(Ко-)КР-кватернионные многообразия и их твисторы

Р. Пантилие (в пересказе Р. Деева)

2011 и 2013 (2015)

Содержание

1 Тривиальности **1**
1.1 Кватернионные пространства 1
1.2 (Ко-)КР-пространства 2
1.3 (Ко-)КР-кватернионные пространства 3

2 Ещё немного геометрии **4**
2.1 Кватернионные многообразия 4
2.2 КР-кватернионные многообразия 5

1 Тривиальности

1.1 Кватернионные пространства

Два морфизма алгебр $A \xrightarrow{\rho,\sigma} B$ назовём *эквивалентными*, если они отличаются на автоморфизм алгебры A. Нас интересует случай, когда A — алгебра кватернионов, а B — эндоморфизмы векторного пространства V. Тогда автоморфизмы A — это группа $\mathrm{SO}(3)$. В таком случае класс эквивалентности морфизмов называется *кватернионной структурой* на векторном пространстве V. Это определение ничем не отличается от определения комплексной структуры на V, кроме того, что алгебра $\mathbb{C}$ имеет только один непостоянный автоморфизм, и никаких дополнительных отождествлений можно не проводить.

Ясно, что кватернионная структура определяется образом единичной сферы Z в $\mathrm{End}(V)$.

Определим теперь кватернионные отображения. Пусть $Z_V \xrightarrow{T} Z_W$ — отображение сфер; тогда отображение $V \xrightarrow{t} W$ называется *кватернионным относительно* T, если $t \circ J = T(J) \circ t$.

В координатах можно проверить, что отображение может быть кватернионно-линейно относительно не более чем одного отображения сфер T, и что такое отображение всегда будет поворотом.

1.2 (Ко-)КР-пространства

Комплексная структура на вещественном векторном пространстве определяется как подпространство в его комплексификации, сопряжённое к которому дополнительно к нему. Дополнительное подпространство — это подпространство, не пересекающееся с данным и дающее в сумме с ним всё пространство. Если отбросить из определения комплексной структуры на векторном пространстве сначала первое, а потом второе условие, мы получим сначала определение КР-структуры, а потом определение ко-КР-структуры. (Ко-)КР-линейное отображение есть отображение, переводящее (ко-)КР-структуру в (ко-)КР-структуру.

Утверждение 1. *Аннигилятор КР-структуры есть ко-КР-структура на двойственном пространстве, и наоборот.*

Пример КР-пространства даётся вещественным подпространством V в комплексном пространстве (E, I), которое расположено достаточно обще (например, которое вещественной коразмерности 1): подпространство $V \cap IV \subset V$ является комплексным подпространством. Этот пример универсален: всякое КР-пространство может быть дополнено до комплексного прибавлением к себе фактора по вещественной части суммы своей КР-структуры с её дополнением. Аналогично по ко-КР-структуре на пространстве V можно построить сюръекцию из векторного пространства с комплексной структурой на V. Значит, ко-КР-структура есть просто структура пространства, на которое общо сюръективно отображается комплексное (например, когда оно вещественной размерности на единичку больше).

Итак, можно дать альтернативное определение.

Определение $(\widetilde{1})$**.** КР-структура на вещественном векторном пространстве U есть пара $((E, I), \iota)$, где $U \xrightarrow{\iota} E$ — вложение, и $\iota(U) + I\iota(U) = E$.

Определение $(\widetilde{2})$**.** Ко-КР-структура на вещественном векторном пространстве U есть пара $((E, I), \rho)$, где $E \xrightarrow{\rho} U$ — сюръекция, и $\ker \rho \cap I \ker \rho = \{0\}$.

В таких определениях КР-отображения суть отображения пространств U и объемлющих пространств E, коммутирующие со вложением, а ко-КР-отображения суть отображения покрывающих пространств E, коммутирующие с сюръекцией.

Почти КР-структура на многообразии есть подрасслоение в комплексификации касательного, не пересекающееся со своим сопряжённым. Она называется *интегрируемой*, если обнуляется её тензор Нейенхёйса. КР-структуры возникают на гиперповерхностях в комплексных многообразиях таким же образом, каким возникает КР-структура на вещественном продпространстве в комплексном. Её тензор Нейенхёса обнуляется автоматически. Аналогично определяется *почти ко-КР-структура*.

1.3 (Ко-)КР-кватернионные пространства

Определение $\widehat{1}$**.** КР-кватернионная структура на вещественном векторном пространстве U есть пара $((E, Z), \iota)$, где $U \xrightarrow{\iota} E$ — вложение, и $\iota(U) + I\iota(U) = E$ для всякой $I \in Z$.

