Московский физико-технический институт
Факультет инноваций и высоких технологий
Математическая логика и теория алгоритмов, весна 2013
Арифметическая иерархия и теорема о неполноте

Пусть $\mathcal{C}$ является некоторым классом (множеством) множеств натуральных чисел. Множество $A$ называется $m$-полным в классе $\mathcal{C}$, если $A \in \mathcal{C}$ и любое множество $B \in \mathcal{C}$ $m$-сводится к $A$. Аналогично, множество $A$ называется полным по Тьюрингу в классе $\mathcal{C}$, если $A \in \mathcal{C}$ и любое множество $B \in \mathcal{C}$ сводится по Тьюрингу к $A$.

**1.** Докажите, что декартово произведение двух множеств из класса $\Sigma_n$ также принадлежит классу $\Sigma_n$.

**2.** Докажите, что объединение и пересечение двух множеств из класса $\Pi_n$ также принадлежат классу $\Pi_n$.

**3.** Докажите, что если $A, B \in \Sigma_n$, то множество $(A \setminus B)$ принадлежит $\Sigma_{n+1} \cap \Pi_{n+1}$.

**4.** Докажите, что всякое $m$-полное в $\Sigma_1$ множество $A$ бесконечно и имеет бесконечное дополнение.

**5.** Докажите, что если множество $A$ является полным по Тьюрингу в $\Sigma_1$, то все множества из $\Pi_1$ также сводятся по Тьюрингу к $A$.

**6.** Приведите пример таких множеств $A, B$, что $A \leq_T B$, но $A \not\leq_m B$.

**7.** Докажите, что если множество $A$ является $m$-полным п в $\Sigma_1$, то не все множества из класса $\Pi_1$ $m$-сводятся к $A$.

**8.** Докажите, что если множество $A$ является $m$-полным п в $\Sigma_2$, то его дополнение $\bar{A}$ является $m$-полным в $\Pi_2$.

**9.** Обозначим $T$ множество всех таких номеров программ для машины Поста, которые останавливаются на любом входе. Докажите, что данное множество $T$ $m$-полно в классе $\Pi_2$.

**10.** Обозначим $F$ множество всех таких номеров программ для машины Поста, которые останавливаются на конечном числе входов. Докажите, что данное множество $F$ $m$-полно в классе $\Sigma_2$.

**11.** Докажите, что для любого $n > 0$ классы $\Sigma_n$ и $\Pi_n$ не свопадают. *Указание:* Воспользуйтесь теоремой об арифметической иерархии, которая гласит, что $\Sigma_n \neq \Sigma_{n+1}$ для всех $n$.

Будем называть *теорией* в языке первого порядка $L$ такое множество замкнутых формул $T$, которое замкнуто относительно логического следования (если формула $\varphi$ выводима в исчислении предикатов из $T$, то $\varphi$ и сама принадлежит $T$).

*Системой аксиом* в языке первого порядка $L$ мы будем называть разрешимое множество формул. Говорят, что формула $\varphi$ языка $L$ *выводима* из данной системы аксиом $\mathcal{A}$ (*доказуема* в данной системе аксиом), если $\varphi$ выводится из $\mathcal{A}$ в исчислении предикатов.

Система аксиом называется *противоречивой*, если из неё можно вывести некоторую формулу $\varphi$ и её отрицание $\neg\varphi$. В противном случае система аксиом называется *непротиворечивой*.

*Системой аксиом* $\mathcal{A}$ в языке первого порядка $L$ называется *полной*, если для любой замкнутой формулы $\varphi$ языка $L$ либо сама $\varphi$, либо её отрицание $\neg\varphi$ выводима из $\mathcal{A}$.

**12.** Докажите, что все общезначимые формулы выводятся из любой системы аксиом.

**13.** Докажите, что из противоречивой системы аксиом можно вывести любую формулу языка.

**14.** Рассмотрим некоторую интепретацию языка первого порядка $L$ и множество $T$ замкнутых формул языка, истинных в данной интепретации. Докажите, что $T$ является теорией.

**15.** Пусть некоторая система аксиом непротиворечива и полна. Докажите, что множество всех замкнутых формул, выводимых из данной системы аксиом, разрешимо.

**16*.** Рассмотрим теорию $(\mathbb{Q}, \leq)$ (теория линейного порядка на множестве рациональных чисел — множество всех истинных формул данной интерпретации). Докажите, что данная теория имеет конечную аксиоматизацию: существует конечная система аксиом $A$, из которой выводятся все истинные замкнутые формулы данной теории и не выводится ни одной ложной формулы. *Указание:* В качестве системы аксиом нужно взять аксиомы плотного линейного порядка без максимального и минимального элемента. В доказательстве воспользуйтесь тем, что (1) любая непротиворечивая система аксиом имеет счетную модель, и (2) все счётные модели теории плотного линейного порядка без максимального и минимального элемента непротиворечивы.

**17.** (а) Докажите, что арифметично множество таких пар $(n, m)$, что $m = n!$. (б) Докажите, что арифметично множество таких пар $(n, m)$, что $m$ является $n$-ым по счёту простым числом.

На лекциях мы описали процедуру, которая позволяет для каждой машины Поста $\pi$ построить в языке формальной арифметики такую формулу $\varphi_\pi(x)$ (с единственной свободной переменной $x$), что $\pi$ останавливается на входе $n$, если и только если $\varphi_\pi$ истинна при подстановке $n$ вместо параметра $x$.

**18.** Рассмотрим отображение $F : \pi \mapsto \pi'$, которое каждой программе $\pi$ сопоставляет следующую программу $\pi'$:

> `На входе` $n$
> `1. перечисляем все выводы в системе аксиом` $PA$ пока
> `не найдём доказательство` $\neg\varphi_\pi(\bar{n})$ `для` $\bar{n} = \underbrace{S(S(\ldots S(}_{n}0)))$
> `2. останавливаемся и выдаём значение` $1$

Теорема Клини о неподвижной точке гарантирует, что для данного отображения найдется программа $\pi_0$, которая эквивалентна $F(\pi_0)$. Останавливается ли такая программа $\pi_0$ на входе 0? Можно ли вывести из аксиом Пеано утверждение $\varphi_{\pi_0}(0)$ или $\neg\varphi_{\pi_0}(0)$?

**19.** Докажите, что существует такая непротиворечивая система аксиом для языка формальной арифметики, из которой выводятся некоторые ложные (в стандартной модели) формулы.

**20.** Докажите, что в языке формальной арифметики существует бесконечно много истинных (в стандартной интерпретации), но не выводимых из аксиом Пеано замкнутых формул.

**21.** Докажите, что множество $T$ всех истинных (в стандартной интерпретации) замкнутых формул формальной арифметики не является перечислимым.

**22$^*$.** Докажите, что множество $T$ всех истинных (в стандартной интерпретации) замкнутых формул формальной арифметики не лежит в классе $\Sigma_2$. *Указание:* Воспользуйтесь теоремой об арифметической иерархии.