

Московский физико-технический институт
Факультет инноваций и высоких технологий
Математическая логика и теория алгоритмов, весна 2013
Свойства m -сводимости

Будем говорить, что множество $A \subset \mathbb{N}$ m -сводится к множеству $B \subset \mathbb{N}$ (обозначение: $A \leq_m B$), если существует такая вычислимая всюду определенная функция $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, что

$$x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B.$$

Пусть \mathcal{C} — некоторый класс подмножеств \mathbb{N} . Говорят, что A является m -полным в \mathcal{C} , если $A \in \mathcal{C}$ и для любого $B \in \mathcal{C}$ выполнено $B \leq_m A$.

1. Докажите, что любое множество A m -сводится к самому себе.
2. Докажите, что если $A \leq_m B$ и $B \leq_m C$, то $A \leq_m C$.
3. Докажите, что если $A \leq_m B$, то $(\mathbb{N} \setminus A) \leq_m (\mathbb{N} \setminus B)$.
4. Докажите, что всякое разрешимое множество A сводится к любому множеству $B \subset \mathbb{N}$ кроме (быть может) \mathbb{N} и пустого множества.
5. Докажите, что если $A \leq_m B$ и B разрешимо, то A тоже разрешимо.
6. Докажите, что если $A \leq_m B$ и B перечислимо, то и A перечислимо.
7. Приведите пример множества A , которое не сводится к своему дополнению.
8. Обозначим

$$S = \{ \langle n, m \rangle \mid \text{машина Поста } p_n \text{ останавливается на входе } m \}$$

($\langle n, m \rangle$ обозначает код пары натуральных чисел n, m при некотором вычислимом кодировании). Докажите, что S является m -полным множеством в классе всех перечислимых множеств.

9. Обозначим

$$K = \{ n \mid \text{машина Поста } p_n \text{ останавливается на входе } n \}.$$

Докажите, что K также является m -полным множеством в классе всех перечислимых множеств.

10. Рассмотрим следующие множества номеров машин Поста:

- a) номера машин, которые останавливаются на собственном номере;
 - b) номера машин, которые останавливаются на любом входе;
 - c) номера машин, которые не останавливаются ни на одном входе;
 - d) номера машин, которые останавливаются на бесконечном множестве входов;
 - e) номера машин, которые останавливаются на всех числах из некоторой арифметической прогрессии;
 - f) номера машин, которые вычисляют некоторую биекцию $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.
- (a) Какие из множеств (a)–(f) перечислимы?
 - (б) Какие из этих множеств коперечислимы (являются дополнением перечислимого)?
 - (в) Для каждой пары множеств (a)–(f) установите, какое из множеств m -сводится к другому.