Определение $\widehat{2}$**.** Ко-КР-кватернионная структура на вещественном векторном пространстве U есть пара $((E, Z), \rho)$, где $E \xrightarrow{\rho} U$ — сюръекция, и $\ker\rho \cap I\ker\rho = \{0\}$ для всякой $I \in Z$.

В таких определениях КР-кватернионные отображения относительно преобразования сфер T — это кватернионные отображения объемлющих пространств, коммутирующие со вложением, а ко-КР-кватернионные отображения — кватернионные отображения покрывающих пространств, коммутирующие с покрыванинем.

КАКАЯ-ТО ЛАЖА

Пусть $(U, (E, Z), \iota)$ — КР-кватернионное пространство, и $U^J = \iota^{-1}(E^{1,0_J})$. Аналогично для ко-КР-кватернионного пространства $(U, (E, Z), \rho)$ будем писать $U^J = \rho(E^{1,0_J})$

Предложение. Пусть $(U, (E, Z), \iota)$ и $(U', (E', Z'), \iota')$ — КР-кватернионные векторные пространства. Пусть $U \xrightarrow{t} U'$ — линейное отображение, и $Z \xrightarrow{Z'}$ — отображение. Тогда t КР-кватернионно относительно T тогда и только тогда, когда T — голоморфный диффеоморфизм, и для всякого $J \in Z$ имеет место $t(U^J) \subseteq (U')^{TJ}$. Доказательство. Ясно, что интересна только часть «тогда». Чтобы доказать её, рассмотрим (топологически тривиальное) расслоение $E \times Z \to Z$, где комплексная струкутра над точкой — это и есть сама точка. Для одномерного кватернионного пространства можно проверить, что это расслоение будет изоморфно $2\mathcal{O}(1)$, значит, в случае, когда $\dim_{\mathbb{H}} E = k$, это расслоение будет изоморфно $2k\mathcal{O}(1)$. Теперь рассмотрим в тотальном пространстве этого расслоения КР-подмногообразие $U \times Z$. Итак, по КР-кватернионной структуре мы построили комплексное расслоение с подрасслоением, тотальное пространство которого — КР-многообразие. Если дано отображение КР-кватернионных пространств, то оно даст отображение голоморфных расслоений, значит, определяет комплексно-линейное отображение $E^{\mathbb{C}} \to E'^{\mathbb{C}}$ такое, что его ограничение на U есть в точности исходное отображение КР-кватернионных пространств.

Опишем голоморфную геометрию, связанную с

ОПИШЕМ, ХА-ХА-ХА!

2 Ещё немного геометрии

2.1 Кватернионные многообразия

Говорят, что расслоение обладает кватернионной структурой, если каждый его слой снабжён кватернионной структурой, гладко зависящей от точки. Строго говоря, это означает, что над многообразием задано расслоение на алгебры, изоморфные кватернионам, и вложение этого расслоения в расслоение $\mathrm{End}(V)$. Образ мнимых кватернионов есть некоторое трёхмерное подрасслоение Q_X, сферизация которого есть расслоение на двумерные сферы $Z_X \pi X$, состоящее из допустимых комплексных структур на каждом слое. Почти кватернионная структура на расслоении — это то же самое, что редукция его структурной группы к $\mathrm{Sp}(1) \cdot \mathrm{GL}(m, \mathbb{H})$ (просто по определению этой группы). Кватернионные отображения кватернионных расслоений определено, как и для простых векторных пространств, относительно некого поворота.

Многообразие называется *почти кватернионным*, если в его касательном расслоении зафиксирована кватернионная структура.

Почти кватернионной связностью называется связность, которая переводит сечения Q_X в сечения Q_X. Если она вдобавок не имеет кручения, она называется *кватернионной связностью.*

Определение (3)**.** Многообразие называется *кватернионным*, если в его касательном расслоении определена почти кватернионная структура и кватернионная связность.

Почти кватернионная связность определяет свзяность определяет связность Эресманна в тотальном пространстве расслоения Z_X, то есть касательное пространство к $T_J Z_X$ разлагается в сумму касательного к слою (которое есть линейное пространство) и касательного к X (на котором действует почти комплексная структура J). Итак, на Z_X есть почти комплексная структура.

