1 Введение

Определение. Функция f на римановом многообразии называется *(суб)-гармонической*, если $\Delta f = 0$ ($\Delta f \geqslant 0$).

Определение. Многообразие называется *(ультра)лиувиллевым*, если на нём нет непостоянных ограниченных (суб)гармонических функций.

Гармонические функции на $\mathbb{R}^n$ характеризуются тем свойством, что их среднее значение на любой сфере равно значению в центре этой сферы. Для субгармонических функций значение в центре сферы не превосходит среднего значения на ней. Из этих соображений выводится и *принцип максимума* для (суб)гармонических функций: (суб)гармоническая функция не может принимать максимума на открытом множестве. В частности, компактные многообразия лиувиллевы. Известный как «теорема Лиувилля» факт состоит в том, что $\mathbb{R}^n$ со стандартной метрикой лиувиллево.

2 Аменабельные группы

Дадим краткое обозрение (без каких-либо доказательств) свойств аменабельных групп.

Пусть X — множество, $B(X)$ — пространство комплекснозначных ограниченных функций на нём. Функционал $m \in B^*$ называется *средним*, если он вещественный и $\inf f \leqslant m(f) \leqslant \sup f$ для всех f. Лево-инвариантное среднее на группе есть право-инвариантное среднее на противоположной группе, и наоборот, так что для групп осмысленно говорить об *инвариантных средних*. Группы, обладающие инвариантным средним, называются *аменабельными*.

Аменабельные группы составляют достаточно широкий класс групп. Он включает в себя конечные и абелевы группа, а также замкнут относительно расширений (в частности, нильпотентные и почти аменабельные группы аменабельны) и пределов. С другой стороны, свободная группа на двух образующих неаменабельна (например, группа $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ неаменабельна — иначе бы была аменабельна группа $\mathrm{SU}(2)$, которая содержит свободную группу на двух образующих). Гипотетически, всякая неаменабельная группа содержит свободную группу на двух образующих.

Понятие аменабельности было введено фон Нейманом в связи с отысканием инвариантных мер на G-множествах. Например, на плоскости такая мера существует (поскольку аменабельна группа движений плоскости, являющаяся расширением компактной абелевой группы абелевой унипотентной группой), а в пространстве, группа движений которого неаменабельна, уже нет. Свидетельством этого является теорема Банаха — Тарского.

Мы будем пользоваться следующим свойством аменабельных групп: действие аменабельной группы аффинными преобразованиями выпуклого компакта в локально выпуклом топологическом векторном пространстве имеет неподвижную точку.

3 Накрытия над компактной базой

Пусть $X \to Y$ — накрытие Галуа римановых многообразий с группой Галуа G, база которого компактна.

Теорема (Лайонс и Салливан, 1984)**.** *Если G нильпотентная, то X лиувиллево. Кроме того, если X лиувиллево, то G аменабельна, даже если Y некомпактно.*

Теорема (Кайманович, 1986)**.** *Если G полициклическая (разрешимая нётерова; эквивалентно — группа с субнормальным рядом с циклическими факторами) или субэкспоненциального роста, то X лиувиллево.*

Ясно, что утверждения этих теорем можно усилить, заменив условия полицикличности и нильпотентности на почти полицикличность или почти нильпотентность.

На кэлеровых многообразиях голоморфные функции гармоничны относительно лапласиана метрики, так что теорема Каймановича утверждает, что на (почти) полициклических накрытиях компактных кэлеровых многообразий нет непостоянных ограниченных голоморфных функций. Для полициклических накрытий некэлеровых компактных комплексных многообразий теорема Каймановича неверна: контрпримером служит, как обычно, универсальное накрытие поверхности Инуэ: рассмотрим целочисленную 3×3-матрицу с двумя мнимыми собственными числами и одним вещественным и определителем 1. Она обратима над $\mathbb{Z}$ и определяет действие $\mathbb{Z}$ на $\mathbb{Z}^3$. Скрученное произведение относительно такого действия есть решётка в группе $(\mathbb{C} \times \mathbb{R}) \rtimes \mathbb{R}$, которая действует на $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$. Это действие продолжается до действия на $\mathbb{C} \times \mathbb{H}$; фактор по этому действию есть поверхность с фундаментальной группой $\mathbb{Z}^3 \rtimes \mathbb{Z}$, которая не является кэлеровой.

