Двойственность между псевдоэффективным и подвижным конусами на проективном многообразии

Д. Витт-Нюстрём и С. Буксом (в пересказе Р. Деева)

24 января 2017

Аннотация

Мы докажем частный случай гипотезы Буксома, Дюмаи, Петернела и Пэуна, именно об том, что на проективном многообразии X конус псевдоэффективных классов в $H^{1,1}_{\mathbb{R}}(X)$ двойствен конусу подвижных классов в $H^{n-1,n-1}_{\mathbb{R}}(X)$ посредством спаривания Пуанкаре. Это делается установлением гипотетического трансцендентного неравенства Морзе для объёма разности двух численно эффективных классов на проективном многообразии. Как следствие, показано, что подвижный конус равен сбалансированному. В приложении, написанном Буксомом, показано, что неравенство Морзе также влечёт, что функция объёма дифференцируема на объёмном конусе, а также, используя числа пересечения, получено описание простых дивизоров в некэлеровом локусе объёмного класса.

Содержание

1 Введение и краткое обозрение

1.1 Историческая справка

Классическая гипотеза алгебраической геометрии, приписываемая Мамфорду, утверждает, что компактное кэлерово многообразие X имеет отрицательную кодаировскую размерность (сиречь для всех $m > 0$ имеет место $\Gamma(X, K_X^{\otimes m}) = 0$) тогда и только тогда, когда оно *унилинейчато* (сиречь допускает доминантное рациональное отображение из произведения $\mathbb{P}^1 \times Y$, непостоянное на каком-нибудь $\mathbb{P}^1 \times \{y\}$). Унилинейчатые многообразия, конечно, имеют отрицательную кодаировскую размерность, вся соль состоит в обратном суждении.

Её естественно разделить на два вопроса: (А) если каноническое расслоение не псевдоэффективно (не содержится в замыкании конуса, порождённого классами положительных $(1,1)$-потоков), то X унилинейчато, (Б) если каноническое расслоение псевдоэффективно, то $\kappa(X) \geq 0$.

В 2013 году Буксом, Дюмаи, Петернел и Пэун доказали усиление гипотезы (А) для проективных многообразий. Именно, линейное расслоение L над проективным многообразием X псевдоэффективно тогда и только тогда, когда для всех подвижных кривых C на X имеет место $L.C \geq 0$.

1.2 Конусы в крайних средних когомологиях

Пусть X — компактное комплексное многообразие, допускающее кэлерову метрику. В пространстве $H^{1,1}(X)$ есть четыре важных конуса.

Определение 1.1. *Кэлеров конус* $\mathscr{K} \subseteq H^{1,1}_{\mathbb{R}}(X)$ есть конус классов, содержащих кэлерову форму.

Определение 1.2. *Численно эффективный конус* $\overline{\mathscr{K}} \subseteq H^{1,1}_{\mathbb{R}}(X)$ есть замыкание кэлерова конуса.

Определение 1.3. *Псевдоэффективный конус* $\mathscr{E} \subseteq H^{1,1}_{\mathbb{R}}(X)$ есть конус псевдоэффективных классов, сиречь классов замкнутых положительных (1,1)-потоков. Когда X проективно, это то же самый конус, что и замыкание конуса эффективных классов.

Определение 1.4. *Объёмный конус* $\mathscr{E}^\circ \subseteq H^{1,1}_{\mathbb{R}}(X)$ есть внутренность псевдоэффективного конуса.

Поскольку интеграл кэлерова объёма по комплексному многообразию положителен, имеют место включения $\mathscr{K} \subseteq \mathscr{E}^\circ$ и $\overline{\mathscr{K}} \subseteq \mathscr{E}$, которые, вообще говоря, строгие.

В пространстве $H^{n-1,n-1}_{\mathbb{R}}(X)$ есть два важных конуса.

Определение 1.5. *Псевдоэффективный конус* $\mathscr{N} \subseteq H^{n-1,n-1}_{\mathbb{R}}(X)$ есть конус классов замкнутых положительных $(n-1,\, n-1)$-потоков.

Определение 1.6. *Подвижный конус* $\mathscr{M} \subseteq H^{n-1,n-1}_{\mathbb{R}}(X)$ есть выпуклый конус, порождённый классами вида $\mu_*(\widetilde{\beta}_1 \wedge \cdots \wedge \widetilde{\beta}_{n-1})$, где $\mu\colon \widetilde{X} \to X$ — какая-нибудь гладкая модификация X (сиречь μ есть собственный бирациональный морфизм), а классы $\widetilde{\beta}_i$ кэлеровы на $\widetilde{X}$. Выбор названия основывается на том, что класс кривой принадлежит $\mathscr{M}$, если и только если она принадлежит аналитическому семейству, заметающему X.

Пространства $H^{1,1}_{\mathbb{R}}(X)$ и $H^{n-1,n-1}_{\mathbb{R}}(X)$ связаны *спариванием Пуанкаре* $\alpha.\eta = \int_X \alpha \wedge \eta$. Из этого определения следует, что конус $\mathscr{E}$ содержится в конусе, двойственному к $\mathscr{M}$ (в проективном случае это особенно просто: псевдоэффективные классы содержат положительный замкнутый поток, который интегрируется по подвижной кривой положительным числом).

