# Третьи когомологии: теория Диксмье — Дуади

с 12 декабря 2014

## Содержание



## 1 Теорема Вейля — Костана и теория Черна — Вейля

Хорошо известно, что линейные расслоения над $X$ дают классы в первых когомологиях пучка $\underline{\mathbb{C}^\times}_X$. Связывающий гомоморфизм в точной последовательности когомологий, полученной по экспоненциальной точной последовательности пучков $0 \to \mathbb{Z}[1] \to \underline{\mathbb{C}}_X \xrightarrow{\exp} \underline{\mathbb{C}^\times}_X \to 0$ даёт отображение множества всех линейных расслоений $\mathrm{Pic}(X)$ в $H^2(X, 2\pi i\mathbb{Z})$. Это просто *первый класс Черна* расслоения. В силу того, что пучок $\underline{\mathbb{C}}_X$ вялый по теореме о разбиении единицы, $H^1(X, \underline{\mathbb{C}^\times}_X) = H^2(X, 2\pi i\mathbb{Z})$, это называется *теоремой Вейля — Костана.* Итак, $\mathrm{Pic}(X) = H^2(X, \mathbb{Z})$. Как можно получить этот класс геометрически? ответ даёт *теория Черна — Вейля.* Пусть $\nabla$ — любая связность в расслоении $L$. Тогда её *кривизна* есть замкнутая 2-форма, причём для любых двух связностей их кривизны отличаются на точную форму. Значит, они дают один и тот же класс в когомологиях. Эта конструкция функториальна, так что этот клас в когомологиях есть оттяг такого класса для тавтологического расслоения над $\mathbb{C}P^\infty$ вдоль классифицирующего отображения, и достаточно посчитать этот класс для тавтологического расслоения. Он будет представлен инвариантной 2-формой, пространство которых одномерно; значит, она пропорциональна классу кривизны метрики Фубини-Штуди; значит, первый класс Черна пропорционален классу кривизны любой связности, причём коэффициент пропорциональности всегда одинаков. Посчитаем его для круговой сферы — её кривизна имеет интеграл $4\pi$, а интеграл первого класса Черна — $-2i$. Отсюда $c_1(L) = \frac{1}{2\pi i}[\nabla^2]$. Итак, мы имеем геометрическую интерпретацию вторых когомологий.

Хотелось бы получить аналогичную интерпретацию третьих когомологий, то есть построить геометрические объекты, которые бы ими классифицировались.

## 2 Неабелевы когомологии

При помощи экспоненциальной последовательности пучков отождествим $H^3(X, \mathbb{Z}(1))$ с $H^2(X, \underline{\mathbb{C}^\times}_X)$, где мы рассмотрели пучок непрерывных функций, а не гладких.

Изучение главных расслоений влечёт к теории «неабелевых когомологий». Пусть $X$ — многообразие и $G$ — группа Ли; рассмотрим классы изоморфизмов главных $G$-расслоений $P \xrightarrow{q} X$. Для данного открытого покрытия $\{U_i\}_{i\in I}$ и непрерывных сечений $s_i$ над $U_i$ у нас есть непрерывные функции $U_{ij} \xrightarrow{g_{ij}} G$ такие, что $s_j = s_i g_{ij}$. Эти функции перехода удовлетворяют соотношению $g_{ij} = g_{ij} g_{jk}$ над $U_{ijk}$. Замена сечения $s_i$ на $s_i' = s_i h_i$ приведёт к замене $g_{ij}$ на $h_i^{-1} g_{ij} h_j$.

Для пучка $A$ (неабелевых) групп на $X$ и покрытия $\{U_i\}_{i\in I}$ определим *чеховский 1-коцикл* с коэффициентами в $A$ как семейство $a_{ij} \in \Gamma(U_{ij}, A)$ таких, что

$$a_{ik} = a_{ij} a_{jk}.$$

Далее, два чеховских 1-коцикла *когомологичны*, если существуют сечения $h_i \in \Gamma(A, U_i)$ такие, что

$$a_{ij}' = h_i^{-1} a_{ij} h_j;$$

это определяет отношение эквивалентности на коциклах. Фактор по этому отношению эквивалентности есть когомологии Чеха $\check{H}^1(X, \mathcal{U}, A)$; их обратный предел относительно измельчения покрытия суть когомологии Чеха $\check{H}^1(X, A)$. Классы неабелевых когомологий $H^1(X, \underline{G})$ соответствуют классам эквивалентности главных $G$-расслоений над $X$.

