

МФТИ, ФИВТ, весна 2012.
Вопросы экзаменационных билетов по курсу
Математическая логика и теория алгоритмов.

Д. В. Мусатов, А.Е. Ромащенко.

1. Вычислимость.

- 1.1. Машины Тьюринга. Определение вычислимой функции по Тьюрингу. Тезис Чёрча. Существование невычислимых функций.
- 1.2. Разрешимые и перечислимые множества. Эквивалентность определений перечислимого множества: область определения вычислимой функции, множество значений вычислимой функции, проекция некоторой разрешимого множества $A \subset \mathbb{N}^2$ на первую координату.
- 1.3. Замкнутость разрешимых и перечислимых множеств относительно объединения и пересечения. Теорема Поста о перечислимых и коперечислимых множествах.
- 1.4. Нумерации вычислимых функций. Главные нумерации вычислимых функций. Универсальная машина Тьюринга и универсальная вычислимая функция.
- 1.5. Неразрешимость проблем самоприменимости и остановки.
- 1.6. Теорема Райса–Успенского о неразрешимости нетривиальных свойств вычислимых функций.
- 1.7. Теорема Клини о неподвижной точке (теорема о рекурсии).
- 1.8. Понятие m -сводимости и сводимости по Тьюрингу. Сводимость произвольного перечислимого множества к задаче самоприменимости.
- 1.9. Классы Σ_n и Π_n , их замкнутость относительно объединения и пересечения.
- 1.10. Множества $\mathbf{0}^{(n)}$. Вычисления с оракулом $\mathbf{0}^{(n)}$: разрешимость множеств из Σ_n и перечислимость множеств из Σ_{n+1} .
- 1.11. Теорема об арифметической иерархии.
- 1.12. Машины с битовыми стеками. Теорема об универсальности модели: всякая вычислимая по Тьюрингу функция вычислима некоторой машиной с битовыми стеками.
- 1.13. Бета-функция Гёделя. Лемма о кодировании конечных последовательностей парой натуральных чисел.
- 1.14. Теорема о представлении в формальной арифметике разрешимых множеств. Множество арифметично тогда и только тогда, когда оно представимо в формальной арифметике.

- 1.15. Первая теорема Гёделя о неполноте. Вторая теорема Гёделя о неполноте (без доказательства).
- 1.16. Теорема Тарского о неарифметичности множества истинных арифметических формул.

2. λ -исчисление.

- 2.1. Чистое λ -исчисление: термы, комбинаторы. Преобразование λ -термов: α -конверсии, β -редукции. Определение эквивалентности (равенства) λ -термов, нормальная форма λ -терма. Теорема Чёрча–Россера (без доказательства).
- 2.2. Нумералы Чёрча. Представление в λ -исчислении простейших арифметических операций (прибавление единицы, сложение, умножение).
- 2.3. Логические операции в λ -исчислении. Кодирование пары и комбинатор вычитания единицы.
- 2.4. Комбинатор неподвижной точки. Теорема о неподвижной точке для λ -исчисления. Комбинатор, представляющий функцию факториал.

3. Трансфинитная индукция.

- 3.1. Фундированные множества: эквивалентность трёх определений. Определение вполне упорядоченного множества.
- 3.2. Начальные отрезки вполне упорядоченного множества. Лемма о представлении произвольного начального отрезка в виде полуинтервала $[0, a)$. Лемма об объединении начальных отрезков.
- 3.3. Сравнимость любых двух вполне упорядоченных множеств.
- 3.4. Аксиома выбора. Теорема Цермело: любое множество может быть вполне упорядочено. Сравнимость мощностей любой пары множеств.

Основной список литературы.

1. Верещагин Н.К., Шень А. Лекции по математической логике. Часть 3. Вычислимые функции. – М.: МЦНМО, 1999.
2. Верещагин Н.К., Шень А. Лекции по математической логике. Часть 1. Начала теории множеств. – М.: МЦНМО, 1999.
3. Успенский В.А., Верещагин Н.К., Плиско В.Е. Вводный курс математической логики. М.: Физматлит, 2004.
4. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. М.: Наука, 1984.

5. Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. М.: Физматлит, 2002.
6. Барендрегт Х. Лямбда-исчисление. Его синтаксис и семантика. М.: Мир, 1985.

Дополнительная литература.

1. Булос Дж., Джеффри Р. Вычислимость и логика. М.: Мир, 1994.
2. Клини С. К. Математическая логика. М.: Мир, 1973.
3. Смаллиан Р. Как же называется эта книга? М.: Мир, 1981.

Дополнительные билеты.

1. Неразрешимость проблемы равенства в полугруппах. (см. Н. Верещагин, А. Шень, *Вычислимые функции*).
2. Теорема Мучника–Фридберга о существовании двух перечислимых взаимно несводимых множеств (см. Н. Верещагин, А. Шень, *Вычислимые функции*).
3. Существование нумерации вычислимых функций, в которой каждая функция имеет ровно один номер (см. Н. Верещагин, А. Шень, *Вычислимые функции*).
4. Теорема Чёрча о неразрешимости выводимости в исчислении предикатов. (см. Дж. Булос, Р. Джеффри, *Вычислимость и логика*).
5. Разрешимость арифметики Пресбургера (со сложением, но без умножения). (см. Дж. Булос, Р. Джеффри, *Вычислимость и логика*).
6. Лемма Гильберта–Бернаиса и доказательство второй теоремы Гёделя о неполноте (см. Дж. Булос, Р. Джеффри, *Вычислимость и логика*).
7. Теорема о последовательностях Гудстейна (см. статьи А. Caicedo, *Goodstein's function* или W. Sladel, *The Termite and the Tower: Goodstein sequences and provability in PA*).
8. Доказательство теоремы Чёрча–Россера. (см. Х. Барендрегт, *Лямбда-исчисление. Его синтаксис и семантика*; Henk Barendregt, Erik Barendsen, *Introduction to Lambda Calculus*)
9. Парадокс Банаха–Тарского (см. И. Яценко, *Парадоксы теории множеств*; В.С. Губа, С.М. Львовский, *Парадокс Банаха–Тарского*).
10. Теорема о невозможности разрезать куб на конечное число многогранников, из которых можно было бы сложить правильный тетраэдр. (см. Н. Верещагин, А. Шень, *Начала теории множеств*).

11. Любые два выпуклых множества на плоскости могут быть отделены прямой. (см. Н. Верещагин, А. Шень, *Начала теории множеств*).
12. Равномощность A и $A \times A$ для каждого бесконечного множества A (см. Н. Верещагин, А. Шень, *Начала теории множеств*).