Определим *решётку Нерона — Севери* как

$$NS(X) = H^{1,1}_{\mathbb{R}}(X) \cap \frac{H^2(X,\mathbb{Z})}{\mathrm{tors}}$$

и *пространство 1-циклов с точностью до численной эквивалентности*

$$N_1(X) = \left(H^{n-1,n-1}_{\mathbb{R}}(X) \cap \frac{H^{2n-2}(X,\mathbb{Z})}{\mathrm{tors}} \right) \otimes \mathbb{R},$$

и положим $\mathscr{E}_{NS} = \mathscr{E} \cap NS(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, а $\mathscr{M}_{NS} = \mathscr{M} \cap N_1(X)$.

Факт 1 (Буксом, Дюмаи, Петернел, Пэун)**.** *На проективном многообразии конуса $\mathscr{E}_{NS}$ и $\mathscr{M}_{NS}$ двойственны посредством спаривания Пуанкаре между $NS(X) \otimes \mathbb{R}$ и $N_1(X)$.*

Ими же была выдвинута гипотеза, утверждающая, что на компактном кэлеровом многообразии (где решётки Нерона — Севери априори нет) сами конусы $\mathscr{E}$ и $\mathscr{M}$ двойственны. Мы докажем эту гипотезу, но только в случае проективного многообразия (когда она всё-таки есть).

1.3 Переформулировка результата Витт-Нюстрёма через сбалансированные метрики

Определение 1.7. Эрмитова метрика называется *сбалансированной*, если её 2-форма ω удовлетворяет условию $d(\omega^{n-1}) = 0$.

Форма ω^{n-1} *сильно положительна* (сиречь равна линейной комбинации произведений положительных (1, 1)-форм с положительными коэффициентами). Обратно, всякая сильно положительная $(n-1,\, n-1)$-форма может быть представлена в виде ω^{n-1} для подходящей эрмитовой метрики. Поэтому конус классов, представленных сильно положительными формами в $H^{n-1,n-1}_{\mathbb{R}}(X)$, называется также *сбалансированным* и обозначается $\mathscr{B}$. Тома доказал для проективных многообразий в 2010 году, а Фу и Сяо — в 2014 для компактных кэлеровых, что конусы $\mathscr{E}$ и $\overline{\mathscr{B}}$ двойственны. Тем самым, мы также докажем, что для проективных многообразий имеет место равенство $\mathscr{M} = \overline{\mathscr{B}}$.

1.4 Объём и трансцендентное неравенство Морзе

Определение 1.8. Пусть $\alpha \in \mathscr{E}$ — псевдоэффективный класс. *Объём* класса α, обозначаемый $\mathrm{vol}(\alpha)$, есть точная верхняя грань всех чисел $\left(\widetilde{\beta}^n\right)$, где $\mu\colon \widetilde{X} \to X$ — модификация, а $\widetilde{\beta}$ — кэлеров класс на $\widetilde{X}$ такой, что $\mu^*(\alpha) - \widetilde{\beta} \in \mathscr{E}$. Если α не псевдоэффективен, положим $\mathrm{vol}(\alpha) = 0$.

Уже сами Буксом, Дюмаи, Петернел и Пэун подмечали, что ихняя гипотеза бы следовала из неравенства на объём разности двух численно эффективных классов α и β, именно,

$$\mathrm{vol}(\alpha - \beta) \geq (\alpha^n) - n\alpha^{n-1}.\beta.$$

Это неравенство называется *трансцендентным неравенством Морзе*. Для $\alpha, \beta \in NS_{\mathbb{R}}(X)$ оно хорошо известно, и, имей его, Буксом, Дюмаи, Петернел и Пэун доказали бы свою гипотезу. Более того, им было известно, что она следует даже из его частного случая для $\beta \in NS_{\mathbb{R}}(X)$. Более того, не так давно Буксом обнаружил, что даже слабой версии этого неравенства

$$\mathrm{vol}(\alpha - \beta) \geq (\alpha^n) - \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \alpha^{n-k}.\beta^k$$

достаточно для доказательства его с Дюмаи, Петернелом и Пэуном гипотезы.

Мы докажем трансцендентное неравенство Морзе для любых классов в $H^{1,1}_{\mathbb{R}}(X)$ в случае, когда многообразие X проективно.

2 Предварительные сведения

2.1 θ-плюрисубгармонические функции

Пускай (X, ω) — компактное кэлерово многообразие, θ — замкнутая гладкая вещественная (1, 1)-форма на X, и $\alpha = [\theta] \in H^{1,1}_{\mathbb{R}}(X)$ — её класс когомологий.

Определение 2.1. Функция $u\colon X \to [-\infty, +\infty)$ называется *θ-плюрисубгармонической*, если форма $dd^c u + \theta$ положительна. Иными словами, для гладкого локального потенциала v (т. е. локально $\omega = dd^c v$) функция $u + v$ плюрисубгармонична и не равна тождественно $-\infty$.

Тем самым, $\theta + dd^c u$ есть замкнутый положительный (1, 1)-поток. Обратно, если T — замкнутый положительный (1, 1)-поток в α, то существует θ-псг функция u такая, что $T = \theta + dd^c u$, и такая u единственна с точностью до константы.