Для точной последовательности пучков групп $1 \to A \to B \to C \to 1$ существует точная последовательность меченых множеств $1 \to H^0(M, A) \to H^0(M, B) \to H^0(M, C) \to H^1(M, A) \to H^1(M, B) \to H^1(M, C)$. Можно получить более сильный результат, согласно которому группа $H^0(M, C)$ действует на множестве $H^1(M, A)$. Именно, пусть $c \in \Gamma(X, C)$, $a_{ij}$ — коцикл со значениями в $A$. Пусть $b_i \in \Gamma(U_i, B)$ таков, что $p(b_i) = c$, и положим $a_{ij}' = b_i^{-1} a_{ij} b_j$. Это другой коцикл со значениями в $A$; его класс когомологий не зависит ото всех выборов. Такое действие $c$ на $a$ будем обозначать $a * c$. Утверждается, что образы $a$ и $a'$ в $H^1(X, B)$ одинаковые, если они лежат в одной $H^0(X, C)$-орбите.

## 3 Расслоения на бесконечномерные алгебы

Рассмотрим частный случай этого, а именно последовательность

$$1 \to Z(R)^* \to R^* \to R^*/Z(R)^* \to 1,$$

где $Z(R)$ — центр алгебры $R$, а $R^*$ обозначает пучок групп обратимых элементов. Если первый пучок централен во втором, то точную последовательность Гротендика можно продолжить членом $H^2(M, A)$. В самом деле, пусть $c_{ij}$ — чеховский 1-коцикл с коэффициентами в $C$ такой, что $c_{ij} = p(b_{ij})$. Тогда $a_{ijk} = b_{ik}^{-1} b_{ij} b_{jk}$ даёт чеховский 2-коцикл с коэффициентами в $A$.

Раз нас интересует $H^2(X, \underline{\mathbb{C}^\times}_X)$, хочется, чтобы центр $R$ был пучком $\underline{\mathbb{C}^\times}_X$. Возьмём тогда пучок алгебр $\underline{L}_X$ с центром $\mathbb{C}$. Оказывается, что оптимальный выбор — взять в качестве $L$ алгебру ограниченных операторов на сепарабельном гильбертовом пространстве $E$. Фактор $L^\times/\mathbb{C}^\times$ есть группа Ли непрерывных автоморфизмов алгебры $\mathcal{K}$ *компактных* операторов на $E$. Иными словами, имеет место точная последовательность групп Ли

$$1 \to \mathbb{C} \to L^\times = \mathrm{Aut}(E) \to G = \mathrm{Aut}(\mathcal{K}) \to 1,$$

которая даёт точную последовательность пучков

$$1 \to \underline{\mathbb{C}^\times}_X \to \underline{L^\times}_X \to \underline{G}_X \to 1.$$

Выбрали $L$ мы таковой по следующей причине:

**Лемма 3.1.** *Группа Ли $L^\times$ стягиваема.*

Отсюда следует мягкость пучка $\underline{L^\times}_X$. В самом деле, пусть $Y$ — замкнутое подмножество, и $f \in \Gamma(\underline{L^\times}_X|_Y)$. Его можно продолжить до сечения над малой открытой окрестностью, в которой мы станем гасить его по теореме о разбиении единицы, чтобы вне этой окрестности сечение стало нулевым. Докажем теперь, что $H^1(X, B) = 1$ для мягкого пучка. Пусть $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ — локально конечное открытое покрытие, и $b_{ij}$ — чеховский 1-коцикл со значениями в $B$. Выберем открытое покрытие $\{Y_i\}_{i\in I}$ такое, что $\overline{Y_i} \subset U_i$. Пусть $S$ — частично упорядоченное множество пар $(J, v)$, где $J \subset I$ и $v = \{v_i\}_{i\in J}$, и $v_i \in \Gamma(\overline{Y_i}, b)$, причём $b_{ij} = v_i v_j^{-1}$. $S$ упорядоченно следующим образом: $(J, v) < (J', v')$, если $J \subset J'$ и $v_i = v'_i$ для всех $i \in J$. Всякая цепь имеет максимальный элемент, так что по лемме Цорна существует максимальный элемент $(J, v) \in S$. Пусть $i \in I \setminus J$, положим $Y = \overline{Y_i} \cap (\cup_{j\in J} \overline{Y_j})$. Коль скоро покрытие $\{U_i\}$ локально конечное, $Y$ — замкнутое подмножеством $X$. Для всякого $j \in J$ имеется сечение $w_j = b_{ij} v_j$ над $\overline{Y_i} \cap \overline{Y_j}$. Если $j, k \in J$, то над $\overline{Y_i} \cap \overline{Y_j Y_k}$ имеет место

$$w_k = b_{ik} v_k = b_{ij} b_{jk} v_k = b_{ij} v_j = w_j.$$

Значит, $w$ — сечение $B$ над $Y$ такое, что на $\overline{Y_i} \cap \overline{Y_j}$ оно ограничивается как $w_i$. Коль скоро пучок $B$ мягок, $w$ может быть продолжено до сечения над $\overline{Y_i}$, что противоречит максимальности. Значит, $J = I$ и коцикл $b_{ij}$ нилькогомологичен.

**Лемма 3.2.** *Пусть $1 \to A \to B \to C \to 1$ — центральная точная последовательность пучков групп. Если пучок $B$ мягок, то $H^1(M, C) \to H^2(M, A)$ — биекция.*

*Доказательство.* Инъективность следует из того, что $H^1(X, B)$. Пусть $\{a_{ijk}\}$ — 2-коцикл с коэффициентами в $A$. Подуменьшим покрытие, и пусть $(J, b)$ — пара, где $J$ — подмножество $I$, $b_{ij} = \Gamma(U_{ij}, C)$ такое, что $b_{ij} b_{jk} = b_{ik} a_{ijk}$ над $\overline{Y_i} \cap \overline{Y_j Y_k}$. Выберем $(J, b)$ максимальным таковым. Если $i \in I \setminus J$, введём упорядоченое множество $T$, состоящее из пар $(K, \widetilde{b})$ таких, что $K \subset J$ и $\widetilde{b} = \{\widetilde{b}_{ik}\}_{k \in K}$, причём $\widehat{b}_{ik} \in \Gamma(\overline{Y_i} \cap \overline{Y_k}, A)$ и $\widehat{b}_{ij} b_{jk} = \widehat{b}_{ik} a_{ijk}$ над $\overline{Y_i} \cap \overline{Y_j} \cap \overline{Y_k}$. Пусть $(K, \widehat{b})$ максимально в $T$, выберем $j \in J \setminus K$. Для данного $k \in K$ существует единственное сечение $\beta_k$ пучка $B$ над $\overline{Y_i} \cap \overline{Y_j} \cap \overline{Y_k}$ такое, что $\beta_k b_{jk} = \widehat{b}_{ik} a_{ijk}$. Тогда над $\overline{Y_i} \cap \overline{Y_j} \cap \overline{Y_k} \cap \overline{Y_l}$ имеет место

$$\beta_l = \widehat{b}_{il} a_{ijl} b_{jl}^{-1} = \widehat{b}_{ik} b_{kl} a_{ikl}^{-1} a_{ijl} b_{jl}^{-1} = \widehat{b}_{ik} b_{jk}^{-1} a_{jkl} a_{ijl} a_{ikl}^{-1}.$$

