

Московский физико-технический институт  
Факультет инноваций и высоких технологий, ПМИ  
Математическая логика и теория алгоритмов, весна 2014  
Задачи для работы над ошибками к контрольной работе номер 2.

1. (а) Существует ли невычислимая функция с конечной областью определения?  
(б) Может ли композиция двух вычислимых всюду определённых функций  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  и  $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  быть невычислимой?  
(в) Может ли сумма  $f + g$  двух вычислимых всюду определённых функций  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  и  $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  быть невычислима?  
(г) Существует ли невычислимая функция  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , множество всех значений которой состоит из единственного числа  $n \in \mathbb{N}$ ?  
(д) Может ли подмножество неразрешимого множества быть разрешимым?  
(е) Может ли подмножество разрешимого множества быть неразрешимым?  
(ж) Во всяком ли множестве натуральных чисел есть разрешимое подмножество?
2. (а) Известно, что множество  $A \subset \mathbb{N}$  перечислимо. Докажите, что множество  $S$ , состоящее из всевозможных конечных сумм элементов  $A$

$$a_{i_1} + a_{i_2} + \dots + a_{i_k}$$

(все  $a_i$  являются элементами  $A$ ) также перечислимо.

- (б) Докажите, что пересечение разрешимого и перечислимого множеств является перечислимым.
- (в) Пусть множество  $A \subset \mathbb{N}$  перечислимо, а  $B \subset \mathbb{N}$  разрешимо. Докажите, что  $A \setminus B$  перечислимо.
- (г) Известно, что множество  $A \subset \mathbb{N}$  перечислимо. Докажите, что множество всех простых чисел, являющихся элементами множества  $A$ , также перечислимо.
- (д) Известно, что множество  $A \subset \mathbb{N}$  разрешимо. Докажите, что множество всех кратных всех элементов множества  $A$  разрешимо.
- (е) Известно, что множество  $A \subset \mathbb{N}$  разрешимо. Докажите, что множество всех делителей всех элементов множества  $A$  перечислимо.
- (ж) Диофантовым уравнением называется уравнение вида  $P(x_1, \dots, x_n) = 0$ , где  $P(x_1, \dots, x_n)$  есть многочлен с целыми коэффициентами. Докажите, что для любого диофантового уравнения множество всех (целочисленных) решений является перечислимым.

3. Пусть  $U(n, x)$  является главной универсальной вычислимой функцией.

- (а) Докажите, что найдётся такое число  $n$ , что  $U(n, x) = \text{НОД}(n, x)$  (наибольший общий делитель  $n$  и  $x$ ) для всех  $x \in \mathbb{N}$ .
- (б) Докажите, что найдётся такое число  $n$ , что

$$U(n, x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0, \\ U(n, U(n, x - 1)) + 2, & \text{иначе;} \end{cases}$$

вычислите  $U(n, 10)$  для такого  $n$ .

(в) Докажите, что найдётся такое число  $n$ , что

$$U(n, x) = \begin{cases} U(n, U(n, x + 1)), & \text{если } x \leq 10, \\ x + 3, & \text{иначе;} \end{cases}$$

вычислите  $U(n, 10)$  для такого  $n$ .

(г) Докажите, что найдётся такое число  $n$ , что

$$U(n, x) = \begin{cases} U(n, U(n, x + 3)), & \text{если } x \leq 20, \\ x - 2, & \text{иначе;} \end{cases}$$

вычислите  $U(n, 10)$  для такого  $n$ .

(д) Докажите, что существует набор попарно различных программ  $\pi_i$ ,  $i = 0, \dots, 99$  на языке C (или на языке Python) таких, что каждая программа  $\pi_i$  на входе  $j$  печатает текст программы  $\pi_k$  для  $k = i + j \bmod 100$ .

(е) Докажите, что найдутся такие числа  $n_1, n_2$ , что  $U(n_1, x) = x + 10n_2$  и  $U(n_2, x) = x + 20n_1$  для всех чисел  $x \in \mathbb{N}$ .

4. (а) Является ли перечислимым множество номеров машин Тьюринга, вычисляющие всюду определённые биекции из  $\mathbb{N}$  в  $\mathbb{N}$ ? Дополнение этого множества?

(б) Является ли перечислимым множество номеров машин Тьюринга (в стандартной нумерации), определённых лишь на конечном множестве слов нечётной длины (и, быть может, бесконечном множестве слов нечетной длины)? Его дополнение?

(в) Является ли множество номеров машин Тьюринга (в стандартной нумерации), среди выходов которых встречается бесконечно много простых чисел, перечислимым? Дополнение этого множества?

(г) Является ли множество номеров вычислимых функций  $\varphi_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  (в стандартной нумерации), среди значений которых встречаются все натуральные числа, перечислимым? Дополнение этого множества?

(д) Является ли множество номеров вычислимых функций  $\varphi_n : \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$  (в стандартной нумерации), множество значений которых состоит из конечного числа двоичных слов, перечислимым? Дополнение этого множества?

5. (а) Теорема Клини гарантирует, что для каждого вычислимого всюду определённого отображения  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  найдётся «неподвижная точка», т.е., такое число  $n$ , что машины Тьюринга с номерами  $n$  и  $f(n)$  (из стандартного перечисления машин Тьюринга) вычисляют одну и ту же функцию. Приведите пример такого отображения  $f_1$ , для которого все неподвижные точки соответствуют машинам, вычисляющим одну и ту же функцию. Приведите пример такого отображения  $f_2$ , у которого есть хотя бы две неэквивалентные неподвижные точки.

(б) Обозначим  $B(n)$  максимальное число шагов, которое может сделать до остановки машина Тьюринга  $p_i$  на входе 0 для  $i = 0, \dots, n$  (мы берём максимум только по тем машинам Тьюринга, которые останавливаются на входе 0). Докажите, что  $B(n) > 2^{2^n}$  для всех достаточно больших  $n$ .

(в) Назовём слово  $x \in \{0, 1\}^*$  длины  $n$  *простым*, если существует программа для машины Поста с номером не более  $n$  (в стандартной нумерации), которая печатает

слово  $x$  на пустом входе. Докажите, что множество всех простых слов перечислимо, но не является  $m$ -полным классе всех перечислимых множеств.