Определение 2.2. Функция u есть *строго псг функция*, если она $\theta - \varepsilon\omega$-псг для какого-то положительного ε.

Если θ' — другая замкнутая гладкая $(1, 1)$-форма, когомологичная θ, то по dd^c-лемме существует гладкая функция f такая, что $\theta' - \theta = dd^c f$, так что u θ-псг тогда и только тогда, когда $u - f$ θ'-псг.

Будем обозначать множество θ-псг функций значком $PSH(X, \theta)$.

Определение 2.3. Класс α называется *псевдоэффективным*, если он содержит замкнутый положительный поток.

Заметим, что псевдоэффективность класса $[\theta]$ равносильна непустоте $PSH(X, \theta)$.

Определение 2.4. Класс называется *объёмным*, если для какого-то положительного ε и кэлерова класса β класс $\alpha - \varepsilon\beta$ псевдоэффективен.

Определение 2.5. Говорят, что θ-псг функция *имеет аналитические особенности*, если она может быть локально представлена как

$$c \log \left(\sum_i |g_i|^2 \right) + f,$$

где $c > 0$, $\{g_i\}_i$ — конечное множество локальных голоморфных функций, а f гладкая.

Регуляризационный результат Дюмаи утверждает, что если класс $[\theta]$ объёмен, то существуют θ-псг функции с аналитическими особенностями.

Определение 2.6. Для объёмного класса $\alpha = [\theta]$ будем говорить, что $x \in X$ лежит в *обильном локусе* α (обозначаемом $\mathrm{Amp}(\alpha)$), если существует строго θ-псг функция с аналитическими особенностями, гладкая около x. Дополнение $\mathrm{Amp}(\alpha)$ называется *некэлеровым локусом* и обозначается $E_{nK}(\alpha)$. Некэлеров локус есть собственное аналитическое подмножество X.

Определение 2.7. Говорят, что θ-псг функция *u с минимальными особенностями*, если для всякой $v \in PSH(X, \theta)$ функция $u - v$ органичена снизу.

Используя оболочки, легко видеть, что если θ-псг функции существуют, то существуют и θ-псг функции с минимальными особенностями. Тем не менее, они далеки от того, чтобы быть единственными.

Ясно, что если класс $[\theta]$ объёмен и функция $u \in PSH(X, \theta)$ с минимальными особенностями, то u локально ограничена на $\mathrm{Amp}([\theta])$.

2.2 Меры Монжа — Ампера и положительные пересечения

Ключевым инструментом для нас будут меры Монжа — Ампера, связанные с псг или θ-псг функциями. Их теория была развита в локальном сеттинге Бедфордом и Тейлором, а в геометрическом, на комапктных кэлеровых многообразиях, Буксомом, Эсидьё, Геджем и Зериахи.

Опишем сперва локальную картину. Пусть u — псг функция на области U в $\mathbb{C}^n$. Если u гладкая, мы можем положить $\mathrm{MA}(u) = (dd^c u)^n$. Это положительная мера, называемой *мерой Монжа — Ампера* функции u. Тем не менее, вообще говоря, $dd^c u$ есть поток, а, поскольку умножение потоков обыкновенно плохо определено, выражение $(dd^c u)^n$ может не иметь смысла. В 1982 году Бедфорд и Тейлор показали, что если u локально ограничена, то можно определить $(dd^c u)^n$ индуктивно по закону $(dd^c u)^{k+1} = dd^c(u(dd^c u)^k)$, и $\mathrm{MA}(u) = (dd^c u)^n$ есть положительная мера, называемая всё также мерой Монжа — Ампера функции u.

Также Бедфорд и Тейлор доказали некоторые фундаментальные свойства непрерывности оператора Монжа — Ампера, из которых мы упомянем только одно:

Факт 2. *Пусть $u_k \to u$ — убывающая последовательность псг функций на U, предел которой u локально ограничен (тогда он автоматически псг). Тогда меры Монжа — Ампера $\mathrm{MA}(u_k)$ функций u_k слабо сходятся к мере $\mathrm{MA}(u)$.*

Другое свойство мер Монжа — Ампера, доказанное Бедфордом и Тейлором, состоит в том, что для локально ограниченной псг функции u мера $\mathrm{MA}(u)$ не сосредоточена ни на каких собственных аналитических подмножествах (или, более общо, плюриполярных множествах).

Перейдём теперь к глобальной картинке, впервые исследованной Геджем и Зеирахи в 2005 — 2007 годах, и впоследствие проработанной Буксомом, Эсидьё, Геджем и Зериахи в 2010 году.

Пусть θ — замкнутая гладкая вещественная $(1,1)$-форма на компактном кэлеровом многообразии X, и допустим, что класс $[\theta] \in H^{1,1}_{\mathbb{R}}(X)$ объёмный. Если u есть θ-псг функция с минимальными особенностями, она локально ограничена на $\mathrm{Amp}([\theta])$, и мы можем определить (неплюриполярную) меру Монжа — Ампера функции u (по θ) как $\mathrm{MA}_\theta(u) = \chi_{\mathrm{Amp}([\theta])}(dd^c u+\theta)^n$. Как и в локальном случае, $\mathrm{MA}_\theta(u)$ не сосредоточена на собственных аналитических подмножествах.

