

Функция $U : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ называется *универсальной вычислимой*, если она вычислима (как функция двух аргументов) и для любой вычислимой функции $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ найдётся такое число n , что при всех x выполнено $U(n, x) = \varphi(x)$ (обе части равенства определены для одних и тех же x и на всех x из области определения принимают равные значения).

Машина Тьюринга \mathcal{U} от двух аргументов называется универсальной, если для каждой пары натуральных чисел (n, x) , получив на вход двоичную запись номера программы p_n (n -ой программы в стандартной нумерации машин Тьюринга) и двоичную запись числа x , она возвращает результат работы машины p_n на входе x (если программа p_n не останавливается на входе x , то машина \mathcal{U} на входе (n, x) тоже не останавливается). Формально, $\mathcal{U}(n, x) = p_n(x)$ (обе части равенства одновременно неопределены или одновременно определены и принимают одно и то же значение).

1. Постройте такой многочлен двух переменных $p(x, y)$, что отображение $p : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ является биекцией (значение $p(n, m)$ удобно использовать в качестве “кода” пары $\langle n, m \rangle$).

2. Докажите, что существует такая вычислимая инъекция $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$, что для любых $n, m \in \mathbb{N}$

$$|f(n, m)| \leq 1,01 \cdot (|x| + |y|) + O(1),$$

где $|x|$ обозначает длину двоичной записи числа x . (Функция f является “экономным” кодом пары $\langle n, m \rangle$).

3. Докажите, что универсальная машина Тьюринга вычисляет универсальную вычислимую функцию.

4. При любом фиксированном n функция $V(n, x)$ вычислима как функция от x . Верно ли, что V вычислима как функция двух аргументов?

5. Докажите, что не существует универсальной *тотально вычислимой* функции, т.е. всюду определённой функции $U : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ такой, что для любой всюду определённой вычислимой функции $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ найдётся такое n , что при всех x выполнено $U(n, x) = f(x)$.

6. Докажите, что существует универсальное перечислимое множество, т.е. такое перечислимое множество $W \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, что среди множеств $W \cap (\{i\} \times \mathbb{N})$ встречаются все перечислимые подмножества \mathbb{N} .

7. Существует ли универсальное разрешимое множество, т.е. такое разрешимое множество $S \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, что среди множеств $S \cap (\{i\} \times \mathbb{N})$ встречаются все разрешимые подмножества \mathbb{N} ?

8. Докажите, что существует вычислимая функция, совпадающая с любой другой хотя бы на одном аргументе (в частности, обе могут быть не определены). (Указание: это $U(n, n)$).

Функция f продолжает функцию g , если $f(n) = g(n)$ при всех n , на которых g определена.

9. Докажите, что существует вычислимая функция, не имеющая всюду определённого вычислимого продолжения. (Указание: можно взять $U(n, n) + 1$ или $U(n, n)$).

10. Докажите, что область определения любой вычислимой функции, не имеющей всюду определённого вычислимого продолжения, является перечислимым, но не разрешимым множеством.

11. Докажите, что $\{n \mid U(n, n) \text{ определено}\}$ является перечислимым, но не разрешимым множеством.

12. Докажите, что существует вычислимая функция, не имеющая всюду определённого вычислимого продолжения и принимающая только значения 0 и 1.

13. Докажите, что существуют непересекающиеся перечислимые множества A и B , для которых не существует разрешимого R , такого что $A \subset R$ и $B \cap R = \emptyset$. (Такие множества называются неотделимыми).

14. Докажите, что существует счётное число попарно непересекающихся попарно неотделимых множеств.

15. Докажите, что $\{(n, x) \mid U(n, x) \text{ определено}\}$ является перечислимым, но не разрешимым множеством.

16. Докажите, что $\{n \mid U(n, 0) \text{ определено}\}$ является перечислимым, но не разрешимым множеством.

17. Докажите, что при некоторых n множество $\{x \mid U(n, x) \text{ определено}\}$ является перечислимым, но не разрешимым.

18. Докажите, что множество $\{n \mid U(n, x) \text{ определено при всех } x\}$ не является ни перечислимым, ни коперечислимым.

19. Докажите, что множество $\{n \mid U(n, 0) \text{ определено, а } U(n, 1) \text{ не определено}\}$ не является ни перечислимым, ни коперечислимым.