

Шашки Фейнмана

Элементарная математическая модель в квантовой теории

Е. Ахмедова, Р. Валиева, А. Воропаев, М. Скопенков, А. Устинов

Резюме. Курс будет посвящен изучению наиболее элементарной модели движения электрона, предложенной Р.Фейнманом. Это игра, в которой по простым правилам по клетчатой доске движется шашка, а мы следим за ее поворотами. Оказывается, что такая простая комбинаторная модель наглядно иллюстрирует многие базовые идеи квантовой теории. Мы будем решать задачи по математике и обсуждать их физический смысл; предварительных знаний по физике не требуется.

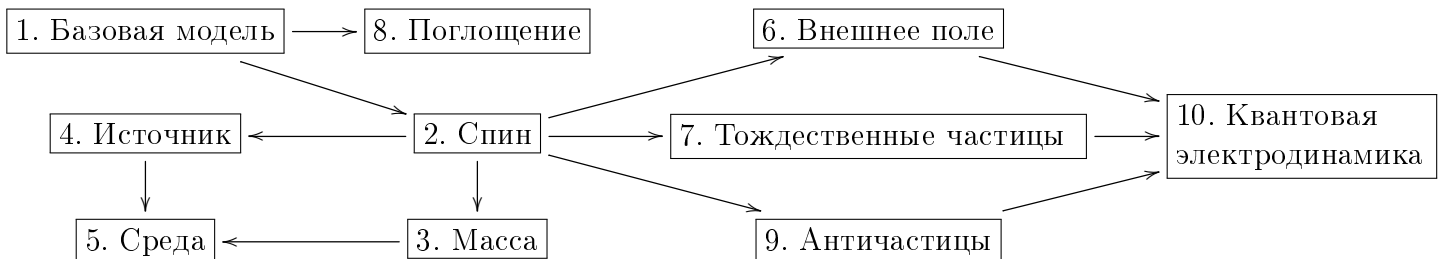
Основные результаты.

- явная формула для доли света данного цвета, отражаемого стеклянной пластиной данной ширины (задача 26);
- явная формула для вероятности обнаружить в заданном квадрате электрон, испущенный из начала координат и движущийся в заданной плоскости (задача 15; см. рис. 1).

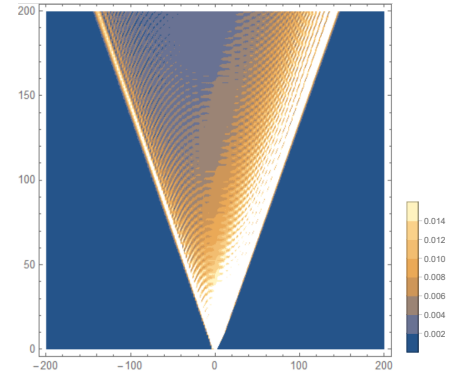
Хотя эти результаты сформулированы в терминах физики, они являются математическими теоремами, так как далее приводятся математические модели интересующих нас явлений, со строгими определениями. Точнее, последовательность моделей, описывающих явления со всё большей точностью.

План. Мы начнём с базовой модели и будем уточнять её в каждом последующем разделе. Перед каждым уточнением мы укажем, для ответа на какой физический *вопрос* оно нужно, какие упрощающие *предположения* в нём используются и какие экспериментальные *результаты* оно позволяет объяснить. Наша цель — получить так называемую *двумерную квантовую электродинамику*, однако финальные шаги в этом направлении (намеченные в разделах 9–10) пока не сделаны. (Её 4-мерный аналог, с серьезными оговорками, описывает все на свете явления, кроме атомного ядра и гравитации; но его мы не рассматриваем.)

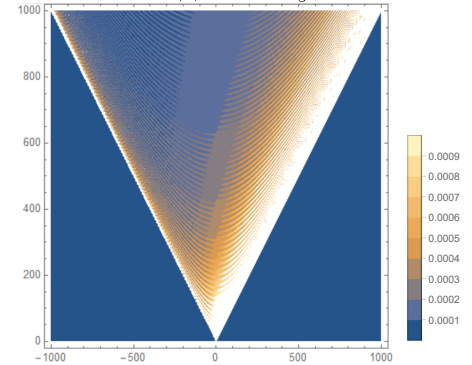
Схема уточнений может помочь вам в выборе порядка решения задач:



Соглашения. Если в условии задачи сформулировано утверждение, то его надо доказать. *Загадка* — это задача, в которой требуется и сформулировать утверждение, и доказать его. Трудные задачи отмечены звёздочками; за решение одной из них вы получите *первый разряд* по шашкам Фейнмана, а за решение трёх из трёх разных разделов — станете *мастером*. Если не получается решить задачу, попробуйте следующие: в них могут быть подсказки. Даже если вы не докажете основные результаты, вы многому научитесь. Приветствуются попытки сформулировать и доказать свои собственные гипотезы; вы получите ранг *гроссмейстера* за нетривиальное открытие (а может быть, даже напишете собственную научную статью).



Базовая модель из §1



Модель с массой из §3

Рис. 1: Вероятность обнаружить электрон в малом квадрате вокруг данной точки (белым показаны сильные колебания этой вероятности)

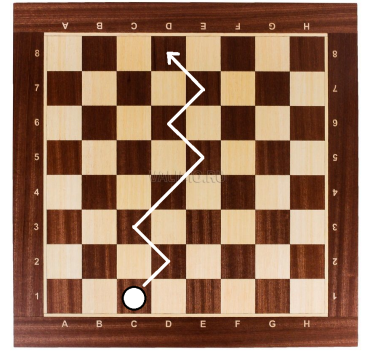
1 Базовая модель

Вопрос: какова вероятность обнаружить электрон в клетке (x, y) , если он был испущен из клетки $(0, 0)$?

Предположения: электрон равномерно движется по оси y и не движется по оси z , точечный источник, фиксированная масса и шаг решётки, нет взаимодействия, нет рождения электрон-позитронных пар.

Результаты: эксперимент на двух щелях, сохранение заряда.