Из соотношения коцикла для $a$ отсюда следует, что $\widehat{ik} b_{jk}^{-1} a_{ijk} = \beta_k$, так что $\beta_k$ склеивается в сечение $\beta$ пучка $B$ над $\overline{Y_i} \cap \overline{Y_j} \cap (\cup_{k \in K} \overline{Y_k})$. В силу мягкости $B$ можно продолжить $\beta$ до сечения над $\overline{Y_i} \cap \overline{Y_j}$, что противоречит максимальности $K$. Значит, существует семейство $\{\widehat{b}_{ij}\}_{j \in J}$. Собирая $b_{jk}$ для $j, k \in J$, $\widehat{b}_{ji} = \widehat{b}_{ji}^{-1}$ и $\widehat{b}_{ij}$, можно получить элемент $S$ больший, чем $J$. Значит, $J = I$. Чеховский коцикл $c_{ij} = p(b_{ij})$ удовлетворяет соотношению $\delta(c) = a$. □

**Теорема 3.1** (Диксмье — Дуади)**.** *Для группы Ли $G$ автоморфизмов банаховой алгебры $\mathcal{K}$ компактных операторов на сепарабельном гильбертовом пространстве $E$ имеют место естественные биекции*

$$H^1(X, \underline{G}_X) \xrightarrow{\sim} H^2(X, \underline{\mathbb{C}^\times}_X) \xrightarrow{\sim} H^3(X, \mathbb{Z}(1)).$$

Это даёт искомое геометрическое описание $H^3(X, \mathbb{Z}(1))$ — именно, класс там соответствует классу изоморфизма главных $G$-расслоений над $M$. Встаёт естественный вопрос: какая естественная групповая структура на $H^1(X, \underline{G}_X)$, совпадающая с оной на $H^2(X, \underline{\mathbb{C}^\times}_X) = H^3(X, \mathbb{Z}(1))$? Чтобы описать её, зафиксируем изоморфизм $\varphi\colon E \otimes E \xrightarrow{\sim} E$ гильбертовых пространств. Ему соответствует гомоморфизм алгебр $L \times L \xrightarrow{\psi} L$ такой, что $\psi(a, b) = a \otimes b$. Он даёт гомоморфизм групп Ли $L^\times \times L^\times \to L^\times$ и, коль скоро $\mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times \subset L^\times \times L^\times$ отображается в $\mathbb{C}^\times \subset L^\times$, имеется индуцированный гомоморфизм групп Ли $G \times G \xrightarrow{\psi} G$. В свою очередь, он индуцирует отображение на когомологиях $H^1(X, \underline{G}_X) \times H^1(X, \underline{G}_X) = H^1(X, \underline{G}_X \times \underline{G}_X) \to H^1(X, \underline{G}_X)$, который мы будем обозначать $\otimes$. Это, как показывает техническая проверка — та же операция, что сложение коциклов в $H^2(X, \underline{\mathbb{C}^\times}_X)$.

Было бы полезно иметь несколько разных геометрических интерпретаций $H^1(X, \underline{G}_X)$. Перво-наперво, коль скоро $G$ есть группа автоморфизмов $\mathcal{K}$, верна следующая

**Лемма 3.3.** *$H^1(X, \underline{G}_X)$ находится в естественной биекции с множеством классов изоморфизма локально-тривиальных расслоений на алгебры $\mathcal{A} \to X$ со слоем $\mathcal{K}$.*

*Доказательство.* Пусть $c_{ij}$ и $c'_{ij}$ — 1-коциклы на открытом покрытии $\{U_i\}$ с коэффициентами в $\underline{G}_X$. Можно предположить, что $c_{ij} = p(b_{ij})$ для непрерывной функции $U_{ij} \to L^\times$. Тогда 2-коцикл $a_{ijk} = b_{ik}^{-1} b_{ij} b_{jk}$ с коэффициентами в $\underline{\mathbb{C}^\times}_X$ представляет класс когомологий $\delta c$. Тензорное произведение классов в $H^1(X, \underline{G}_X)$ представлено образом в $\underline{G}_X$ коцикла $\gamma_{ij} = b_{ij} \otimes b'_{ij}$. Соответствующий 2-коцикл с коэффициентами в $\underline{\mathbb{C}^\times}_X$ есть $\alpha_{ijk} = (b_{ik} \otimes b'_{ik})^{-1}(b_{ij} \otimes b'_{ij})(b_{jk} \otimes b'_{jk}) = (b_{ik}^{-1} b_{ij} b_{jk}) \otimes (b'_{ik} b'_{ij} b'_{jk}) = a_{ijk} \otimes a'_{ijk} = a_{ijk} a'_{ijk}$. □

Отображение $\mathcal{K} \otimes \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ даёт на $H^1(X, \underline{G}_X)$ ту же групповую структуру.

