МФТИ, ФИВТ, 2009–2010.
Билеты к экзамену по курсу
Математическая логика и теория алгоритмов .
Д. Мусатов, А. Ромащенко.

Вопросы по 1-му семестру

1. Понятие множества; операции над множествами, тождества. Формула включений и исключений.
2. Отображения и соответствия. Инъекции, сюръекции, биекции. Образ и прообраз множества при отображении; образ прообраза и прообраз образа при отображении.
3. Равномощность множеств. Теорема Кантора–Бернштейна.
4. Счётные и несчётные множества. Примеры. Теорема Кантора.
5. Частично упорядоченные множества и линейно упорядоченные множества. Теорема об изоморфизме счётных плотных линейных порядков без первого и последнего элемента.
6. Пропозициональные формулы и булевы функции. Вычисление истинностного значения формулы. Тавтологии и противоречия.
7. Полные системы связок, теорема Поста. Дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы, полиномы Жегалкина.
8. Аксиомы и правила вывода исчисления высказываний. Корректность исчисления высказываний.
9. Лемма о дедукции для исчисления высказываний. Полнота исчисления высказываний.
10. Противоречивые и непротиворечивые семейства формул. Теорема о компактности для пропозициональных формул.
11. Языки первого порядка: сигнатура, формулы с кванторами. Интерпретация языка первого порядка. Истинность формулы.
12. Выразимость предикатов. Изоморфизмы и автоморфизмы интерпретаций. Примеры невыразимых предикатов.
13. Элиминация кванторов для интерпретации $(\mathbb{Q}, \leq)$.
14. Элементарная эквивалентность интерпретаций. Игра Эренфойхта. Пример пары элементарно эквивалентных, но не изоморфных интерпретаций.
15. Теории и модели. Выполнимость и общезначимость формул первого порядка.

16. Исчисление предикатов: аксиомы и правила вывода. Правило обобщения. Корректность исчисления предикатов.

17. Теорема дедукции для исчисления предикатов.

18. Непротиворечивые и совместные теории. Непротиворечивость любой совместной теории.

19. Полные и экзистенциально полные теории. Любую непротиворечивую теорию можно расширить до полной и экзистенциально полной.

20. Существование модели из замкнутых термов у полной и экзистенциально полной теории.

21. Теорема Гёделя о полноте исчисления предикатов в сильной и слабой форме. Теорема Мальцева о компактности для исчисления предикатов.

Вопросы по 2-му семестру

1. Формальное определение алгоритма. Машины Тьюринга. Определение вычислимой функции. Существование невычислимых функций.

2. Разрешимые и перечислимые множества. Эквивалентность четырёх определений перечислимого множества.

3. Замкнутость разрешимых и перечислимых множеств относительно объединения и пересечения. Теорема Поста.

4. Нумерации вычислимых функций. Универсальная машина Тьюринга и универсальная вычислимая функция.

5. Неразрешимость проблем самоприменимости и остановки.

6. Теорема Райса–Успенского.

7. Теорема Клини о неподвижной точке.

8. Классы Σ_n и Π_n. Теорема об арифметической иерархии.

9. Выразимость в интерпретации $(\mathbb{N}, =, +, \times)$ двухместного предиката $a = 2^k$.

10. Арифметическое представление разрешимых множеств (без доказательства). Первая теорема Гёделя о неполноте.

11. Теоремы о диагонализации для арифметических формул с одной свободной переменной (без доказательства). Теорема Тарского.

12. Предикат доказуемости. Лемма Гильберта–Бернайса (без доказательства). Теорема Лёба. Вторая теорема Гёделя о неполноте.

13. λ-исчисление: термы, α-конверсии, β-редукции. Понятие эквивалентности λ-термов, теорема Чёрча–Россера (без доказательства).

14. Нумералы Чёрча. Представление в чистом лямбда-исчислении простейших арифметических операций: прибавление и вычитание единицы, сложение, вычитание, умножение, возведение в степень.

15. Простейшие логические операции в лямбда-исчислении. Y-оператор и теорема о неподвижной точке для λ-исчисления. Комбинатор, представляющий функцию $n!$

16. Фундированные и вполне упорядоченные множества (эквивалентность трёх определений).