На бесконечной шахматной доске шашка ходит на соседнюю по диагонали клетку, влево-вверх или вправо-вверх. Каждому пути s шашки сопоставим вектор $\vec{a}(s)$ на плоскости следующим образом. В начале движения этот вектор направлен вверх и имеет длину 1. Пока шашка движется вдоль прямой, вектор не меняется, а после каждого поворота шашки он поворачивается на 90° по часовой стрелке (независимо от того, в какую сторону повернула шашка). В конце движения вектор сжимается $2^{(y-1)/2}$ раз, где y — общее число ходов шашки (т.е. заменяется на вектор такого же направления, но длины $1/2^{(y-1)/2}$). Полученный в итоге вектор и есть $\vec{a}(s)$. Например, для верхнего пути на рис. 2 вектор $\vec{a}(s) = (1/8, 0)$.



Обозначим $\vec{a}(x, y) := \sum_s \vec{a}(s)$, где суммирование ведется по всем путям шашки из клетки $(0, 0)$ в клетку (x, y) , начинающихся с хода вправо-вверх. Если таких путей нет, то будем считать $\vec{a}(x, y) := \vec{0}$. Например, $\vec{a}(1, 3) = (0, -1/2) + (1/2, 0) = (1/2, -1/2)$. Квадрат длины вектора $\vec{a}(x, y)$ называется *вероятностью*¹ обнаружения в точке (x, y) электрона, испущенного из точки $(0, 0)$. Она обозначается $P(x, y) := |\vec{a}(x, y)|^2$.

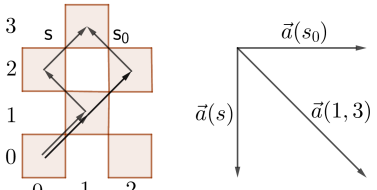


Рис. 2: Пути шашек

На рис. 1 цвет точки (x, y) , где $x+y$ чётно, показывает значение $P(x, y)$. Стороны «угла» на этом рисунке не параллельны прямым $y = \pm x$.

Будем называть клетки (x, y) с чётным и нечётным $x + y$ *чёрными* и *белыми* соответственно.

1. Наблюдения для малых y . Ответьте на вопросы для $y = 1, 2, 3, 4$ (и сформулируйте свои собственные вопросы и предположения для произвольного y): найдите $\vec{a}(x, y)$ и $P(x, y)$ для всех x ; когда $P(x, y) = 0$? Чему равна $\sum_{x \in \mathbb{Z}} P(x, y)$ для фиксированного y ? Как направлены $\vec{a}(1, y)$ и $\vec{a}(0, y)$?

*Вероятность*² обнаружения электрона в клетке (x, y) при поглощении в клетке (x', y') определяется аналогично $P(x, y)$, только суммирование производится по путям s , не проходящим через (x', y') . Обозначим ее $P(x, y$ минуя $x', y')$.

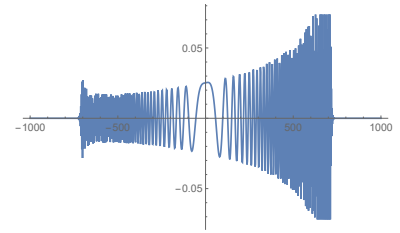


Рис. 3: $a_2(x, 1000)$

2. Эксперимент на двух щелях. Верно ли, что $P(x, y) = P(x, y$ минуя $0, 2) + P(x, y$ минуя $2, 2)$? А что $P(x, y$ минуя $x', y') \leq P(x, y)$?

3. Найдите $P(0, 12)$. Придумайте быстрый способ составления таблицы значений $\vec{a}(x, y)$, не требующий перебора всех путей. (Студент, первым получивший правильное решение, получает *первый разряд*.)

Обозначим через $a_1(x, y)$ и $a_2(x, y)$ координаты вектора $\vec{a}(x, y)$; см. рис. 3.

4. (Загадка) Нарисуйте все пути, дающие ненулевой вклад в $a_1(1, 5)$. То же для $a_2(1, 5)$.

5. Уравнение Дирака. Выразите $a_1(x, y)$ и $a_2(x, y)$ через $a_1(x \pm 1, y - 1)$ и $a_2(x \pm 1, y - 1)$.

6. Сохранение вероятности/заряда. Для каждого целого $y > 0$ выполнено $\sum_{x \in \mathbb{Z}} P(x, y) = 1$.

7. Симметрия. Найдите формулу, которая связывает между собой $a_1(x, 100)$ при $x < 0$ и при $x \geq 0$ (выразите значения при $x < 0$ через значения при $x \geq 0$). Тот же вопрос про $a_1(x, 100) + a_2(x, 100)$.

8. Принцип Гюйгенса. Как быстро найти $\vec{a}(x, 199)$, зная значения $\vec{a}(x, 100)$ при всех целых x ?

9. Используя компьютер, постройте графики функций $f_y(x) = P(x, y)$ для разных y (соедините каждую пару точек $(x, f_y(x))$ и $(x + 2, f_y(x + 2))$ отрезком); ср. с рис. 3. То же для функции $a_1(x, y)$.

10.* Найдите явную формулу для вектора $\vec{a}(x, y)$ и вероятности $P(x, y)$ (в ответе можно использовать сумму не более y слагаемых).

¹Удобно считать, что значение y фиксировано, а клетки $(-y, y), (-y + 2, y), \dots, (y, y)$ — это все возможные исходы эксперимента. Например, y -тая горизонталь может быть фотопластиной, детектирующей электрон.

Знакомство с теорией вероятностей не требуется для решения предложенных задач.

Если бы шашка просто ходила случайно (после первого хода вправо-вверх), то $|\vec{a}(s)|^2$ было бы вероятностью пути s . Последняя вероятность не имеет смысла в нашей модели, но объясняет нормирующий множитель $2^{(y-1)/2}$.

Осторожно! Наше правило вычисления вероятности годится только для базовой модели; позже мы его изменим, когда будем уточнять модель.

²Здесь появляется дополнительный исход эксперимента, когда электрон поглощается и не достигает фотопластины.

2 Спин

Вопрос: какова вероятность обнаружить правый электрон в клетке (x, y) , если правый электрон был испущен из клетки $(0, 0)$?

Предположения: те же.

Результаты: переворот спина.

Трюк, использованный для решения предыдущих задач, имеет физический смысл: удобно считать, что электрон находится в одном из двух возможных состояний: *движущимся вправо* или *движущимся влево*. Мы будем писать просто ‘правый’ или ‘левый’ для краткости³. Это не просто удобная формальность, но неотъемлемое свойство электрона, называемое *спином*⁴.