Другая геометрическая интерпретация привлекает *расслоения на проективные пространства.* В самом деле, группа проективных преобразований $\mathbb{P}(E)$ с топологией равномерной сходимости на ограниченных подмножествах гомеоморфна $G$. Расслоение на сепарабельные проективные пространства со слоем $\mathbb{P}(E)$ над $X$ есть локально-тривиальное расслоение, функции перехода на котором — проективные преобразования. В терминах таких расслоений произведение может быть проинтерпретировано при помощи послойного *алгебраического джойна* двух пространств.

Заметим следующее интересное свойство расслоений на проективные пространства: если можно отыскать такое векторное расслоение, что его проективизация есть данное расслоение на проективные пространства, то оба эти расслоения тривиальны (поскольку множество когомологий $H^1(X, \underline{L}_X)$ тривиальна). Стало быть, препятствие (в $H^2(X, \underline{\mathbb{C}^\times}_X)$) к тривиализации расслоения на проективные пространства есть препятствие к нахождению соответствующего векторного расслоения со слоем $E$.

Самое время построить какие-нибудь нетривиальные примеры $G$-расслоений, чтобы понять, что эта теория не безнадёжно абстрактна. Мы построим расслоение для класса в $H^3(M, \mathbb{Z}(1))$ вида $\alpha \cup \beta$, где $\alpha \in H^1(X, \mathbb{Z})$ и $\beta \in H^2(X, \mathbb{Z}(1))$. Отыщем линейное расслоение, соответствующее классу $\beta$, и снабдим его эрмитовой метрикой, и пусть $Q \to X$ — соответствующее $\mathrm{U}_1$-расслоение. Будем думать об $\alpha$ как о характере $\pi_1(X) \to \mathbb{Z}$; пусть $\widetilde{X} \to X$ — соответствующее накрытие. Тогда $Q \times_X \widetilde{X}$

есть главное $\mathrm{U}_1 \times \mathbb{Z}$-расслоение над $X$. Заметим, что $\mathbb{Z}$ есть группа, двойственная по Понтрягину к $\mathrm{U}_1$. Мы готовы ввести обобщённую группу Хайзенберга в смысле Андре Вейля (центральное расширение локально компактной абелевой группы $K$ при помощи $\mathrm{U}_1$ такое, что коммутатор поднятий реализует изоморфизм между $K$ и $K^\wedge$).

Гильбертово пространство $L^2(\mathrm{U}_1)$ имеет базис $\{z^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, группа $\mathrm{U}_1$ действует на $L^2(\mathrm{U}_1)$ трансляциями. $\mathbb{Z}$ действует на $L^2(\mathrm{U}_1)$ умножением на $z^n$. Это даёт проективное представление $\mathrm{U}_1 \times \mathbb{Z}$. Чтобы получить векторное представление, нужно ввести группу $H = \mathrm{U}_1 \times \mathrm{U}_1 \times \mathbb{Z}$. Определим умножение как

$$(w_1, z_1, n_1)(w_2, z_2, n_2) = (w_1 w_2 z_1^{n_2}, z_1 z_2, n_1 + n_2).$$

Тогда имеется представление $\rho(w, z, n) f(\zeta) = w\zeta^n f(z\zeta)$. Это даёт гомоморфизм групп Ли $H \xrightarrow{\rho} \mathrm{Aut}(E) = L^\times$. Переходя к фактору по центру, получим гомоморфизм групп Ли $\mathrm{U}_1 \times \mathbb{Z} \xrightarrow{\rho} G = L^\times/\mathbb{C}^\times$. Применяя $\rho$ к главному расслоению $Q \times_X \widetilde{X} \to X$, получаем главное расслоение со структурной группой $G$.

