КР-многообразия и кэлерова структура на пространстве петель

Р. Деев

2014

Содержание

1 Комплексные многообразия

Комплексные многообразия суть многообразия, состоящие из комплексных карт. Их можно воспринимать как *почти комплексные* многообразия, то есть такие, в касательном расслоении к которым есть комплексная структура — оператор I, в квадрате равный -1. Его собственные числа i и $-i$; собственные подпространства у него, конечно, есть только в комплексификации касательного расслоения: $T\otimes\mathbb{C} = T^{1,0}\oplus T^{0,1}$. Сечения такого расслоения, комплексные векторные поля, суть дифференцирования алгебры комплексных функций; комплексные векторные поля, являющиеся сечениями $T^{1,0(0,1)}$ можно воспринимать как дифференцирования, тождественно зануляющиеся на всех (анти)голоморфных функциях (функциях, дифференциал которых коммутирует с комплексной структурой (соответственно, коммутирует с комплексной структурой с обратным знаком)). Конечно, для комплексных многообразий, локально изоморфных шару в $\mathbb{C}^n$, имеет место включение $[T^{1,0}, T^{1,0}] \subseteq T^{1,0}$ — коммутатор двух голоморфных векторных полей сам голоморфен. Тем не менее, на общем почти комплексном многообразии это включение места не имеет, и можно написать оператор, композицию скобки Ли и факторизации по $T^{1,0}$: $\Lambda^2\Gamma(T^{1,0}) \xrightarrow{x\wedge y\mapsto[x,y]} \Gamma(T) \xrightarrow{\cdot/T^{1,0}} \Gamma(T^{0,1})$. Эта композиция линейна над функциями, и потому по теореме Серра — Свана даёт отображение расслоений $\Lambda^2 T^{1,0} \xrightarrow{N_I} T^{0,1}$, называемое *тензором Нейенхёйса.* По вышесказанному, если многообразие комплексное, то $N_I = 0$. Обратное также верно:

Теорема 1.1 (О. Ньюлендер, Л. Ниренберг, 1957). *Если на почти комплексном многообразии (M, I) $N_I = 0$, то на M есть комплексная структура, для которой I — послойное умножение на i.*

Это — трудный факт из теории дифференциальных уравнений. К сожалению, хоть и неудивительно, этот факт верен только для многообразий конечной размерности.

2 КР-многообразия

Возможным обобщением понятия комплексной структуры может быть понятие КР-структуры (по-английски — «CR», аббревиатура одновременно от «Cauchy–Riemann» и «complex-real»). Именно, определим почти КР-многообразие как многообразие M вместе с подрасслоением $B \subseteq TM$, в котором есть оператор I такой, что $I^2 = -1$, и КР-многообразие как почти КР-многообразие, для которого $[B^{1,0}, B^{1,0}] \subseteq B^{1,0}$ (определения эквивалентны таковым для почти комплексных многообразий). Если распределение B интегрируемо, то многообразие M слоится на комплексные многообразия; если же нет — то нет. Его неинтегрируемость исчисляется его *тензором Фробениуса* Φ, который можно определить аналогично тензору Нейенхёйса для любого подрасслоения в касательном, как $\Lambda^2 B \xrightarrow{x \wedge y \mapsto [x,y]} T \xrightarrow{\cdot/B} TM/B$. Поскольку $[B^{1,0}, B^{1,0}] \subseteq B^{1,0}$ и, в силу комплексной сопряжённости, $[B^{0,1}, B^{0,1}] \subseteq B^{0,1}$, форма Фробениуса для КР-многообразия является спариванием между $B^{1,0}$ и $B^{0,1}$, то есть она эрмитова.

Конечно, всякое комплексное многообразие есть КР-многообразие по тривиальным причинам (ведь можно выбрать $B = T$). Другой пример КР-многообразия — вещественная гладкая гиперповерхность M в комплексном многообразии X; здесь $B = TM \cap ITM$. В каждой точке $p \in M$ $B_p = T_p X \cap IT_p M$ есть пересечение двух вещественных пространств коразмерности 1, то есть подпространство коразмерности 2. Оно, конечно, I-инвариантно, в частности, является комплексным подпространством. То, что это не просто почти КР-структура, а даже КР-структура, тоже очевидно. Другой пример КР-структуры — так называемые «трёхмерные твисторы», о которых пойдёт речь ниже.