Более общо, Буксом, Эсидьё, Гедж и Зериахи показали, что для всякого $1 \le p \le n$ можно определить положительный поток $\langle (dd^c u + \theta)^p \rangle = \chi_{\mathrm{Amp}([\theta])}(dd^c u + \theta)^p$, который замкнут по теореме Сколы — Эль-Мира — Сибони[1].

[1]Замкнутый положительный поток на дополнении до замкнутого полного плюриполярного множества остаётся замкнутым, будучи продолжен в это множество

Из статьи Буксома, Эсидьё, Геджа и Зериахи следует такой результат:

Факт 3. *Если $[\theta]$ — объёмный класс, то, если выбирать $u \in PSH(X, \theta)$ с минимальными особенностями, класс когомологий потока $\langle (dd^c u + \theta)^p \rangle$ не зависит от выбора u. Будем обозначать этот класс за $\langle [\theta]^p \rangle$. Для $p = n$ имеем $\langle [\theta]^n \rangle = \mathrm{vol}([\theta])$, сиречь $\mathrm{vol}(\alpha) = \int_X \mathrm{MA}_\theta(u)$.*

Также нам понадобится следующий результат Буксома 2002 года, основанный на статье Дюмаи с Пэуном 2004 года.

Факт 4. *Пускай α_k — последовательность объёмных классов, сходящаяся ко классу α. Если $\limsup_{k\to+\infty} \mathrm{vol}(\alpha_k) > 0$, то класс α объёмен.*

Итак, функция объёма непрерывна на всём $H^{1,1}_{\mathbb{R}}(X)$.

2.3 Регулярность оболочек

Следующую теорему доказали Берман и Дюмаи в 2012 году.

Факт 5. *Пусть θ — занкнутая гладкая (1, 1)-форма на компактном кэлеровом многообразии (X, ω). Допустим, что класс $[\theta]$ объёмен, и ψ_0 — строго θ-псг функция с аналитическими особенностями. Определим $\varphi = \sup\{\psi \le 0 \colon \psi \in PSH(X, \theta)\}$, и $D = \{x \colon \varphi(x) = 0\}$. Тогда $\varphi \in PSH(X, \theta)$ имеет минимальные особенности, и для каких-то констант C и B имеет место $|dd^c\varphi|_\omega \le C(|\psi_0| + 1)^2 e^{B|\psi_0|}$. В таком случае $\mathrm{MA}_\theta(\varphi) = \chi_D \theta^n$, и $\mathrm{vol}([\theta]) = \int_X \mathrm{MA}_\theta(\varphi) = \int_D \theta^n$.*

Нам понадобится только случай, когда $[\theta]$ кэлерова, тогда ψ_0 может быть выбрана гладкой. В этом случае более простое доказательство дал Берман в 2013 году.

Если f — гладкая функция, то можно также рассмотреть её оболочку $\varphi_f = \sup\{\psi \le f \colon \psi \in PSH(X, \theta)\}$. Легко видеть, что $\varphi_f - f = \sup\{\psi \le 0 \colon \psi \in PSH(X, \theta + dd^c f)\}$, тем самым, по теореме Бермана — Дюмаи имеет место тождество $\mathrm{vol}([\theta]) = \int_X \mathrm{MA}_\theta(\varphi_f) = \int_{D_f} \theta^n$, где $D_f = \{x \colon \varphi_f(x) = f(x)\}$.

3 Доказательство слабого неравенства Морзе

Пусть θ и ω — две кэлеровы формы на X, причём класс $[\theta - \omega]$ объёмный, а ω есть форма кривизны эрмитовой метрики h на очень обильном линейном расслоении L, а $s \in \Gamma(L, X)$, причём $g = \log |s|^2_h \le 0$. Имеем $dd^c g + \omega = [Y]$, где Y — геометрическое место точек, в которых сечение s зануляется.

тривиально.

Предложение 3.1. *Если $v \in PSH(X, \theta - \omega)$, то $v + g \in PSH(X, \theta)$. Обратно, если $u \in PSH(X, \theta)$ и функция $u - g$ ограничена сверху, то $u - g$ продолжается на Y до $(\theta - \omega)$-псг функции.*

Доказательство. Если $v \in PSH(X, \theta - \omega)$, то $dd^c(v + g) + \theta = dd^c v + [Y] - \omega + \theta \geq dd^c v + (\theta - \omega) \geq 0$. Обратно, если $u \in PSH(X, \theta)$ на $X \setminus Y$, то, поскольку на этом многообразии имеет место тождество $dd^c g = -\omega$, имеем $dd^c(u - g) + (\theta - \omega) = dd^c u + \theta \geq 0$. Если функция $u - g$ ограничена сверху, то она продолжается на Y как $(\theta - \omega)$-псг функция. $\square$

Пусть $|\cdot|_{reg}$ — сглаженный модуль, и положим $\max_{reg}(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|_{reg})$. Также положим $g_R = \max_{reg}(g, -R)$. Поскольку $g \in PSH(X, \omega)$, $-R \in PSH(X, \omega)$, а функция $\max_{reg}$ выпукла, имеем $g_R \in PSH(X, \omega)$. Кроме того, при $R \to +\infty$ последовательность g_R убывает.