Теорема (Дмитрий Владимирович Алексеевский, Стефано Маркиафава, Ливиу Орнеа, Раду Пантилие, Массимилиано Понтекорво, Стере Януш)**.** *Эта почти комплексная структура не зависит от выбора почти кватернионной связности и интегрируема тогда и только тогда, когда почти кватернионная связность не имеет кручения.*

Доказательство. Независимость от выбора связности следует из некоторого прямого дифференциально-геометрического вычисления, остальное содержится в трудах упомянутых математиков. □

Это и есть кватернионные твисторы.

2.2 КР-кватернионные многообразия

Определение (4)**.** *Почти КР-кватернионная структура* на многообразии есть кватернионное расслоение, в которое касательное отображается таким образом, что отображение слоёв в каждой точке есть КР-кватернионная структура на касательном пространстве.

Примеры: если на трёхмерном конформном многообразии можно извлечь кубический корень из канонического расслоения, то сумма этого корня с касательным пространством может быть снабжена кватернионной структурой, притом наше многообразие станет почти КР-кватернионным. Кватернионной является гиперповерхность в почти кватернионном многообразии.

Определение (5)**.** Пусть (X, E, ι) — почти КР-кватернионное многообразие. *Почти кватернионная связность* ∇ есть связность на E, сохраняющая Q; если она, ко всему прочему, без кручения, то она называется *кватернионной связностью.*

По почти КР-кватернионному многообразию с почти кватернионной связностью можно построить почти КР-структуру на Z_X точно таким же образом, как мы строили почти комплексную структуру на Z_X для почти кватернионного X.

«Почти твисториальной структурой» на X называют расслоение $P \xrightarrow{\varpi} X$ с комплексным распределением $\mathcal{F}$ на тотальном пространстве таком, что $\mathcal{F} \cup \overline{\mathcal{F}}$ постоянного ранга, которое индуцирует почти комплексные структуры на всех слоях. Она называется *интегрируемой*, если таково определяющее её распределение.

ПОЧТИ ТВИСТОРИАЛЬНО

Напомним, что за T^J мы обозначаем подрасслоение в касательном, дающее КР-структуру, отвечающую точке $J \in Z$.

Утверждение 2 (критерий типа Ньюлендера — Ниренберга)**.** *Почти твисториальная структура на твисторах почти КР-кватернионного многообразия с почти кватернионной связностью* $((M, E, \iota), \nabla)$ *интегрируема тогда и только тогда, когда* $T_\nabla(\Lambda^2 T^J X) \subseteq E^J$ *и* $\nabla^2(\Lambda^2(T^J X))(E^J) \subseteq E^J$*.*

Теорема. *Пусть* (X, E, ι) *— почти кватернионное многообразие,* $\dim_{\mathbb{H}} E = k$*,* $\operatorname{codim}_E X = l$ *(*$0 \leqslant l \leqslant 2k - 1$*). Если* ∇ *— кватернионная связность на* (X, E, ι)*, и* $2k - l \neq 2$*, то почти твисториальная структура пары* $((X, E, \iota), \nabla)$ *интегрируема.*

Доказательство. Если $2k - l = 1$, то T^J одномерно и теорема следует из предыдущего критерия. Будем считать, что $2k - l \geqslant 3$, и заметим, что комплексификация структурной группы E есть $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \cdot \mathrm{GL}(2k, \mathbb{C})$. Стало быть, локально имеет место разложение $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} E = E' \otimes_{\mathbb{C}} E''$, где

E' и E'' — комплексные векторные расслоения рангов 2 и $2k$, а $\nabla^{\mathbb{C}} = \nabla' \otimes \nabla''$, где ∇' и ∇'' суть связности на E' и E'' соответственно.

Сверх того, $Z = P(E')$, так что если $J \in Z_x$ соответствует прямой $[u] \in P(E'_x)$, то собственное пространство J, соответствующее i, есть $\{u \otimes v \mid v \in E''_x\}$. Тогда предположение о кривизне выполняется, если только $R'(\xi, \eta)(u) \in [u]$ для любого ненулевого u из первого пространства и полей ξ и η таких, что их образы относительно ι имеют вид $\{u \otimes v \mid v \in E''_x\}$, где R' — кривизна связности ∇'.

ЧТО-ТО НЕПОНЯТНОЕ $\square$

Чтобы намекнуть на полезность КР-кватернионных твисторов, сформулирую без доказательства следующую теорему.

Теорема. *КР-кватернионная структура на многообразии приходит из вложения в кватернионное многообразие тогда и только тогда, когда приходит из вложения в комплексное многообразие с антиголоморфной инволюцией КР-структура на КР-кватернионных твисторах с антиподальной антиголоморфной инволюцией.*