**Теорема 3.2.** *Пусть $[Q] \in H^1(X, \underline{\mathbb{C}^\times}_X)$ — класс линейного расслоения, ассоциированного с $Q \to X$, $[S] \in H^1(M, \underline{G}_X)$ — класс построенного $G$-расслоения $S \to M$. Тогда $\delta([S]) \in H^2(X, \underline{\mathbb{C}^\times}_X)$ равен $\alpha \cup [Q]$.*

*Доказательство.* Выберем открытое покрытие $\{U_i\}$ такое, что $\alpha$ представлено 1-коциклом $n_{ij}$ с коэффициентами в $\mathbb{Z}$, и $[Q]$ представлено 1-коциклом $g_{ij}$ с коэффициентами $\underline{\mathbb{C}^\times}_X$. Хорошо известно, что класс $[Q] \cup \alpha$ представлен 2-коциклом $g_{ij}^{n_{jk}}$. С другой стороны, $S$ представлен образом в $\underline{G}_X$ 1-коцикла $(g_{ij}, n_{ij})$ с коэффициентами в $\underline{\mathrm{U}_1 \times \mathbb{Z}}_X$. Соответствующий чеховский коцикл с коэффициентами в $L^\times = \mathrm{Aut}(L^2(\mathrm{U}_1))$ с $u_{ij} = \rho(1, g_{ij}, n_{ij})$. Вычислим чеховскую кограницу $a_{ijk} = u_{ik}^{-1} u_{ij} u_{jk}$ с коэффициентами в $\underline{\mathbb{C}^\times}_X$. Используя соотношения коцикла для $g_{ij}$ и $n_{ij}$, имеем

$$a_{ijk} = \rho(1, g_{ij} g_{jk}, n_{ij} + n_{jk})^{-1} \rho(1, g_{ij}, n_{ij}) \rho(1, g_{jk}, n_{jk}) = g_{ij}^{-n_{jk}}.$$

Значит, класс $\delta([S])$ равен $-[Q] \cup \alpha = \alpha \cup [Q]$. $\square$

# 4 Связности и кривизна

В этой части в качестве $E$ будет служить $C^\infty(\mathrm{U}_1)$. Для $G$-расслоений, построенных выше, хочется определить понятия связности и кривизны такие, что кривизна будет комплекснозначной 2-формой $\Omega$.

...

Итак, рассмотрим алгебру $L^\infty$ непрерывных эндоморфизмов пространства Фреше $E^\infty = C^\infty(\mathbb{S}^1)$. Мы можем ввести группу $(L^\infty)^\times$ обратимых элементов $L^\infty$, но она не открыта в $L^\infty$, так что неясно, есть ли на ней структура группы Ли. Поэтому нам нужна следующая абстрактная ситуация: нам дано центральное расширение групп Ли $1 \to \mathbb{C}^\times \to \widetilde{B} \to B \to 1$ и гладкое линейное действие $\widetilde{B}$ на $E^\infty$ такое, что $\mathbb{C}^\times$ действует умножением на скаляры. Имеется диаграмма центральных расширений алгебр Ли

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathbb{C} & \longrightarrow & \widetilde{\mathfrak{b}} & \longrightarrow & \mathfrak{b} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \big\downarrow \mathrm{Id} & & \big\downarrow & & \big\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathbb{C} & \longrightarrow & L^\infty & \longrightarrow & L^\infty/\mathbb{C} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Рассмотрим главное $B$-расслоение $Q \xrightarrow{p} X$ и связность в этом расслоении. Это $B$-инвариантная 1-форма $\theta$ с коэффициентами в алгебре Ли $\mathfrak{b}$ такая, что векторные поля, которыми алгебра Ли инфинитиземально действует на тотальном пространстве, отправляются туда, откуда они пришли. Теперь мы хотим дифференциально-геометрически измерить препятствие поднятия этого расслоения до $\widetilde{B}$-расслоения (то есть $\widetilde{B}$-расслоения $\widetilde{Q} \xrightarrow{\widetilde{p}} X$ с изоморфизмом $f\colon \widetilde{Q}/\mathbb{C}^\times \xrightarrow{\equiv} Q$ $B$-расслоений над $X$). Выберем поднятие над каким-то открытым $U$ и проанализируем над ним возможные связности. $f$ даёт $B$-эквивариантное отображение $\widetilde{Q} \to Q$; ясно, что $p \circ f = \widetilde{p}$. Связность на $\widetilde{Q}$ есть $\widetilde{B}$-инвариантная форма $\widetilde{\theta}$ с коэффициентами в $\widetilde{\mathfrak{b}}$ с условием, аналогичным указанному выше. Если $q \circ \widetilde{\theta} = f^*\theta$ как формы с коэффициентами в $\widetilde{\mathfrak{b}} = \mathfrak{b}/\mathbb{R}(1)$, будем говорить, что $\widetilde{\theta}$ *согласована* с $\theta$.