Обозначим через $\vec{a}(x, y, +) := \sum_s \vec{a}(s)$, где суммирование ведется по всем путям шашки из клетки $(0, 0)$ в клетку (x, y) , которые начинаются и заканчиваются ходом вправо-вверх. Определим $\vec{a}(x, y, -)$ как аналогичную сумму по всем путям шашки из клетки $(0, 0)$ в клетку (x, y) , которые начинаются ходом вправо-вверх, а заканчиваются ходом влево-вверх.

Квадрат длины вектора $\vec{a}(x, y, +)$ (соответственно $\vec{a}(x, y, -)$) называется *вероятностью*⁵ обнаружить правый (соответственно левый) электрон в клетке (x, y) , если правый электрон был испущен из клетки $(0, 0)$. Обозначим их как $P(x, y, +) := |\vec{a}(x, y, +)|^2$ и $P(x, y, -) := |\vec{a}(x, y, -)|^2$.

11. Выразите $\vec{a}(x, y, +)$ и $\vec{a}(x, y, -)$ через $a_1(x, y)$ и $a_2(x, y)$; $P(x, y)$ через $P(x, y, +)$ и $P(x, y, -)$.

12.* Переворот спина. Какова вероятность $P(y_0, -) := \sum_{x \in \mathbb{Z}} P(x, y_0, -)$ обнаружить левый электрон на прямой $y = y_0$ (в ответе можно использовать сумму не более y_0 слагаемых)? Найдите максимальный элемент и предел последовательности $P(1, -), P(2, -), P(3, -), \dots$

Ликбез по анализу. Следующие формулы могут быть полезны для решения задачи 12 и прочих задач со звёздочкой.

Напомним, что $\sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} = 2 - \frac{1}{2^n}$. Очевидно, что чем больше n , тем ближе сумма к 2. Мы хотели бы писать $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2$; для этого введём определение такой бесконечной суммы. Мы говорим, что последовательность a_1, a_2, a_3, \dots имеет предел a , если для любого действительного $\varepsilon > 0$ найдётся такое N , что для любого натурального $n > N$ верно $|a_n - a| < \varepsilon$. Обозначение: $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. В частности, $\lim_{n \rightarrow \infty} (2 - \frac{1}{2^n}) = 2$. Определим бесконечную сумму как $\sum_{k=0}^{\infty} a_k := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k$. Тогда в самом деле $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2$.

Следующее обобщение, называемое *биномом Ньютона*, разрешается использовать без доказательства:

$$(1+x)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r(r-1) \cdots (r-k+1)}{k(k-1) \cdots 1} x^k$$

для всех комплексных x , для которых $|x| < 1$, и для всех действительных r , или для $x = 1$ и $r > -1$. В частности, для $r = -1$ и $r = -\frac{1}{2}$ получаем:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad \text{и} \quad \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k(2k-1) \cdots (k+1)}{k(k-1) \cdots 1} \frac{x^k}{4^k}.$$

С помощью *формулы Стирлинга* можно оценить слагаемые в бинOME Ньютона:

$$\sqrt{2\pi} k^{k+1/2} e^{-k} \leq k! \leq e k^{k+1/2} e^{-k},$$

где e обозначает $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n$. Это иррациональное число между 2.71 и 2.72.

³Обратите внимание, что в размерности 3 и больше *правый* и *левый* означают не направление движения, а нечто совсем другое. Хотя это часто представляют, как направление вращения электрона, эти состояния не имеют некантовых аналогов.

⁴И *киральностью*; будьте внимательны: термин *спин* обычно обозначает свойство, не имеющее никакого отношения к направлению движения.

⁵Таким образом, результатом эксперимента является пара (конечная координата по x , направление последнего хода), а конечная координата по y фиксирована.

Именно эти вероятности являются фундаментальными, а $P(x, y)$ в общем случае *по определению* равна выражению из решения задачи 11, а не приведённому выше выражению $P(x, y) = |\vec{a}(x, y)|^2$ (которое случайно совпало с нужным в простом случае).

3 Масса

Вопрос: какова вероятность обнаружения в клетке (x, y) правого электрона массой m , испущенного из $(0, 0)$?

Предположения: масса и сторона клетки теперь любые.

Результаты: формула для вероятности при малой длине стороны клетки.

Чтобы провести эксперимент, проверяющий нашу модель, нам нужно следующее обобщение.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и $m \geq 0$, называемые *стороной клетки* и *массой частицы* соответственно. Будем считать, что центры клеток расположены в точках с координатами вида $(k\varepsilon, l\varepsilon)$, где k и l — целые; см. рис. 4. Каждому пути s из клетки с центром $(0, 0)$ в клетку с центром (x, y) сопоставим вектор $\vec{a}(s, m\varepsilon)$ следующим образом. В начале движения у нас будет вектор $(0, 1)$. Пока шашка движется прямо, вектор не меняется, а после каждого поворота он поворачивается на 90° по часовой стрелке и умножается на $m\varepsilon$. В конце движения вектор сжимается в $(1 + m^2\varepsilon^2)^{(y/\varepsilon-1)/2}$ раз, где y/ε — общее число ходов шашки. Полученный в итоге вектор и есть $\vec{a}(s, m\varepsilon)$. Векторы $\vec{a}(x, y, m, \varepsilon, \pm)$ и числа $P(x, y, m, \varepsilon, \pm)$ определяются аналогично $\vec{a}(x, y, \pm)$ и $P(x, y, \pm)$, только вместо $\vec{a}(s)$ используется $\vec{a}(s, m\varepsilon)$. В частности, $P(x, y, 1, 1, +) = P(x, y, +)$. На нижнем графике рисунка 1 цвет точки (x, y) показывает значение $P(x, y, 1, 0.2, +) + P(x, y, 1, 0.2, -)$ (если $(x + y)/0.2$ чётно).