17. Теорема о трансфинитной рекурсии.

18. Сравнение вполне упорядоченных множеств (любые два множества сравнимы; если два множества не превосходят друг друга, то они изоморфны).

19. Аксиома выбора. Теорема Цермело. Сравнимость мощности любой пары множеств.

20. Всякое бесконечное множество равномощно своему квадрату.

Задачи для подготовки к экзамену

1. **Алгоритмы и вычислимые функции**.

   1. Являются ли перечислимыми или разрешимыми следующие множества и их дополнения: (а) номера машин Тьюринга, определённых на слове 1; (б) номера машин Тьюринга, определённых на всех словах, состоящих из одних единиц; (в) номера машин Тьюринга с чётным числом внутренних состояний. (г) номера машин Тьюринга, определённых на всех словах длины десять; (д) номера машин Тьюринга, определённых на всех словах чётной длины; (е) номера машин Тьюринга, которые ни на каком входе не останавливаются ранее, чем через два шага.

   2. Докажите, что существует машина Тьюринга, допускающая свой собственный номер и отвергающая все другие входы.

   3. Докажите, что существует машина Тьюринга, печатающая квадрат своего собственного номера.

   4. Обозначим через L множество номеров программ, определённых на бесконечно многих входах. Докажите, что существует машина Тьюринга с оракулом L, которая разрешает проблему остановки (по заданному номеру машины n и заданному слову x определяет, определено ли $\varphi_n(x)$).

   5. Обозначим через L множество нигде не определённых программ. Докажите, что существует машина Тьюринга с оракулом L, которая разрешает проблему остановки (по заданному номеру машины n и заданному слову x определяет, определено ли $\varphi_n(x)$).

   6. Докажите, что существует пара программ A, B на языке С таких, что A печатает текст B (обычным образом), а B печатает текст A задом наперёд.

   7. Докажите, что существует тройка попарно различных программ A, B, C на языке С таких, что A печатает текст B, B печатает текст C, и C печатает текст A.

   8. Являются ли следующие множества или их дополнения разрешимыми или перечислимыми: (а) множество номеров всюду определённых машин Тьюринга; (б) множество номеров нигде не определённых машин Тьюринга; (в) множество номеров машин Тьюринга, определенных на пустом слове; (г) множество машин Тьюринга, останавливающихся на всяком входе 1^n (n единиц) не позднее, чем через n^2 шагов?

   9. Пусть f и g – вычислимые всюду определённые функции. Докажите, что найдутся такие номера машин Тьюринга m, n, что $\phi_{f(n)} \sim \phi_m$ и $\phi_{g(m)} \sim \phi_n$ (машины считаются эквивалентными, если на любом

входе они либо выдают одинаковые результаты, либо обе не выдают никакого результата).

10. Классы множеств Σ_i и Π_i замкнуты относительно объединения и пересечения.

11. Докажите, что множество натуральных чисел A разрешимо, если и только если существует алгоритм, перечисляющий элементы A в порядке возрастания.

12. Не существует алгоритма, перечисляющего номера всех всюду определённых вычислимых функций и только их.

13. Докажите, что если множества A и B принадлежат Σ_n, то $A \times A$ также принадлежит Σ_n, а $A \setminus B$ принадлежит $\Sigma_{n+1} \cap \Pi_{n+1}$.

14. Являются ли перечислимыми множество всех программ, вычисляющих инъективные функции, а также дополнение этого множества?

15. Являются ли перечислимыми множество всех программ, вычисляющих сюръективные функции, а также дополнение этого множества?

16. Докажите, что существуют непересекающиеся перечислимые множества A и B, которые не могут быть отделены разрешимым множеством: не существует такого разрешимого C, что $A \subset C$ и $B \subset \bar{C}$.

17. Приведите пример неразрешимого подмножества $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, такого что все его горизонтальные и вертикальные сечения (т.е. пересечения с $\mathbb{N} \times \{y\}$ и с $\{x\} \times \mathbb{N}$) разрешимы.

18. Если множество истинных утверждений некоторой теории T является перечислимым, то для данной теории существует полная (и, как всегда, разрешимая) система аксиом.