Теперь положим $\varphi_R = \sup\{\psi \leq g_R \colon \psi \in PSH(X, \theta)\}$ и $D_R = \{x \colon \varphi_R(x) = g_R(x)\}$. Поскольку φ_R ограничена снизу $-R$, а сверху g (в частности, имеет минимальные особенности), по теореме Бермана — Дюмаи имеем $([\theta]^n) = \mathrm{vol}([\theta]) = \int_X \mathrm{MA}_\theta(\varphi_R)$ и $\mathrm{MA}_\theta(\varphi_R) = \chi_{D_R}(\theta + dd^c g_R)^n$. Поскольку последовательность g_R убывает, то и последовательность φ_R убывает, так что функция $\varphi_\infty = \lim_{R \to +\infty} \varphi_R$ будет θ-псг, если только она не равна тождествено $-\infty$.

Предложение 3.2. *Функция φ_∞ не равна тождественно $-\infty$, а функция φ_∞ является $(\theta - \omega)$-псг с минимальными особенностями.*

Доказательство. Пусть $v \in PSH(X, \theta - \omega)$ имеет минимальные особенности. Можно считать, что $v \leq 0$. Тогда, в силу предложения 3.1, имеем $v + g \in PSH(X, \theta)$. Заметим, что $v + g \leq g \leq g_R$ для любого R. Значит, $v + g \leq \varphi_R$ для всех R, откуда $v + g \leq \varphi_\infty$. Следовательно, φ_∞ не равна тождественно $-\infty$. Согласно второй части предложения 3.1, имеет место включение $\varphi_\infty - g \in PSH(X, \theta - \omega)$, и, поскольку $\varphi_\infty - g \geq v$, а v имеет минимальные особенности, функция $\varphi_\infty - g$ также имеет минимальные особенности. $\square$

Предложение 3.3. *Слабое неравенство Морзе*

$$\mathrm{vol}(\alpha - \beta) \geq (\alpha^n) - \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{k} \alpha^{n-k}.\beta^k$$

имеет место в случае, когда $\beta \in NS(X) \otimes \mathbb{R}$, а класс $\alpha - \beta$ объёмен.

Доказательство. Лучи, проходящие через первые классы Черна очень обильных линейных расслоений, плотны в $NS(X) \otimes \mathbb{R}$, так что, в силу непрерывности и однородности объёма, можно, чуть-чуть шевеля α и особенно β, а также перешкалируя картинку, полагать, что $\alpha \in \mathscr{K}$, а также $\beta = c_1(L)$ для какого-то очень обильного линейного расслоения L

(в частности, $\beta \in \mathscr{K}$). Выберем кэлеровы формы: θ в классе α, а ω — в классе β. Примем обозначения, введённые выше.

По теореме Буксома — Эсидьё — Геджа — Зериахи, имеет место равенство

$$\mathrm{vol}(\alpha-\beta)=\int_X \mathrm{MA}_{\theta-\omega}(\varphi_\infty-g).$$

Вне Y имеет место $dd^cg=-\omega$. Имеем: $\chi_{X\setminus Y}\,\mathrm{MA}_{\theta-\omega}(\varphi_\infty-g)=\chi_{\mathrm{Amp}(\alpha-\beta)\setminus Y}\times (dd^c(\varphi_\infty-g)+\theta-\omega)^n=\chi_{\mathrm{Amp}(\alpha-\beta)\setminus Y}(dd^c\varphi_\infty+\theta)^n=\chi_{\mathrm{Amp}(\alpha-\beta)\setminus Y}\,\mathrm{MA}_\theta(\varphi_\infty)$. Поскольку меры Монжа — Ампера не сосредоточены на собственных аналитических подмножествах, отсюда следует равенство $\mathrm{MA}_{\theta-\omega}(\varphi_\infty-g)=\mathrm{MA}_\theta(\varphi_\infty)$. Следовательно, имеют место равенства $\mathrm{vol}(\alpha-\beta)=\int_X \mathrm{MA}_{\theta-\omega}(\varphi_\infty-g)=\int_X \mathrm{MA}_\theta(\varphi_\infty)$.

Функция φ_∞ локально ограничена на $\mathrm{Amp}(\alpha-\beta)\setminus Y$. По теореме Бедфорда — Тейлора, меры $\mathrm{MA}_\theta(\varphi_R)$ слабо сходятся на $\mathrm{Amp}(\alpha-\beta)\setminus Y$ к $\mathrm{MA}_\theta(\varphi_\infty)$. Выбирая достаточно большое открытое множество U такое, что $\overline{U}\subseteq(\mathrm{Amp}(\alpha-\beta)\setminus Y)$, имеем: $\mathrm{vol}(\alpha-\beta)=\int_X \mathrm{MA}_\theta(\varphi_\infty)\geq \int_{\overline{U}}\mathrm{MA}_\theta(\varphi_\infty)\geq \lim_{R\to+\infty}\int_U \mathrm{MA}_\theta(\varphi_R)$. Поскольку $\int_X \mathrm{MA}_\theta(\varphi_R)=(\alpha^n)$, последнее неравенство может быть переписано как $\mathrm{vol}(\alpha-\beta)\geq(\alpha^n)-\lim_{R\to+\infty}\int_{X\setminus U}\mathrm{MA}_\theta(\varphi_R)=(\alpha^n)-\lim_{R\to+\infty}\int_{D_R\cap(X\setminus U)}(\theta+dd^cg_R)^n$.