Римановы многообразия, не являющиеся ультралиувиллевыми, мы будем называть *преходящими*. Мотивировка этого понятия такова:

Теорема. *Возвратность броуновского движения равносильна ультралиувиллевости.*

В терминологии Московской математической школы это означает, что алкаш, выпускающийся из вытрезвителя на ультралиувиллевом многообразии, обязательно туда вернётся. Как хорошо известно, в двумерьи теорему Лиувилля можно усилить: на $\mathbb{R}^2$ нет непостоянных ограниченных субгармонических функций; в трёхмерьи это уже не работает.

А. Я. Канель-Белов пояснял это так: в обычном, двумерном городе алкаш всегда вернётся в вытрезвитель; а в городе будущего, протяглом также и в высоту, алкаш вернуться в вытрезвитель уже не сможет. Это различие между двумерьем и трёхмерьем уже было подчёркнуто, когда речь шла о парадоксе Банаха — Тарского.

Теорема. *Накрытие Галуа над компактной базой ультралиувиллево, если и только если его группа Галуа есть конечное расширение* 1, $\mathbb{Z}$ *или* $\mathbb{Z}^2$.

Такие группы называют *группами Варопулоса.*

4 Накрытия над некомпактной базой

Пусть X — риманово многообразие, $\mathrm{Homo}(X)$ — группа гомотетий X, а $\mathrm{Harm}(X)$ — пространство гармонических функций на X. В комплексном случае мы будем рассматривать группу биголоморфных преобразований X и пространство голоморфных функций. Группа Homo очевидным образом представлена в пространстве Harm. Будем говорить, что $G \subset \mathrm{Homo}$ *ультралиувиллева*, если на X нет G-инвариантных ограниченных субгармонических (в комплексном случае плюрисубгармонических) функций. Если фактор X/G существует в той же категории, то G ультралиувиллева если и только если X/G ультралиувиллево.

Напомним, что группа называется *гипернильпотентной*, если она имеет вполне упорядоченное семейство нормальных делителей $\{H_\alpha\}$ таких, что $[H, H_{\alpha+1}] \in H_\alpha$, объединение которых есть вся H. Отличие этого определения от определения нильпотентности состоит в том, что это объединение может быть очень бесконечным. Гипернильпотентные группы аменабельны.

Теорема (Лин, 1987). *Пусть G — гипернильпотентная подгруппа в* $\mathrm{Homo}(X)$. *Тогда если G ультралиувиллева, то X лиувиллево.*

Для накрытий эта теорема говорит, что гипернильпотентное накрытие ультралиувиллева пространства лиувиллево. Фундаментальная группа конечнопорождена, а для конечнопорождённых групп гипернильпотентность влечёт нильпотентность и полицикличность. Значит, вариант этой теоремы для накрытий над компактной базой следует из теоремы Каймановича. Вместе с тем, эта теорема гораздо более общая.

Следствие. *Пусть $X \to Y$ — накрытие Галуа компактного риманова (кэлерова) многообразия с группой Галуа G. Если G — расширение почти гипернильпотентной группы конечным расширением* 1, $\mathbb{Z}$ *или* $\mathbb{Z}^2$, *то X лиувиллево.*

Контрпример к аналогичному утверждению для некэлеровых комплексных многообразий снова доставляет нам поверхность Инуэ: рассмотрим башню накрытий $X \xrightarrow{\mathbb{Z}^3} Y \xrightarrow{\mathbb{Z}} \mathcal{I}$. Если Y ультралиувиллево, то по теореме о гипернильпотентном накрытии X лиувиллево, что не так (в частности, мы получили, что Y лиувиллево, но не ультралиувиллево). Теперь накрытие $X \to Y$ разлагается в башню, и одно из промежуточных накрытий будет нелиувиллевым $\mathbb{Z}$-накрытием над ультралиувиллевой базой.

5 Доказательство теоремы Лина

5.1 Одна лемма

Докажем лемму:

Лемма. *Пусть на связном римановом многообразии X гладко действует дискретная аменабельная группа G, причём на X нет непостоянных ограниченных непрерывных G-инвариантных субгармонических функций. Если ограниченная гармоническая на X функция f при некотором s инвариантна относительно подгруппы $[G, s] \subset G$, то она s-инвариантна.*

Из этой леммы следует, в частности, что если f сохраняется каким-нибудь элементом нижнего центрального ряда G, то она постоянна, и, кроме того, что любая ограниченная гармоническая функция сохраняется центром (откуда, в частности, следует теорема Лиувилля).

