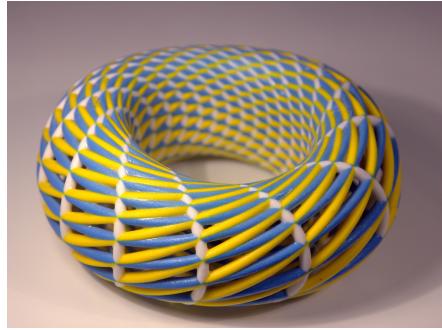
Cyclide (a degree 4 surface)

Translation of a circle along another one

Hyperboloid



Clifford translational surface (a degree 8 surface)



9. Let r and R be fixed. Find all surfaces in \mathbb{R}^3 such that through each point of the surface one can draw two circles of radii r and R fully contained in the surface.

10. Let α be fixed. Find all surfaces in \mathbb{R}^3 such that through each point of the surface one can draw two circles fully contained in the surface and intersecting at angle α .

11. Let α be fixed. Find all surfaces in \mathbb{R}^3 such that through each point of the surface one can draw two circles fully contained in the surface, the planes of which intersect at angle α .

Hint. Deduce from the classification of surfaces containing 2 circles through each point [10].

The surface $\Phi(u, v) = (u + i)(v + j)^{-1}$ in \mathbb{R}^4 , where i and j are quaternion units, contains a line and a circle through each point but it not a quadric, cf. [2].

12. Find all surfaces in \mathbb{R}^4 containing a line and a circle through each point.

13. Find all surfaces in \mathbb{R}^5 containing a line and a circle through each point.

14. Consider the surface in $\mathbb{R}^4 = \mathbb{H}$ parametrized as

$$\Phi(s, t) = (a_0st + a_1s + a_2t + a_3)(b_0st + b_1s + b_2t + b_3)^{-1},$$

where $a_i, b_i \in \mathbb{H}$ are fixed, and $s, t \in \mathbb{R}$ are variables. How many circles can the surface contain through each point?

Hint. The surface contains at least 2 circles through each point. Consider the stereographic preimage of the surface.

- what degree does it have (cf. [5])?
- is it always the intersection of the unit sphere in \mathbb{R}^5 with two other quadrics?
- what is the configuration of the planes of the circles on it (cf. [7])?

15. Does each surface in \mathbb{R}^4 containing 3 circles through each point belong to this class of surfaces (cf. [6])?

Publications of students. F. Nilov has discovered several new hexagonal webs from circles in the plane [3]. F. Nilov and the author solved the analogue of Problem 13 in \mathbb{R}^3 [2]. E. Morozov solved Problems 4–5 under technical restrictions [1].

- [1] E. Morozov, Surfaces containing two isotropic circles through each point, Computer Aided Geom. Design 90 (2021), 102035. [arXiv:2002.01355](https://arxiv.org/abs/2002.01355).
- [2] F. Nilov, M. Skopenkov, [A surface containing a line and a circle through each point is a quadric](#), Geom. Dedicata 163:1 (2013), 301–310.
- [3] F. Nilov, On new constructions in the Blaschke–Bol problem, Sb Math+ 205:11 (2014), 1650–1667, arXiv:1309.5029.

More references.

- [4] Dietz, R., Hoschek, J., Jüttler, B., An algebraic approach to curves and surfaces on the sphere and on other quadrics, Comp. Aided Geom. Design, 10:3(1993), 211–229.
- [5] R. Krasauskas, S. Zube, Bezier-like parametrizations of spheres and cyclides using geometric algebra. In: K. Guerlebeck (Ed.), Proceedings of 9th International Conference on Clifford Algebras and their Applications in Mathematical Physics, Weimar, Germany, 2011.
- [6] N. Lubbes, [Families of circles on surfaces](#), arXiv:1302.6710, preprint.
- [7] H. Pottmann, L. Shi, M. Skopenkov, [Darboux cyclides and webs from circles](#), Comput. Aided Geom. D. 29:1 (2012), 77–97.
- [8] J. Schicho, The multiple conical surfaces, Contrib. Algeb. Geom. 42:1 (2001), 71–87.
- [9] M. Skopenkov, H. Pottmann, Ph. Grohs, [Ruled Laguerre minimal surfaces](#), Math. Z. 272 (2012), 645–674.
- [10] M. Skopenkov, R. Krasauskas, Surfaces containing two circles through each point, Math. Ann. 373 (2019) 1299–1327. [Fulltext](#).