Поскольку $g_R\in PSH(X,\omega)$ для всех значений R, имеет место оценка $\chi_{D_R}(\theta+dd^cg_R)^n\leq(\theta+dd^cg_R+\omega)^n=\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}\theta^{n-k}\wedge(dd^cg_R+\omega)^k$. Все слагаемые в сумме справа — положительные меры, так что

$$\int_{D_R\cap(X\setminus U)}(\theta+dd^cg_R)^n\leq\int_{X\setminus U}\theta^n+\sum_{k=1}^n\binom{n}{k}\int_X\theta^{n-k}\wedge(dd^cg_R+\omega)^k=$$
$$=\int_{X\setminus U}\theta^n+\sum_{k=1}^n\binom{n}{k}\alpha^{n-k}.\beta^k.$$

Поскольку имеет место неравенство

$$\mathrm{vol}(\alpha-\beta)\geq(\alpha^n)-\lim_{R\to+\infty}\int_{D_R\cap(X\setminus U)}(\theta+dd^cg_R)^n,$$

из предыдущей оценки следует, что

$$\mathrm{vol}(\alpha-\beta)\geq(\alpha^n)-\int_{X\setminus U}\theta^n-\sum_{k=1}^n\binom{n}{k}(\alpha^{n-k}.\beta^k).$$

В силу произвола в выборе U и того, что θ^n — форма объёма, имеем слабое неравенство Морзе. □

Предложение 3.4. *Слабое неравенство Морзе*

$$\mathrm{vol}(\alpha-\beta)\geq(\alpha^n)-\sum_{i=1}^n\binom{n}{k}\alpha^{n-k}.\beta^k$$

для случая, когда $\beta\in NS(X)\otimes\mathbb{R}$.

Доказательство. Не ограничивая общности, можно полагать, что $(\alpha^n) - \sum_{k=1}^n \binom{n}{k}\alpha^{n-k}.\beta^k > 0$, поскольку иначе неравенство очевидно.

Пусть $t_0 = \sup\{t \in [0,1] \colon \text{class } \alpha - t\beta \text{ obòeomnyj}\}$. Имеем $\mathrm{vol}(\alpha - t_0\beta) = \lim_{t\to t_0} \mathrm{vol}(\alpha - t\beta) \geq (\alpha^n) - \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} t_0^k \alpha^{n-k}.\beta^k \geq (\alpha^n) - \sum_{k=1}^n \alpha^{n-k}.\beta^k > 0$. Стало быть, класс $\alpha - t_0\beta$ объёмен, и $t_0 = 1$. В силу предыдущего предложения, это влечёт слабое неравенство Морзе. $\square$

4 Доказательство гипотезы Буксома — Дюмаи — Петернела — Пэуна

Мы приведём только план доказательства, не вдаваясь в детали.

Итак, что мы имеем:

Предложение 4.1 (Витт-Нюстрём)**.** *Пусть X — проективное многообразие, α — численно эффективный (1, 1)-класс, β — численно эффективный класс в $NS(X) \otimes \mathbb{R}$. Имеет место неравенство*

$$\mathrm{vol}(\alpha - \beta) \geq (\alpha^n) - \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (\alpha^{n-k}.\beta^k).$$

Мы выведем отсюда для проективных многообразий (сильное) неравенство Морзе и гипотезу Буксома — Дюмаи — Петернела — Пэуна.

Предложение 4.2. *Следующие свойства компактного кэлерова многообразия X эквивалентны:*

1. *Ортогональность: для всякого объёмного класса $\alpha \in H^{1,1}_{\mathbb{R}}(X)$ имеет место равенство $\mathrm{vol}(\alpha) = \alpha.\langle\alpha^{n-1}\rangle$ (где $\langle\alpha^{n-1}\rangle$ — поток Эсидьё — Буксома — Геджа — Зериахи).*

2. *Дифференцируемость: для всякого объёмного класса $\alpha \in H^{1,1}_{\mathbb{R}}(X)$ и всякого $\gamma \in H^{1,1}_{\mathbb{R}}(X)$ имеет место равенство $\frac{d}{dt}|_{t=0} \mathrm{vol}(\alpha + t\gamma) = n\gamma.\langle\alpha^{n-1}\rangle$.*

Они также влекут (сильное) неравенство Морзе для любых численно эффективных классов, равно как и двойственность конусов $\mathscr{E}$ и $\mathscr{M}$.