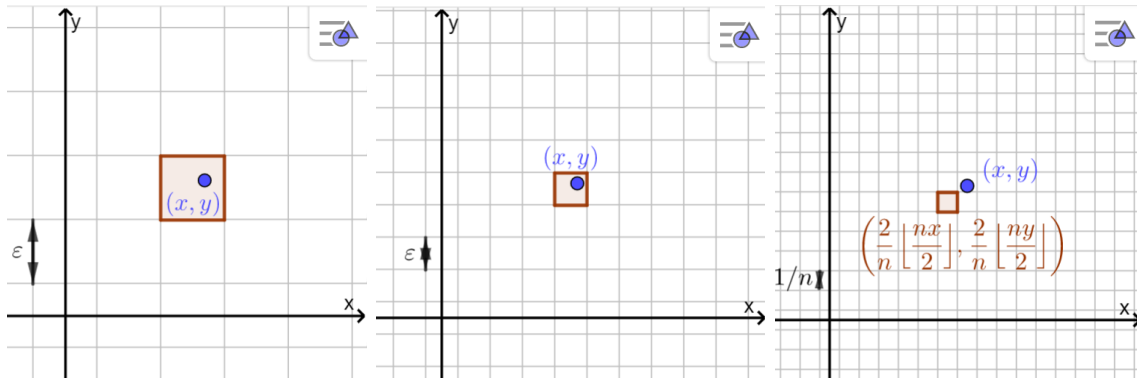


Рис. 4: Точка (x, y) фиксирована, а сторона клетки стремится к нулю.

13. (Загадка) Безмассовые и тяжёлые частицы. Найдите $P(x, y, 0, \varepsilon, +)$ и придумайте определение числа $P(x, y, \infty, \varepsilon, +)$ для всех x, y, ε .

14. Решите аналоги задач 5, 6, и 10 для $m, \varepsilon \neq 1$.

Реальному эксперименту отвечает ситуация, когда сторона клетки $\varepsilon = 1/n$ очень мала, то есть n стремится к бесконечности. Зафиксируем на плоскости точку (x, y) и будем приближать ее черными клетками со стороной $1/n$ и центром в $(\frac{2}{n} \lfloor \frac{nx}{2} \rfloor, \frac{2}{n} \lfloor \frac{ny}{2} \rfloor)$; см. рис. 4. Это приводит нас к такой задаче.⁶

15.* (Первая основная задача) Непрерывный предел. Найдите $\lim_{n \rightarrow \infty} n \vec{a}(\frac{2}{n} \lfloor \frac{nx}{2} \rfloor, \frac{2}{n} \lfloor \frac{ny}{2} \rfloor, m, \frac{1}{n}, -)$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} n \vec{a}(\frac{2}{n} \lfloor \frac{nx}{2} \rfloor, \frac{2}{n} \lfloor \frac{ny}{2} \rfloor, m, \frac{1}{n}, +)$ для всех x, y, m . В ответе разрешено использовать выражения⁷

$$J_0(z) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(z/2)^{2k}}{(k!)^2} \quad \text{и} \quad J_1(z) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(z/2)^{2k+1}}{k!(k+1)!}.$$

⁶Объяснить, откуда в пределах берётся нормирующий множитель n , несколько сложнее; мы не будем это делать.

⁷Называемые *функциями Бесселя*, они почти так же хорошо исследованы, как синус и косинус; предварительное знакомство с ними не требуется.

4 Источник

Вопрос: какова вероятность обнаружить в клетке (x, y) электрон, испущенный источником с длиной волны λ ?

Предположения: теперь источник реалистичный.

Результаты: распространение волн, дисперсионное соотношение.

Реалистичный источник испускает электроны не точечно из $x = 0$ (как в нашей игре), а широким волновым импульсом. В терминах нашей игры это означает, что шашка может начинаться из любой чёрной клетки на горизонтали $y = 0$ (не слишком далеко от начала координат), но исходное направление вектора $\vec{a}(s)$ повернуто на угол, пропорциональный расстоянию от стартовой клетки до $(0, 0)$; см. рис. 5.

Более строго, зафиксируем вещественное $\lambda > 0$ и нечётное Δ , называемые *длиной волны* и *шириной импульса* соответственно. Обозначим через $R^\alpha \vec{a}$ поворот вектора \vec{a} на угол $|\alpha|$ против часовой стрелки, если $\alpha \geq 0$, и по часовой, если $\alpha < 0$. Для целых чисел x и y определим вектор⁸

$$\vec{a}(x, y, \lambda, \Delta, +) := \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{\substack{x_0=1-\Delta \\ x_0 \text{ чётно}}}^{\Delta-1} \sum_s R^{2\pi x_0/\lambda} \vec{a}(s),$$

где вторая сумма берётся по всем путям s из клетки $(x_0, 0)$ в клетку (x, y) , которые начинаются и заканчиваются ходом вправо-вверх. Квадрат длины этого вектора назовём *вероятностью обнаружить правый электрон в клетке (x, y) , если он был испущен источником с длиной волны λ и шириной импульса Δ* . Эта вероятность обозначается $P(x, y, \lambda, \Delta, +)$. Определим $\vec{a}(x, y, \lambda, \Delta, -)$ и $P(x, y, \lambda, \Delta, -)$ аналогично. В частности, $P(x, y, \lambda, 1, +) = P(x, y, +)$ для всех λ , и $\vec{a}(x+1, 1, \lambda, \Delta, +) = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} (-\sin \frac{2\pi x}{\lambda}, \cos \frac{2\pi x}{\lambda})$ для чётных $|x| < \Delta$.

16. Пусть $\Delta = 3$, $\lambda = 4$. Найдите $\vec{a}(x, y, 4, 3, +)$ и вероятность $P(x, y, 4, 3, +)$ для $y = 1, 2, 3$ и всех x . Чему равно $\sum_{x \in \mathbb{Z}} (P(x, y, 4, 3, +) + P(x, y, 4, 3, -))$ для каждого $y = 1, 2, 3$? Когда $P(x, 3, 4, 3, +) = 0$?

17. Сохранение вероятности/заряда. Решите аналоги задач 5 и 6 для $\vec{a}(x, y, \lambda, \Delta, -)$, $\vec{a}(x, y, \lambda, \Delta, +)$, и $P(x, y, \lambda, \Delta, +) + P(x, y, \lambda, \Delta, -)$ вместо $a_1(x, y)$, $a_2(x, y)$ и $P(x, y)$.

18. Причинность. Ни $\sqrt{\Delta} \vec{a}(x, y, \lambda, \Delta, +)$, ни $\Delta P(x, y, \lambda, \Delta, +)$ не зависят от Δ для $\Delta > y + |x|$.