Доказательство. Рассмотрим пространство $\mathcal{H}$ комплексных ограниченных гармонических функций на X и конус $\mathcal{K}$ вещественных неотрицательных субгармонических функций на X. По приницпу максимума функции из $\mathcal{H}$ не имеют пиков в X (то есть она либо постоянна, либо нигде не достигает верхней грани). Кроме того, имеет место следующие топологические свойства: для каждого шара $B_r = \{f \in BC(X)\colon \sup f \leqslant r\}$ множества $\mathcal{H} \cap B_r$ и $\mathcal{K} \cap B_r$ замкнуты в $BC(X)$ относительно компактно-открытой топологии, и для каждого ограниченного в sup-норме множества $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}$ функция $\varphi^2_{\mathcal{F}}(x) = \sup_{f \in \mathcal{F}} |f(x)|^2$ принадлежит конусу $\mathcal{K}$ (в частности, конусу принадлежат квадраты модулей всех функций).

На мгновение забудем про всё, о чём мы говорили, и будем рассматривать в $BC(X)$ комплексное подпространство и вещественный конус с такими свойствами. Заметим, что если задано sup-ограниченное семейство функций из $\mathcal{H}$, параметризованное дискретным топологическим пространством G, то оно равностепенно непрервыно продолжается на компактификацию Стоуна — Чеха βG.

Теперь пусть G — группа, действующая на X гомотетиями, в наших исходных предположениях на $\mathcal{H}$ и $\mathcal{K}$. Тогда G также действует на

$BC(X)$ и выполнены следующие свойства: G сохраняет $\mathcal{H}$ и $\mathcal{K}$, причём действие на $\mathcal{H}$ изометрично, тождественно на постоянных функциях и непрервыно в компактно-открытой топологии на sup-ограниченных подмножествах, действие на $\mathcal{K}$ положительно линейно, sup-ограничено и непрервыно в компактно-открытой топологии на sup-ограниченных подмножествах, и эти действия согласованы в том смысле, что они определяют одинаковые преобразования функций φ. Теперь снова забудем про нашу геометрическую картинку, и будем рассматривать какую-то банахову алгебру с действием G и дополнительными данными, удовлетворяющим перечисленным шести аксиомам. Для любой функции $f \in \mathcal{H}$ её G-орбита будет sup-ограниченным семейством, так что она допускает продолжение на стоун-чеховскую компактификацию G, которое будет автоматически G-эквивариантным относительно стандартного правого действия G на βG.

Докажем техническую лемму:

Лемма. *Пусть $\mathcal{B}$ — строго выпуклое банахово пространство, а $X \xrightarrow{\psi} \mathcal{B}$ — такое отображение, что для всякого $m \in \mathcal{B}^*$ имеет место $m \circ \psi \in \mathcal{H}$. Если $\|\psi(x)\|$ не зависит от x, то ψ постоянна.*

Доказательство. Можно считать, что для какой-то точки x_0 $\psi(x_0) \neq 0$. По теорема Хана — Банаха найдётся такой функционал $m_0 \in \mathcal{B}^*$, что $\|m_0\| = 1$ и $m_0(\psi(x_0)) = \|\psi(x_0)\|$. Тогда $|m_0(\psi(x))| \leqslant \|\psi(x)\| = \|\psi(x_0)\| = m_0(\psi(x_0))$, но функция $m_0 \circ \psi$ не имеет пиков в X, и $m_0(\psi(x)) = m_0(\psi(x_0)) = \|\psi(x_0)\|$. Но тогда $\|\psi(x_0)\| = m_0(\psi(x) + \psi(x_0))/2 \leqslant \|(\psi(x) + \psi(x_0))/2\| \leqslant (\|\psi(x)\| + \|\psi(x_0)\|)/2 = \|\psi(x)\| = \|\psi(x_0)\|$, откуда в силу строгой выпуклости $\mathcal{B}$ имеет место $\psi(x) = \psi(x_0)$. □

Переформулируем теперь то, что мы хотим доказывать.

Теорема. *Пусть выполнены шесть условий и $\mathcal{K}$ не содержит непостоянных G-инвариантнах функций. Если G аменабельна и для некоторого $s \in G$ функция $f \in \mathcal{H}$ удовлетворяет равенству $f^{gs} = f^{sg}$, то $f^s = f$.*

Доказательство. Будем смотреть на G-орбиту функции f. Введём функцию $f_x(g) = f^g(x)$ и продолжим её до функции f_x на βG. Тогда $\varphi_f^2(x) = \sup_G |f^g(x)|^2 \in \mathcal{K}$. В силу согласованностей G-действия на конусе и на пространстве $(\varphi_f^2)^h = \varphi_f^2$, с другой стороны, $\mathcal{K}$ не содержит непостоянных G-инвариантных функций, так что φ_f^2 постоянна. $\varphi_f^2 \leqslant \|f\|_X^2$, с другой стороны, если $\varphi_f^2 < \|f\|_X^2$, то $\varphi_f^2 < |f(x_0)|^2 \leqslant \sup_G |f^g(x_0)|^2 = \varphi_f^2(x_0) = \varphi_f^2$. Итак, $\|f_x\|_G = \varphi_f = \|f\|_X$.