Доказательство. Заметим, что свойство дифференцируемости равносильно неравенству $\sqrt[n]{\mathrm{vol}(\alpha)} - \sqrt[n]{\mathrm{vol}(\beta)} \geq \frac{(\alpha-\beta).\langle\alpha^{n-1}\rangle}{\sqrt[n]{\mathrm{vol}(\alpha)}}$. В самом деле, если имеет место дифференцируемость, то, согласно цепному правилу, имеем $\frac{d}{dt}|_{t=0} \sqrt[n]{\mathrm{vol}(\alpha + t\gamma)} = \frac{\gamma.\langle\alpha^{n-1}\rangle}{\mathrm{vol}(\alpha)^{1-\frac{1}{n}}}$. В 2002 году Буксом доказал, что функция $\sqrt[n]{\mathrm{vol}}$ вогнута на объёмном конусе. Неравенство Йенсена для функции $\sqrt[n]{\mathrm{vol}}$ влечёт неравенство $\sqrt[n]{\mathrm{vol}(\alpha)} - \sqrt[n]{\mathrm{vol}(\beta)} \geq \frac{(\alpha-\beta).\langle\alpha^{n-1}\rangle}{\sqrt[n]{\mathrm{vol}(\alpha)}}$. Обратно, из этого неравенства следует неравенство $\frac{t\gamma.\langle\alpha^{n-1}\rangle}{\mathrm{vol}(\alpha)^{1-\frac{1}{n}}} \geq \sqrt[n]{\mathrm{vol}(\alpha + t\gamma)} -$

$\sqrt[n]{\mathrm{vol}(\alpha)} \geq \frac{t\gamma.\langle(\alpha+t\gamma)^{n-1}\rangle}{\mathrm{vol}(\alpha+t\gamma)^{1-\frac{1}{n}}}$ для $|t| \ll 1$. Из трудов Буксома, Фавра и Йонссона следует, что положителные пересечения непрерывны, что выводит из последнего неравенства дифференцируемость.

Поскольку для численно эффективного класса α имеет место $\mathrm{vol}(\alpha) = (\alpha^n)$, дифференцируемость имеет место для численно эффективных объёмных классов.

Теперь выведем из этого соображения утверждение теоремы. Допустим, что ортогональность имеет место. Выберем объёмные классы α и β. По определению положительных чисел пересечения, существует последовательность модификаций $\mu_k \colon X_k \to X$ и кэлеровых классов α_k, β_k на X_k таких, что $\alpha_k \leq \mu_k^*\alpha$ (сиречь разница псевдоэффективна), $\alpha_k \leq \mu_k^*\beta$, $\mathrm{vol}(\alpha_k) \to \mathrm{vol}(\alpha)$, $\mathrm{vol}(\beta_k) \to \mathrm{vol}(\beta)$, и, наконец, $(\mu_k^*\beta.\mu_k^*\alpha) \to \beta\langle\alpha^{n-1}\rangle$. Поскольку дифференцируемость имеет место для численно эффективных классов, имеет место $\sqrt[n]{\mathrm{vol}(\alpha_k)} - \sqrt[n]{\mathrm{vol}(\beta_k)} \geq \frac{(\alpha_k-\beta_k).\alpha_k^{n-1}}{\mathrm{vol}(\alpha_k)^{1-\frac{1}{n}}} \geq \frac{(\alpha_k^n)-(\mu_k^*\beta.\alpha_k^{n-1})}{\mathrm{vol}(\alpha_k)^{1-\frac{1}{n}}}$, поскольку $\beta_k \leq \mu_k^*\beta$, а класс α_k численно эффективен. Переходя к пределу при $k \to +\infty$, имеем $\sqrt[n]{\mathrm{vol}(\alpha)} - \sqrt[n]{\mathrm{vol}(\beta)} \geq \frac{\mathrm{vol}(\alpha)-\beta.\langle\alpha^{n-1}\rangle}{\mathrm{vol}(\alpha)^{1-\frac{1}{n}}}$, откуда, в силу ортогональности, $\mathrm{vol}(\alpha) = \alpha.\langle\alpha^{n-1}\rangle$. Для обратной импликации достаточно применить формулу дифференцирования функции объёма вдоль эйлерова векторного поля.

Теперь допустим, что имеют место и ортогональность, и дифференцируемость. В таком случае для численно эффективных классов имеем $\mathrm{vol}(\alpha-\beta) - (\alpha^n) = -n\int_0^1 \beta.\langle(\alpha-t\beta)^{n-1}\rangle dt \geq -n(\beta.\alpha^{n-1})$, поскольку $\alpha - t\beta \leq \alpha$, а класс β численно эффективен. Значит, выполнено сильное неравенство Морзе.