Обозначим $\vec{a}(x, y, \lambda, \pm) = \sqrt{\Delta} \vec{a}(x, y, \lambda, \Delta, \pm)$ и $P(x, y, \lambda, \pm) = \Delta P(x, y, \lambda, \Delta, \pm)$ для $\Delta > y + |x|$.

19. Волна. Как найти $\vec{a}(x, 100, \lambda, +)$ для всех чётных x , если дан этот вектор для одного чётного x ?

20. Дисперсионное соотношение. Найдите все функции вида $a_1(x, y) = v_1 e^{2\pi i(x/\lambda + y/T)}$ и $a_2(x, y) = v_2 e^{2\pi i(x/\lambda + y/T)}$, удовлетворяющие уравнению Дирака из решения задачи 5. Здесь v_1, v_2 — комплексные постоянные. Какое соотношение получается между λ и T (*длиной* и *периодом* волны)?

21.* Распространение волн. Для всех x, y, λ найдите $\vec{a}(x, y, \lambda, -)$, $P(x, y, \lambda, -)$ и $P(x, y, \lambda, -) + P(x, y, \lambda, +)$.

22.* Интеграл Фурье. Докажите, что $a_1(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(\omega_p(y-1))}{\sin \omega_p} e^{-ipx} dp$ при всех $y > 0$ и всех x , где $\omega_p := \arccos(\cos p/\sqrt{2})$. Найдите аналогичную интегральную формулу для $a_2(x, y)$ (загадка).

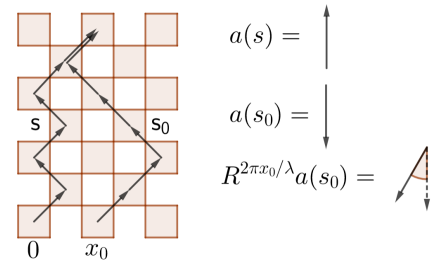


Рис. 5: Пути шашек теперь могут начинаться с разных клеток.

5 Среда

Вопрос: какая доля света данного цвета отражается стеклянной пластиной данной ширины?

Предположения: угол падения 90° , нет поляризации и дисперсии света; масса частицы теперь зависит от x .

Результаты: отражение от тонкой плёнки.

⁸Обозначение $\vec{a}(x, y, \lambda, \Delta, \pm)$ не нужно путать с $\vec{a}(x, y, m, \varepsilon, \pm)$ выше.

Нашу модель также можно применить для описания распространения света в прозрачной среде, например в стекле⁹. Свет распространяется так, как будто он имеет ненулевую массу в среде и нулевую вне её¹⁰. Длина волны определяет цвет.

23. (Загадка) Дайте такое определение аналога $\vec{a}(s, m\varepsilon)$ для случая, когда масса $m = m(x)$ зависит от x , чтобы аналогии задач 5 и 6 остались верными.

Для заданной массы $m = m(x)$ определим вектор $\vec{a}(x, y, m(x), \lambda, \pm)$ и число $P(x, y, m(x), \lambda, \pm)$ аналогично $\vec{a}(x, y, \lambda, \pm)$ и $P(x, y, \lambda, \pm)$, только в их определении заменим $\vec{a}(s)$ на $\vec{a}(s, m\varepsilon)$. Пока что будем считать, что сторона клетки $\varepsilon = 1$.

24. Отражение от одной поверхности. Найдите $P(x, y, m(x), \lambda, +)$ и $P(x, y, m(x), \lambda, -)$ для

$$m(x) = m_0(x) \equiv 0 \quad \text{и} \quad m(x) = m_1(x) = \begin{cases} 0.2, & \text{при } x = 0; \\ 0, & \text{при } x \neq 0. \end{cases}$$

Фиксируем нечётное $L > 1$, называемое *шириной стеклянной пластины*. Сначала предположим для простоты, что свет отражается только от двух поверхностей пластины, и для этого рассмотрим¹¹

$$m_2(x) = \begin{cases} -0.2, & \text{при } x = 1; \\ +0.2, & \text{при } x = L; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Вероятность отражения/прохождения¹² света с длиной волны λ от стеклянной пластины ширины L — это соответственно

$$P(\lambda, L, -) = \lim_{\substack{y \rightarrow +\infty \\ y \text{ чётно}}} P(0, y, m_2(x), \lambda, -);$$

$$P(\lambda, L, +) = \lim_{\substack{y \rightarrow +\infty \\ y \text{ чётно}}} P(L + 1, y, m_2(x), \lambda, +).$$

25. Постройте график функции $f(L) = P(0, 2L, m_2(x), 16, -)$.

26.* (Вторая основная задача) **Отражение от двух поверхностей.** Найдите $P(\lambda, L, -)$, $P(\lambda, L, +)$, $P(\lambda, L, -) + P(\lambda, L, +)$ и $\max_L P(\lambda, L, -)$.

На самом деле, свет отражается *внутри* пластины; этим нельзя пренебрегать, если мы хотим точнее вычислить вероятность отражения (вычислить её точно, без упрощающих предположений, видимо, невозможно для таких сложных веществ, как стекло). Поэтому мы существенно модифицируем нашу модель.

Во-первых, сторона клетки $\varepsilon > 0$ будет теперь произвольной. Зафиксируем $m > 0$ и положим $m_3(x) = m$ при $0 < x \leq L$ и $m_3(x) = 0$ иначе. Во-вторых, для каждого хода, начинающегося в клетке внутри стекла, наш вектор будет теперь дополнительно поворачиваться на угол $\arctg m\varepsilon$ по часовой стрелке (независимо от того, поворачивает ли шашка в этой клетке)¹³. Другими словами, положим

$$\vec{a}(x, y, m(x), \varepsilon, \lambda, \text{modified}, -) := \sum_{x_0: x_0/\varepsilon \in \mathbb{Z}} \sum_s R^{2\pi x_0/\lambda} R^{-k(s) \arctg m\varepsilon} \vec{a}(s, m(x)\varepsilon),$$

⁹Осторожно: как правило, шашки Фейнмана не подходят для описания света; частичное отражение — это замечательное исключение.

¹⁰Масса пропорциональна $(n - 1)/(2\sqrt{n})$, где n показатель преломления; у стекла $n \approx 1.5$ и $(n - 1)/(2\sqrt{n}) \approx 0.2$.

¹¹Это упрощающее предположение требует отрицательной массы на левой поверхности; причина этого станет ясна после решения задачи 27.