19. (Дополнительная) Обозначим $K(x)$ минимальный номер машины Тьюринга, которая на пустом входе печатает x и останавливается. Докажите, что функция $K(x)$ не является вычислимой.

2. **λ-исчисление**.

   1. Приведите к нормальной форме λ-терм $((\lambda a.(\lambda b.ba)c)b)((\lambda c.(cb))(\lambda a.a))$

   2. Постройте комбинатор, представляющий в чистом λ-исчислении функцию $f(n) = (n+2)^2$, и приведите его к нормальной форме.

   3. Постройте комбинатор, представляющий в чистом λ-исчислении функцию

$$f(n) = \begin{cases} \textbf{True}, & \text{если } n \text{ чётно,} \\ \textbf{False}, & \text{если } n \text{ нечётно,} \end{cases}$$

4. Постройте комбинатор, представляющий в чистом λ-исчислении функцию
$$f(n) = \begin{cases} \bar{0}, & \text{если } n = 0, \\ \bar{1}, & \text{если } n = 1, \\ f(n-1) + f(n-2) \bmod 3 & \text{если } n \geq 2 \end{cases}$$
(числа Фибоначчи по модулю 3).

5. Прямым вычислением приведите к нормальной форме **Fac** $\bar{2}$ и **Fac** $\bar{3}$ (где **Fac** – построенный на лекции комбинатор, представляющий функцию $n!$)

6. Постройте комбинатор **GT**
$$\mathbf{GT}\ \bar{n}\bar{m} = \begin{cases} \mathbf{True}, & \text{если } n \geq m, \\ \mathbf{False}, & \text{иначе} \end{cases}$$

7. Найдите неподвижную точку комбинатора прибавления единицы **Inc**. Есть ли у неё нормальная форма?

8. Постройте комбинатор **Ack**, который преобразует нумерал $\bar{n}$ в нумерал, выражающий n-ое число Аккремана.

9. Кодируем список $[\bar{n}_1; \bar{n}_2; \ldots; \bar{n}_k]$ как совокупность вложенных пар:
$$\langle n_1; \langle n_2; \ldots \langle x_k; \mathbf{False} \rangle\rangle \ldots \rangle$$
(пустой список кодируется комбинатором **False**). Придумайте комбинатор, который извлекает из списка последний элемент.

10. Придумайте комбинатор, который добавляет в конец списка новый элемент.

11. Придумайте комбинатор, который вычисляет длину списка.

12. Придумайте кобинатор, который возвращает значение n-го элемента списка (или **False**, если в списке меньше n элементов).

13. Придумайте комбинатор, который заменяет n-й элемент списка на заданное число.

14. (дополнительныя задача) Придумайте комбинатор, которые сортирует элементы списка по возрастанию.

3. **Теория множеств**.

1. Докажите, что любые два круга на плоскости равномощны.

2. Докажите равномощность множеств $[0, 1]$ и $(0, 1)$.

3. Докажите равномощность отрезка $[0,1]$ и квадрата.

4. Докажите равномощность любого шара и любого квадрата.

5. Докажите, что множество всех подмножеств $\mathbb{N}$ равномощно $\mathbb{R}$.

6. Докажите, что множество всех конечных последовательностей натуральных чисел счётно.

7. Докажите, что множество алгебраических чисел счётно.

8. Докажите, что множество всех непрерывных (всюду определённых) функций $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ равномощно $\mathbb{R}$.

9. Докажите, что множество всех функций $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ равномощно $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

10. Пусть $\mathbb{R} = A \cup B$. Докажите, что хотя бы одно из множеств A, B равномощно $\mathbb{R}$.

11. Чёрт заключил с купцом такой контракт: каждый день купец должен обменивать одну из своих купюру на любое число более мелких купюр (при этом суммарная стоимость получаемых купюр может быть намного больше номинала разменянной купюры). Купец не может получать денег ни из каких других источников. Когда купец не сможет произвести размен (у него остались только купюры самого маленького достоинства), его душа достанется чёрту. Докажите, что рано или поздно так и случится. (Купец живёт вечно; разных номиналов конечное число)

12. В конечной последовательности нулей и единиц разрешается заменить стоящие рядом цифры 01 на $1000\ldots0$ (с любым числом нулей). Докажите, что такую операцию нельзя выполнять бесконечно много раз.