Осталось понять про двойственность. Мы знаем, что конус $\mathscr{E}$ содержится в конусе, двойственном к $\mathscr{M}$. Значит, достаточно показать, что псевдоэффективный класс α, двойственный классу из внутренности конуса $\mathscr{M}$, объёмен. Для такого класса существует кэлеров класс σ такой, что для всех объёмных классов β на X имеет место неравенство $(\alpha-\sigma).\langle\beta^{n-1}\rangle \geq 0$. Классы $\alpha + \varepsilon\sigma$ объёмны для $\varepsilon > 0$, так что ортогональность влечёт цепочку неравенств $\mathrm{vol}(\alpha+\varepsilon\sigma) = (\alpha+\varepsilon\sigma).\langle(\alpha+\varepsilon\sigma)^{n-1}\rangle \geq \alpha.\langle(\alpha+\varepsilon\sigma)^{n-1}\rangle \geq \sigma.\langle(\alpha+\varepsilon\sigma)^{n-1}\rangle$, откуда, в силу неравенства Тессье — Хованского, имеем $\mathrm{vol}(\alpha+\varepsilon\sigma) \geq \sqrt[n]{(\sigma^n)}\,\mathrm{vol}(\alpha+\varepsilon\sigma)^{1-\frac{1}{n}}$, что влечёт $\mathrm{vol}(\alpha+\varepsilon\sigma) \geq (\sigma^n) > 0$ для всякого $\varepsilon > 0$, откуда по теореме Буксома следует, что класс α объёмен. □

Предложение 4.3. *На проективных многообразиях все объёмные классы удовлетворяют условию ортогональности.*

Доказательство. Пусть α — объёмный (1, 1)-класс. Выберем последовательность проективных модификаций $\mu_j \colon X_j \to X$ и приблизительных разложений Зариски $\mu_j^*\alpha = \alpha_j + E_j$, где E_j — класс эффективного

$\mathbb{Q}$-дивизора, α_j — кэлеров класс на X_k, причём $\langle\alpha^n\rangle = \lim_{j\to+\infty}(\alpha_j^n)$ и $\langle\alpha^{n-1}\rangle = \lim_{j\to+\infty}(\mu_j)_*(\alpha_j^{n-1})$. Ортогональность эквивалентна в таких обозначениях асимптотической ортогональности $\lim_{j\to+\infty}(a_j^{n-1}.E_j) = 0$ (откуда и происходит её название).

Пусть H — класс обильного дивизора на X такой, что класс $H-\alpha$ численно эффективен. Тогда класс $\mu_j^*(H)-E_j = \mu_j^*(H-\alpha)+\alpha_j$ численно эффективен и рационален. Для всякого $t\in[0,1]$ имеем $\alpha_j+tE_j = (\alpha_j + t\mu_j^*(H)) - t(\mu_j^*(H)-E_j) = (\alpha_j+t\mu_j^*(H)) - t(\mu_j^*(H-\alpha)+\alpha_j)$. Отсюда в силу теоремы Витта-Нюстрёма имеем $\mathrm{vol}(\alpha)\geq \mathrm{vol}(\alpha_j+tE_j)\geq ((\alpha_j + t\mu_j^*(H))^n) - nt((\alpha_j+t\mu_j^*(H))^{n-1}.(\mu_j^*(H-\alpha)+\alpha_j)) - \sum_{k=2}^n\binom{n}{k}t^k((\alpha_j + t\mu_j^*(H))^{n-k}.(\mu_j^*(H-\alpha)+\alpha_j)^k)$.

В силу выбора H имеет место $\alpha_j\leq\mu_j^*(H)$, так что для любого набора натуральных чисел k, l, m такого, что $k+l+m=n$, имеет место $0\leq(\alpha_j^k.(\mu_j^*(H))^l.(\mu_j^*(H-\alpha))^m)\leq(H^n)$. Расписывая по частям правую часть предпоследнего равенства, имеем $\mathrm{vol}(\alpha)-(\alpha_j^n)\geq nt(\alpha_j^{n-1}.\mu_j^*(H)) - nt(\alpha_j^{n-1}.(\mu_j^*(H-\alpha)+\alpha_j)) - Ct^2 = nt(\alpha_j^{n-1}.(\mu_j^*\alpha-\alpha_j)) - Ct^2 = nt(\alpha_j^{n-1}.E_j) - Ct^2$, где C — некоторая константа.

Заметим, что $(\alpha_j^{n-1}.E_j)\geq 0$, поскольку формы α_j кэлеровы. Поскольку имеет место равенство $\lim_{j\to+\infty}(\alpha_j^{n-1}.E_j) = (\langle\alpha^{n-1}\rangle.\alpha)-\mathrm{vol}(\alpha)$, последовательность $(\alpha_j^{n-1}.E_j)$ по крайней мере уж ограничена, можно считать, что константой $\frac{2C}{n}$. Положим $t = (\alpha_j^{n-1}.E_j)/\frac{2C}{n}$. Тогда $t\in[0,1]$, так что мы имеем право писать $\mathrm{vol}(\alpha)-(\alpha_j^n)\geq\frac{n^2}{2C}(\alpha_j^{n-1}.E_j)^2 - \frac{n^2(\alpha_j^{n-1}.E_j)^2}{4C}$, откуда $(\alpha_j^{n-1}.E_j)^2\leq\frac{4C}{n^2}(\mathrm{vol}(\alpha)-(\alpha_j^n))$. Поскольку $\lim_{j\to+\infty}(\alpha_j^n)=\mathrm{vol}(\alpha)$, имеем $\lim_{j\to+\infty}(\alpha_j^{n-1}.E_j) = 0$. $\square$

Сочетая это с импликацией 4.2, имеем (сильное) неравенство Морзе, дифференцируемость и двойственность конусов $\mathscr{E}$ и $\mathscr{M}$ для любых проективных многообразий.