¹²Концептуальнее было бы определить $P(\lambda, L, -) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{\Delta \rightarrow +\infty} \lim_{y \rightarrow +\infty, y \in \varepsilon\mathbb{Z}} \sum_{x \in \varepsilon\mathbb{Z}} P(x, y, m_3(x), \varepsilon, \lambda, \Delta, -)$, но мы не будем так делать.

¹³Этот дополнительный поворот можно объяснить следующим образом. Свет может рассеяться в каждой клетке внутри стекла несколько раз. Каждое рассеивание добавляет множитель $-im\varepsilon$ к нашему вектору (рассматриваемому, как комплексное число) и может поменять или не поменять направление движения шашки. Предположим, $m\varepsilon < 1$. Таким образом, ход без изменения направления движения добавляет множитель

$$1 \text{ (нет рассеиваний)} - im\varepsilon \text{ (1 рассеивание)} + (-im\varepsilon)^2 \text{ (2 рассеивания)} + \dots = \frac{1}{1 + im\varepsilon}.$$

где вторая сумма берётся по всем путям s из клетки с центром $(x_0, 0)$ в клетку с центром (x, y) , которые начинаются ходом вправо-вверх и заканчиваются ходом влево-вверх, а $k(s)$ — количество ходов на пути s , начинающихся в полосе $0 < x \leq L$. Положим $P(x, y, m(x), \varepsilon, \lambda, \text{modified}, -) = |\vec{a}(x, y, m(x), \varepsilon, \lambda, \text{modified}, -)|^2$.

27. ** Отражение от тонкой плёнки. Найдите $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \lim_{\substack{y \rightarrow +\infty \\ y/\varepsilon \text{ чётно}}} P(0, y, m_3(x), \varepsilon, \lambda, \text{modified}, -)$.

Для каких m максимум этого выражения по L равен $\max_L P(\lambda, L, -)$? Разрешается без доказательства использовать, что $\lim_{\substack{y \rightarrow +\infty \\ (x+y)/\varepsilon \text{ чётно}}} R^{2\pi y/\lambda} \vec{a}(x, y, m_3(x), \varepsilon, \lambda, \text{modified}, -)$ существует для всех x .

6 Внешнее поле

Вопрос: какова вероятность обнаружения электрона в клетке (x, t) , если он движется в заданном электромагнитном поле u ?

Предположения: электромагнитное поле есть только в плоскости Oxt , электрон не воздействует на него.

Результаты: 'прецессия' спина в магнитном поле (качественное объяснение), сохранение заряда.

В нашей модели внешнее поле не добавляется искусственно, а возникает естественным образом¹⁴.

В базовой модели стрелка часов не поворачивалась, пока шашка двигалась прямо. Напрашивается изменение модели: поворачивать стрелку равномерно во время движения. Это не изменит модель по сути: поскольку все пути из начального положения в конечное имеют одинаковую длину, то и векторы поворачиваются на один и тот же угол, что не влияет на вероятности. Более интересная модификация получается, когда текущий угол поворота зависит от положения шашки. Именно это делает электромагнитное поле. В дальнейшем, для простоты, угол поворота принимает только два значения 0° и 180° , что означает домножение на ± 1 .

Таким образом, электромагнитное поле¹⁵ понимается, как фиксированная расстановка u чисел ± 1 в вершинах квадратов-клеток. Например, на рисунке 6, поле равно -1 в правой верхней вершине каждой клетки (x, t) , у которой x и t чётны. Модифицируем определение вектора $\vec{a}(s)$, меняя его направление на противоположное каждый раз, когда путь проходит через вершину с электромагнитным полем -1 . Обозначим полученный вектор через $\vec{a}(s, u)$. Более формально, $\vec{a}(s, u) = \vec{a}(s)u(C_1)u(C_2) \dots u(C_y)$, где C_1, C_2, \dots, C_y — это все вершины квадратов на пути s . Определим $\vec{a}(x, y, u, \pm)$ и $P(x, y, u, \pm)$ аналогично $\vec{a}(x, y, \pm)$ и $P(x, y, \pm)$, заменив в определении $\vec{a}(s)$ на $\vec{a}(s, u)$. Например, если u тождественно равно $+1$, то $P(x, t, u, +) = P(x, t, +)$.

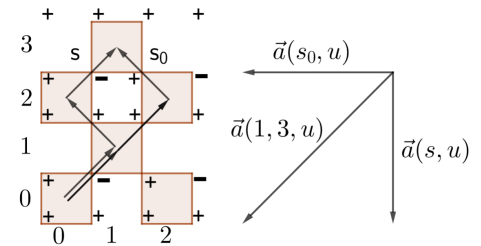


Рис. 6: Пути в поле

28. Однородное поле. Пусть $u(C) = -1$, если C это верхний правый угол клетки (x, y) , где x и y чётны, и $u(C) = +1$ иначе. Найдите вектор $\vec{a}(x, y, u, +)$ и вероятность $P(x, y, u, +)$ для $y = 1, 2, 3, 4$ и всех целых x . Чему равна $\sum_{x \in \mathbb{Z}} (P(x, y, u, +) + P(x, y, u, -))$ для фиксированного $y = 1, 2, 3, 4$?

29. 'Прецессия' спина в магнитном поле. Используя компьютер, постройте график функции $P(y) = \sum_{x \in \mathbb{Z}} P(x, y, u, -)$ для поля u из предыдущей задачи.

Для данного поля u назовём белую клетку *отрицательной*, если u равно -1 ровно в 1 или 3 углах клетки.

Без рассеиваний шашка движется прямо. Таким образом, поворот в определённой клетке внутри стекла добавляет множитель

$$-im\varepsilon \text{ (1 рассеивание)} + (-im\varepsilon)^2 \text{ (2 рассеивания)} + (-im\varepsilon)^3 \text{ (3 рассеивания)} + \dots = \frac{-im\varepsilon}{1 + im\varepsilon}.$$

Это те же множители, что и в модели из §3, дополнительно повёрнутые на угол $\arctg m\varepsilon$ по часовой стрелке.

¹⁴Обратите внимание, что хотя этот метод добавления электромагнитного поля хорошо известен, он сильно отличается от метода, изложенного в [Feunman].