Для всякого x функция $\widehat{f}_x$ имеет пиковое множество в связи с компактностью βG. Пусть ξ_0 принадлежит пиковому множеству для функции $\widehat{f}_{x_0}$. Итак, $\|f\|_X = \widehat{f}_x(\xi_0) = f^{\xi_0}(x)$. С другой стороны, $f^{\xi_0} \in \mathcal{H}$ и не имеет пиков. Значит, f^{ξ_0} постоянна, так что $|\widehat{f}_x(\xi_0)| = |f^{\xi_0}(x)| =$

$|f^{\xi_0}(x_0)| = |\widehat{f}_{x_0}(\xi_0)| = \|f\|_X$. Значит, ξ_0 принадлежит пиковому множеству для всех $\widehat{f}_x$, так что пиковое множество не зависит от x. С другой стороны, константы сохраняются действием G, а f^{ξ_0} постоянно, так что $|\widehat{f}_{x_0}(\xi_0 h)| = |f^{\xi_0 h}(x_0)| = |f^{\xi_0}(x_0)| = \|f\|_X$, и пиковое множество правоинвариантно.

Теперь введём на βG право-инвариантную борелевскую вероятностную меру μ, что мы можем сделать в связи с аменабельностью G. Рассмотрим пространство $L_2(\beta G, \mu)$; $C(\beta G)$ отображается в него с ядром, состоящим из функций, почти всюду равных нулю по мере μ. В частности, определены элементы $[\widehat{f_x}] \in L_2(\mu)$. Эти элементы G-инвариантны; доказательство придётся опустить.

Теперь пусть $f' = f - f^s$; к этой функции применимы результаты первых двух рассуждений. Итак, пиковое множество фнукции $\widehat{f'}_x$ — не зависящий от x непустой G-правоинвариантный компакт. Рассмотрим множество борелевских мер на βG, сосредоточенных в этом компакте. Это непустой выпуклый компакт в $C(\beta G)^*$, сохраняющийся действием G, поскольку и пиковое множество правоинвариантно. У этого действия, по теореме Маркова — Какутани, есть неподвижная точка. Пусть ν — правоинвариантная борелевская мера, сосредоточенная в пиковом множестве. Итак, $|\widehat{f'}_x(\xi)| = \|f'\|_X$ при всех $x \in X$ и $\xi \in \operatorname{supp}\nu$.

Наконец, пусть f удовлетворяет предположению теоремы; тогда $f'^g = f^g - f^{sg} = f^g - f^{gs}$. Значит, $f'^\xi = f^\xi - f^{\xi s}$. Значит, $\widehat{f'}_x(\xi) = \widehat{f}_x(\xi) - \widehat{f}_x(\xi s)$. Для меры ν, стало быть, $[\widehat{f'}_x] = 0 \in L_2(\nu)$. По непрерывности $\widehat{f'}_x(\xi) = 0$ для всех $x \in X$ и $\xi \in \operatorname{supp}\nu$. Отсюда $\|f'\|_X = 0$ и $f' = 0$. □

□

Следствие. *Если G гипернильпотентна, то в конусе $\mathcal{K}$ есть непостоянная G-инвариантная функция.*

Доказательство. В первом случае рассмотрим вполне упорядоченную систему нормальных делителей $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ группы G, участвующую в определении гипернильпотентной группы. Пусть непостоянная функция f G_β-инвариантна; тогда по технической лемме она и $G_{\beta+1}$-инвариантна. Значит, она и G-инвариантна. Тогда $|f|^2$ G-инвариантна и принадлежит конусу $\mathcal{K}$. □

Следствие. *Пусть на связном римановом многообразии X действует гомотетиями группа G, а группа H в ней конечного индекса. Допустим, что X нелиувиллево, а H гипернильпотентна. Тогда действие G не может быть ультралиувиллево. В частности, гипернильпотентное накрытие ультралиувиллева многообразия лиувиллево.*

Полностью такое же доказательство, за исключением выбора пространства $\mathcal{H}$ и конуса $\mathcal{K}$, работает и в случае комплексных многообразий, и в случае вероятностной группы.