3 Твисторы

Самый естественный пример, в котором возникают твисторы — это твисторы гиперкэлеровых многообразий. Напомню, что комплексное многообразие с римановой метрикой (M, g, I) называется *кэлеровым*, если $\omega(x, y) = g(Ix, y)$ — замкнутая (следовательно, симплектическая) форма. *Гиперкэлерово* многообразие есть риманово многообразие (M, g), на котором есть три кэлеровых комплексных структуры I, J, K таких, что они удовлетворяют соотношениям Гамильтона на единичные кватернионы, $I^2 = J^2 = K^2 = IJK = -1$. Грубо говоря, это задаёт нам в каждом слое структуру «векторного пространства над кватернионами». Заметим, что в таком случае всякое отображение $aI+bJ+cK$, где $a^2+b^2+c^2 = 1$, является комплексной структурой, то есть комплексные структуры в точке образуют двумерную сферу. Рассмотрим на $M \times \mathbb{S}^2$ следующую почти комплексную структуру: раз $T_{(m,s)}(M \times \mathbb{S}^2) = T_m M \oplus T_s S$, мы имеем право задать почти комплексную структуру на $T_s S$ как стандартную комплексную структуру на двумерном пространстве, а на $T_m M$ зададим её как структуру, соответствующую точке $s \in \mathbb{S}^2 \subsetneq \mathbb{H}$. Эта структура, помимо того, что невероятно красива, ещё и интегрируема — впрочем, это нас не то что бы касалось.

Перейдём к конструкции трёхмерных твисторов. Пусть (M, g) — n-мерное риманово многообразие. Рассмотрим над ним расслоение $\mathrm{Gr}^2_+ \xrightarrow{\varpi} M$, слой которого над каждой точкой состоит из множества ориентированных 2-плоскостей в касательном пространстве к этой точке. Как устроен слой этого расслоения? Пусть $W \subsetneq V$ — 2-плоскостьс фиксированной ориентацией в евклидовом пространстве (или плоскость в псевдоевклидовом пространстве, ограничение формы на которую положительно определено). Тогда в $W \otimes \mathbb{C} \subsetneq V \otimes \mathbb{C}$ есть два вектора с точностью до пропорциональности нулевой длины, скажем, ξ_1 и ξ_2. Заметим, что $\Re\xi_1$ и $\Im\xi_1$ (равно как $\Re\xi_2$ и $\Im\xi_2$) являются базисами в W (задающие разные её ориентации). Сопоставим W тот вектор с точностью до пропорциональности, для которого задаваемая этим базисом ориентация правильная. Обратно, для всякого невещественного вектора с точностью до пропорциональности нулевой длины $\xi \in V \otimes \mathbb{C}$ мы уже построили соответствующую ему вещественную плоскость с ориентацией. Итак, слой над точкой p у такого расслоения изоморфен проективизации множества невещественных векторов нулевой длины в $T_p M \otimes \mathbb{C}$ (в частности, он имеет структуру комплексного многообразия). Какова размерность этого многообразия? Комплексная размерность $T_p M \otimes \mathbb{C}$ равна n, множества векторов нулевой длины — $n-1$ (как нулевого уровня комплекснозначной функции), проективизации этого множества — $n-2$. Стало быть, вещественная размерность слоя — $2n-4$, а тотального пространства — $3n-4$.

На тотальном пространстве кокасательного расслоения есть каноническая *форма Гамильтона*, определяющаяся как $\vartheta(v) = \langle \Pi_{TM} v \| \Pi_{T_{T^*M}} v \rangle$. Её дифференциал — невырожденная 2-форма, обозначим за ω её ограничение на множество векторов нулевой длины $\widehat{N}$. Она определяет отображение $\mathbb{C} \otimes T\widehat{N} \xrightarrow{\omega} \mathbb{C} \otimes T^*\widehat{N}$, которое можно воспринимать как 1-форму с коэффициентами в кокасательном расслоении. Обозначим распределение, состоящее из его ядер, за $\widehat{D}$. Заметим, что эта 1-форма замкнута, то есть $0 = (d\omega)(x, y) = \mathrm{Lie}_x \omega(y) - \mathrm{Lie}_y \omega(x) - \omega([x, y])$; выбирая в качестве x и y любые сечения $\widehat{D}$, имеем, что $\omega([x, y]) = 0$, то есть распределение $\widehat{D}$ инволютивно. Оно, кроме того, не содержит ненулевых вещественных векторов, то есть является $(1, 0)$-частью некоторого КР-распределения на $\widehat{N}$. Коразмерность её, можно проверить, будет равна $n - 2$. Более того, умножение на скаляры сохраняет это распределение, так что оно низводится до распределения в комплексификации TN. Оно определяет КР-структуру на N. Соответствующее подрасслоение в вещественном TN можно описать следующим образом: КР-слой над точкой, соответствующей некоторой 2-плоскости, есть прообраз этой плоскости относительно $d\varpi$. Он представляется в виде суммы касательного пространства к слою (в котором есть комплексная структура, поскольку слой — комплексное многообразие) и этой 2-плоскости (в которой есть ориентация, а, значит, и комплексная структура). Будем обозначать вещественное КР-подрасслоение за H.