¹⁵Или, точнее, *вращение на угол, равный компоненте электромагнитного вектор-потенциала* (в направлении движения шашки). Для простоты мы разрешаем только два угла 0° и 180° ; обычно рассматривают любые углы. Поле u следует интерпретировать как *магнитное* или *электрическое* в зависимости от того, интерпретируется ли координата по y как *положение* или как *время*.

30. Калибровочные преобразования. Одновременное изменение знаков значений u в 4 углах одной чёрной клетки не меняет $P(x, y, u, +)$.

31. Кривизна. Поле u можно сделать тождественно равным $+1$ в клетчатом прямоугольнике, используя преобразования из задачи 30, если и только если он не содержит отрицательных белых клеток.

32. Гомологии. Электромагнитное поле u равно $+1$ на границе клетчатого прямоугольника $m \times n$. Чему может быть равно количество отрицательных белых клеток в прямоугольнике?

33. Сохранение вероятности/заряда. Решите аналоги задач 5–6 для u , не равного тождественно $+1$.

7 Тождественные частицы

Вопрос: какова вероятность обнаружения электронов в клетках F и F' , если они были испущены из A и A' ?

Предположения: те же, что и в базовой модели; координата по оси Oy интерпретируется, как время.

Результаты: принцип запрета Паули.

Движение нескольких электронов можно описать следующей моделью.

Каждой паре путей s, s' шашки, состоящих из y ходов каждый, сопоставим вектор $\vec{a}(s, s')$ следующим образом. Начнём с вектора $(0, 1)$. Передвинем шашку сначала вдоль одного пути, а потом вдоль другого, поворачивая при этом вектор по правилу из §1: каждый раз, когда шашка меняет направление, вектор поворачивается на 90° по часовой стрелке. (То есть, в итоге вектор повернётся $t(s) + t(s')$ раз, где $t(S)$ — это количество поворотов на пути S .) Кроме того, в конце мы делим вектор на 2^{y-1} . Полученный вектор будем обозначать $\vec{a}(s, s')$. В частности, на рис. 2 вектор $\vec{a}(s, s_0) = (-1/4, 0)$.

Зафиксируем клетки $A = (0, 0)$, $A' = (x_0, 0)$, $F = (x, y)$, $F' = (x', y)$ и их диагональных соседей $B = (1, 1)$, $B' = (x_0 + 1, 1)$, $E = (x - 1, y - 1)$, $E' = (x' - 1, y - 1)$, где $x_0 \neq 0$ и $x' \geq x$. Обозначим¹⁶

$$\vec{a}(AB, A'B' \rightarrow EF, E'F') := \sum_{\substack{s: AB \rightarrow EF \\ s': A'B' \rightarrow E'F'}} \vec{a}(s, s') - \sum_{\substack{s: AB \rightarrow E'F' \\ s': A'B' \rightarrow EF}} \vec{a}(s, s'),$$

где первая сумма по всем парам, состоящим из пути s , начинающимся ходом AB и заканчивающимся ходом EF , и пути s' , начинающимся ходом $A'B'$ и заканчивающимся ходом $E'F'$; во второй сумме последние ходы поменяны местами.

Квадрат длины $P(AB, A'B' \rightarrow EF, E'F') = |\vec{a}(AB, A'B' \rightarrow EF, E'F')|^2$ называется *вероятностью*¹⁷ обнаружить правые электроны в F и F' , если они были испущены из A и A' . В частности, $P(AB, A'B' \rightarrow EF, EF) = 0$, то есть два правых электрона не могут быть одновременно в одном месте; это называется *принципом запрета*.

34. Независимость. При $x_0 \geq 2y$ и $x' > x$ выразите $P(AB, A'B' \rightarrow EF, E'F')$ через $P(x, y, +)$ и $P(x' - x_0, y, +)$.

35. Принцип запрета (для промежуточных состояний). Докажите, что $\vec{a}(AB, A'B' \rightarrow EF, E'F')$ не изменится, если суммы в определении будут только по тем парам путей s, s' , у которых нет *общих ходов*.

Определим $P(AB, A'B' \rightarrow EF, E'F')$ аналогично для $E = (x \pm 1, y - 1)$, $E' = (x' \pm 1, y - 1)$. Здесь мы требуем $x' \geq x$, если оба знака одинаковы, а иначе разрешаем любые x' и x .

36. Сохранение вероятности/заряда. Для каждого фиксированного $y \geq 1$ выполняется равенство $\sum_{E, E', F, F'} P(AB, A'B' \rightarrow EF, E'F') = 1$, где сумма берётся по всем четвёркам $F = (x, y)$, $F' = (x', y)$, $E = (x \pm 1, y - 1)$, $E' = (x' \pm 1, y - 1)$, таким что $x' \geq x$, если оба знака одинаковы.

¹⁶Здесь важно, что s и s' — это пути *однотипных* частиц, например двух электронов. Иначе вторая сумма опускается. Знак перед второй суммой меняется на плюс для некоторых частиц, например *фотонов* (частиц света).

¹⁷Удобно считать, что y фиксировано, а неупорядоченные четвёрки (F, F', E, E') — возможные исходы эксперимента.

8 Поглощение

Вопрос: какова вероятность найти в (x, y) электрон, испущенный из $(0, 0)$ и поглощаемый на прямой $x = 0$?

Предположения: те же.

Результаты: вероятность возвращения.

Вероятность обнаружения электрона в клетке (x, y) при поглощении на прямой $x = x'$ определяется аналогично $P(x, y)$, только суммирование производится по путям s , не проходящим через клетки на вертикали $x = x'$, за исключением, быть может, начальной и конечной клеток. Обозначим ее $P(x, y$ минуя $x')$. Аналогично определим $a(x, y$ минуя $x')$

37. Найдите $a(0, y$ минуя $0)$ для $y = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

38. **Сохранение вероятности.** Решите аналоги задач 5 и 6 для $a(x, y$ минуя $0)$ и $P(x, y$ минуя $0)$.

39.* **Вероятность возвращения.** Найдите $a(0, y$ минуя $0)$ при всех y и $\sum_{y>0} P(0, y$ минуя $0)$.

Отметим без доказательства следующий парадоксальный факт: если добавить поглощение еще на одной прямой $x = x'' > 0$, то вероятность $\sum_{y>0} P(0, y$ минуя $0)$ возвращения в 0 *увеличится!*

9 Античастицы

Вопрос: каково математическое ожидание заряда в клетке (x, y) , если электрон испущен из клетки $(0, 0)$?