13. Рассмотрим множество многочленов с натуральными коэффициентами. Считаем, что $P > Q$, если $P(x) > Q(x)$ для всех достаточно больших x. Докажите, что данный порядок линеен и фундирован.

4. **Арифметика Пеано**.

1. Обозначим через $\Phi(n)$ формулу в языке арифметики

$$\forall m(\mathrm{Proof}(m,n) \to \exists l(l < n \ \&\ \mathrm{DisProof}(l,n)))$$

где $\mathrm{Proof}(m,n)$ есть формула, представляющая в PA отношение *слово с номером m является доказательством арифметической формулы номер n*; $\mathrm{DisProof}(m,n)$ есть формула, представляющая в PA отношение *слово с номером m является опровержением (т.е., доказательством отрицания) арифметической формулы номер n*. По теореме о диагонализации существует такая замкнутая формула A, что

$$\mathrm{PA} \vdash A \leftrightarrow \Phi(\ulcorner A \urcorner)$$

Докажите, что A недоказуема и неопровержима в PA.

2. Обозначим через $\Phi(n)$ формулу в языке арифметики

$$\exists m\ \exists m'(\mathrm{Proof}(m, n)\ \&\ \mathrm{DisProof}(m', n))$$

где $\mathrm{Proof}(m, n)$ есть формула, представляющая в PA отношение *слово с номером m является доказательством арифметической формулы номер n*; аналогично, $\mathrm{DisProof}(m, n)$ есть формула, представляющая в PA отношение *слово с номером m является опровержением (т.е., доказательством отрицания) арифметической формулы номер n*. По теореме о диагонализации существует такая замкнутая формула A, что

$$\mathrm{PA} \vdash A \leftrightarrow \Phi(\lceil A \rceil)$$

Докажите, что A недоказуема и неопровержима в PA.

3. Обозначим через $\Phi(n)$ формулу в языке арифметики

$$\forall m(\mathrm{Proof}(m, n) \to\ \mathrm{DisProof}(m + 100, n))$$

где $\mathrm{Proof}(m, n)$ есть формула, представляющая в PA отношение *слово с номером m является доказательством арифметической формулы номер n*; $\mathrm{DisProof}(m, n)$ есть формула, представляющая в PA отношение *слово с номером m является опровержением (т.е., доказательством отрицания) арифметической формулы номер n*. По теореме о диагонализации существует такая замкнутая формула A, что

$$\mathrm{PA} \vdash A \leftrightarrow \Phi(\lceil A \rceil)$$

Докажите, что A недоказуема и неопровержима в PA.

4. Обозначим через $\Phi(n)$ формулу в языке арифметики

$$\exists m\ \mathrm{DisProof}(m, n)$$

где $\mathrm{DisProof}(m, n)$ есть формула, представляющая в PA отношение *слово с номером m является опровержением (т.е., доказательством отрицания) арифметической формулы номер n*. По теореме о диагонализации существует такая замкнутая формула A, что

$$\mathrm{PA} \vdash A \leftrightarrow \Phi(\lceil A \rceil)$$

Докажите, что A недоказуема и неопровержима в PA.

5. Докажите, что существуют такие A и B, что $PA \vdash A \to \Box B$ и $PA \vdash B \to\ \neg\Box B$.

6. Пусть для замкнутых формул A и B выполнено $PA \vdash A \to \Box B$ и $PA \vdash B \to\ \neg\Box A$. Являются ли эти формулы истинными? Доказумыми?

7. Пусть для замкнутых формул A и B выполнено $PA \vdash A \to \Box B$ и $PA \vdash B \to \Box A$. Являются ли эти формулы истинными? Доказумыми?

8. Пусть для замкнутой формулы A выполнено $PA \vdash A \leftrightarrow \Box A$. Является ли эта формула истинной? Доказуемой?

9. Пусть для замкнутой формулы A выполнено $PA \vdash A \leftrightarrow \neg\Box A$. Докажите, что $PA \vdash A \to \neg\Box\bot$

10. Докажите в PA формулу $\forall x \forall y (x + y = y + x)$.