4 Пространство петель

На множестве петель в трёхмерном римановом многообразии M (или, более общо, подмногообразий коразмерности два подходящей сигнатуры в псевдоримановом многообразии) можно задать карты, превращающие его в многообразие Фреше. Именно, по теореме о трубчатой окрестности, существует некоторая окрестность $U \supset S$, которая может быть отождествлена с тотальным пространством $\nu_M S$. Таким образом, близкие к S узлы (то есть такие, которые отстоят друг от друга не более, чем на ϵ, и касательные вектора к которым в соответствующих точках отличаются не более, чем на ϵ) получаются при помощи такого отождествления из сечений $\nu_M S$. Но $\Gamma(\nu_M S)$, нормальные поля вдоль узла — пространство Фреше. То есть всё множество узлов покрыто картами с коэффициентами в пространствах Фреше. Переклейки какие-то есть, но позвольте уж мне их не рассматривать. Структура многообразия Фреше определена. Будем обозначать это многообразие за Kn.

Как было сказано выше, $T_S \,\mathrm{Kn} = \Gamma(\nu_M S)$. Пусть ρ_S — единичное поле скоростей вдоль S. Если мы обозначим за ω форму риманова объёма, то мы можем определить умножение $u \times v = (\iota_v \iota_u \omega)^\sharp$. Это — обычное векторное умножение, известное из школьного курса физики. Определим оператор $T\,\mathrm{Kn} \xrightarrow{\mathcal{I}} T\,\mathrm{Kn}$ как $\mathcal{I}v|_S = v|_S \times \rho_S$. Конечно, это почти комплексная структура. Оказывается, она в некотором смысле интегрируема — именно, её тензор Нейенхёйса зануляется. К сожалению, это не влечёт того, что пространство узлов может быть покрыто комплексными картами (более того, это просто неверно). Чтобы доказать интегрируемость, воспользуемся построенным нами пространством твисторов. Именно, пусть $\widehat{\mathcal{S}}_N$ — пространство $n-2$-мерных подмногообразий в N (в нашем случае — узлов в пятимерном пространстве трёхмерных твисторов), трансверсальных вещественной части КР-распределения (напомним, что эта КР-структура имела коразмерность $n-2$). $T_S\widehat{\mathcal{S}}_N = \Gamma(H|_S)$. Оператор КР-структуры, стало быть, задаёт почти комплексную структуру $\widehat{\mathcal{I}}$ на $\widehat{\mathcal{S}}_N$. Оказывается, она формально интегрируема.

Чтобы доказать это, напишем тензор Нейенхёйса $N(v,w) = \widehat{\mathcal{I}}[v,w] - [v,\widehat{\mathcal{I}}w] - [\widehat{\mathcal{I}}v,w] - \widehat{\mathcal{I}}[\widehat{\mathcal{I}}v,\widehat{\mathcal{I}}w]$. Будучи тензором, он принимает какое-либо значение в точке только в зависимости от значений в этой точке векторных полей v и w, так что мы можем выбирать более предпочтительные продолжения для упрощения вычислений. Продолжим v и w до каких-то КР-векторных полей $\hat{v}$ и $\hat{w}$ на всём N. Выберем у $S \in \widehat{\mathcal{S}}_N$ трубчатую окрестность $U \subset N$ и рассмотрим множество подмногообразий S', лежащих в этой окрестности U. Теперь продолжим v и w до векторных полей на $\widehat{\mathcal{S}}_N$ (точнее, на близких к S узлах) как ограничения на каждый из узлов S' полей $\hat{v}$ и $\hat{w}$. Ясно, что $[v,w]$ на $\widehat{\mathcal{S}}_N$ определено полем $[\hat{v},\hat{w}]$, а $\widehat{\mathcal{I}}v$ — полем $I\hat{v}$ (где I — оператор КР-структуры). Тогда тензор Нейенхёйса равен просто $I[\hat{v},\hat{w}] - [\hat{v},I\hat{w}] - [I\hat{v},\hat{w}] - I[I\hat{v},I\hat{w}]$, то есть тензору Нейенхёйса КР-структуры на N. Но это КР-структура, то есть он равен нулю! Стало быть, и почти комплексная структура $\widehat{\mathcal{I}}$ интегрируема.

Для доказательства интегрируемости почти комплексной структуры на узлах в трёхмерном многообразии нужно просто оправить Kn в $\widehat{\mathcal{S}}_N$, отправив узел в его нормальное расслоение. Это отображение, лево обратное к ϖ, а ϖ отображение голоморфное. Осталось только показать, что касательное пространство к образу Kn в $\widehat{\mathcal{S}}_N$ инвариантно относительно $\widehat{\mathcal{I}}$. К сожалению, доказательство Ле-Брюна очень похоже на лажу, так что лучше было бы в это просто поверить.

Ну а по модулю интегрируемости этой структуры то, что она кэлерова, очевидно: над Kn расслоено со слоем U_1 многообразие $\mathrm{Kn}_\bullet$ узлов с отмеченной точкой, которое проецируется на M забвением узла. Кэлерова форма на Kn получается оттягиванием с M на $\mathrm{Kn}_\bullet$ формы объёма с M и последующим низведением её на Kn послойным интегрированием. Очевидно, это та же форма, что и $\omega(x,y) = g(\mathcal{I}x,y)$, а в таком определении её замкнутость очевидна.