Предположения: электрон-позитронные пары теперь рождаются и аннигилируют; ось Oy — время.

Результаты: пропагатор Фейнмана в непрерывном пределе.

Следующее уточнение получается, если вычислить в белых клетках интеграл, задающий значения $a_1(x, y)$ и $a_2(x, y)$ в черных клетках (ср. с задачей 22).

Обозначим $\omega_p := \arccos(\frac{\cos p}{\sqrt{2}})$. Для целых x и y , где $y > 0$, положим

$$\begin{aligned} A_1(x, y) &:= \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{ipx - i\omega_p(y-1)} dp}{\sqrt{1 + \sin^2 p}}; \\ A_2(x, y) &:= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(1 + \frac{\sin p}{\sqrt{1 + \sin^2 p}} \right) e^{ip(x-1) - i\omega_p(y-1)} dp. \end{aligned} \quad (1)$$

Для $y \leq 0$ определение аналогично, только общий знак меняется для четных $x + y$. В частности, можно проверить, что $A_k(x, y) = a_k(x, y)$ при четном $x + y$, $y > 0$ и $k = 1, 2$. Обозначим $A_k(x, y) =: ib_k(x, y)$ при нечетном $x + y$. Положим $b_k(x, y) := 0$ при четном $x + y$. Величину $|A_1(x, y)|^2/2 + |A_2(x, y)|^2/2$ назовем *математическим ожиданием заряда* в клетке (x, y) (в единицах заряда электрона).

Например, $b_1(0, 1) = \Gamma(\frac{1}{4})^2/(2\pi)^{3/2} =: G \approx 0.83463$ — *константа Гаусса* и $-b_2(0, 1) = 2\sqrt{2\pi}/\Gamma(\frac{1}{4})^2 = 1/\pi G =: L' \approx 0.38138$ — *обратная лемнискатная константа*. Остальные значения — еще более сложные иррациональности, см. таблицу 1.

40. Докажите, что $A_k(x, y) = a_k(x, y)$ при четном $x + y$, $y > 0$ и $k = 1, 2$, а $\operatorname{Re} A_k(x, y) = 0$ при нечетном $x + y$.

41. **Сохранение заряда.** Решите аналоги задач 5, 6 и 7 для $b_k(x, y)$ вместо $a_k(x, y)$.

10 $(1 + 1)$ -мерная квантовая электродинамика

Вопрос: какова вероятность обнаружить электроны (или электрон+позитрон) с импульсами q и q' в далёком будущем, если они были испущены с импульсами p и p' в далёком прошлом?

Предположения: взаимодействие теперь есть; остались только базовые упрощающие предположения: нет ядерных сил и гравитации, электрон движется только по оси Ox (а ось Oy интерпретируется, как время).

Результаты: отталкивание зарядов одинакового знака и притяжение зарядов разного знака.

Построение этого уточнения — трудная открытая проблема.

$$b_1(x, y)$$

2	$\frac{G-L'}{\sqrt{2}}$		$\frac{G-L'}{\sqrt{2}}$		$\frac{7G-15L'}{3\sqrt{2}}$
1		G		$G - 2L'$	
0	$\frac{G-L'}{\sqrt{2}}$		$\frac{G-L'}{\sqrt{2}}$		$\frac{7G-15L'}{3\sqrt{2}}$
-1		$-L'$		$\frac{2G-3L'}{3}$	
$y \backslash x$	-1	0	1	2	3

$$b_2(x, y)$$

2	$\frac{G-3L'}{3\sqrt{2}}$		$\frac{-G-L'}{\sqrt{2}}$		$\frac{-G+3L'}{\sqrt{2}}$
1		$-L'$		L'	
0	$\frac{G-3L'}{\sqrt{2}}$		$\frac{G+L'}{\sqrt{2}}$		$\frac{-G+3L'}{3\sqrt{2}}$
-1		G		$\frac{G}{3}$	
$y \backslash x$	-1	0	1	2	3

Таблица 1: Значения $b_1(x, y)$ и $b_2(x, y)$ при малых x, y

Эпилог (подводные камни)

Мы надеемся, что по крайней мере некоторые из наших читателей заинтересовались квантовой теорией и хотят узнать о ней больше. В качестве эпилога дадим несколько предостережений таким читателям.

В научно-популярной литературе эту теорию часто переупрощают. Наш материал не является исключением. Простые модели, представленные здесь, очень грубы, и слепо доверять им нельзя. Простота — их единственное достоинство; если относиться к ним слишком серьёзно, эти модели даже могут дать неправильную физическую интуицию. Настоящее понимание квантовой теории требует серьёзных познаний в физике и математике.

Также мы хотим отметить, что на математическом уровне строгости квантовая теория поля до сих пор не построена, а в ее решёточных моделях практически нет математических результатов; почти всё, что имеется — всего лишь компьютерные симуляции. Наконец, есть “теории Новой Физики”, которые разрабатываются безо всяких объективных критериев истины: такие теории не поддерживаются ни экспериментальными, ни математическими доказательствами (и некоторые из них имеют экспериментальное опровержение).

Благодарности

Авторы благодарны В. Скопенковой за некоторые рисунки, Г. Челнокову, И. Иванову за полезные дискуссии, и всем участникам Летней конференции Турнира городов в Аранджеловаце и Летней школы “Современная математика” в Дубне за их вклад.

Список литературы

- [Feynman] Feynman, Richard (2006). QED: The strange theory of light and matter. Princeton University Press. ISBN 0-691-12575-9. Перевод на русский язык: Фейнман Р. КЭД. Странная теория света и вещества. Сер. “Библиотечка “Квант” ” вып. 66. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит.-ры, 144с.
- [Kempe] J. Kempe, Quantum random walks: an introductory overview, Contemp. Phys. 50:1 (2009), 339-359.
- [Landafshitz] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, L.P. Pitaevskii (1984). Electrodynamics of Continuous Media. Vol. 8 (2nd ed.). Butterworth-Heinemann. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. — Издание 4-е, стереотипное. — М.: Физматлит, 2005. — 656 с. — («Теоретическая физика», том VIII).
- [Venegas-Andraca] S.E. Venegas-Andraca, Quantum walks: a comprehensive review, Quantum Inf. Process. 11 (2012), 1015–1106.