**Лемма 4.1.** *Множество согласованных с $\theta$ связностей на $\widetilde{Q} \to U$ есть аффинизация $\Omega^1(X) \otimes \mathbb{C}$.*

Если $\widetilde{\theta}$ согласована с $\theta$, кривизна $\widetilde{\Theta}$ согласована с кривизной $\Theta$ в том смысле, что $q \circ \widetilde{\Theta} = f^*\Theta$. Калибровочное преобразование заменит кривизну на дифференциал соответствующей формы.

Вместо 2-форм с коэффициентами в $\widetilde{\mathfrak{b}}$ нам бы хотелось иметь форму с коэффициентами в числах; с этой целью определим «скалярную компоненту» 2-формы. Для этого нам понадобятся некоторые расслоения, ассоциированные с представлениями $B$. Напомним, что по главному $G$-расслоению $P$ и представлению $G \to \operatorname{Aut} W$ можно построить векторное расслоение $P \times_G W$, слой которого изоморфен $W$. Имеет место точная последовательность представлений $B$ $0 \to \mathbb{C} \to \widetilde{\mathfrak{b}} \to \mathfrak{b} \to 0$, где $B$ действует на $\widetilde{\mathfrak{b}}$ и $\mathfrak{b}$ присоединённо. Это даёт нам точную последовательность расслоений, и кривизна $\Theta$ может быть рассмотрена как форма с коэффициентами в соответствующем расслоении, поскольку она согласована с присоединённым действием $B$.

Чтобы получить скалярную компоненту, нам бы хотелось расщепить эту точную последовательность расслоений. Пусть $Q \xrightarrow{p} X$ — главное $B$-расслоение со связностью $\theta$. Пусть $\mathcal{V}(\widetilde{\mathfrak{b}}) \xrightarrow{l} \mathbb{C}$ — расщепление точной последовательности расслоений $0 \to \mathbb{C} \times X \to \mathcal{V}(\widetilde{\mathfrak{b}}) \to \mathcal{V}(\mathfrak{b}) \to 0$. Тогда *скалярную кривизну* можно определить как 2-форму $K = l \circ \widetilde{\Theta}$, если, конечно, расслоение ограничить на карту.

Мы преуспели в определении скалярной 2-формы $K(\widetilde{\theta})$, ассоциированной с поднятием расслоения $Q|_U$ до $\widetilde{B}$-расслоения $\widetilde{Q} \to U$. Она удовлетворяет тому, чего мы хотели от кривизны — именно, она меняется на точную форму при калибровочных преобразованиях — но она не обязана быть замкнутой 2-формой. Вместо этого выполнено следующее.

**Утверждение 4.1.** *Для всякого главного $B$-расслоения $Q \xrightarrow{p} X$ со связностью $\theta$ и расщепления $\mathcal{V}(\widetilde{b}) \xrightarrow{l} \mathbb{C}$ существует замкнутая комплексная 3-форма $\Omega$ такая, что для всякого $\widetilde{B}$-расслоения $\widetilde{Q} \to U$, локально продолжающего $Q \xrightarrow{p} X$ и согласованной с $\theta$ связности $\widetilde{\theta}$ в нём имеет место $\Omega|_U = dK(\widetilde{\theta})$.*