МФТИ, ФИВТ, весна 2013.
Программа курса
Математическая логика и теория алгоритмов.
Д.В. Мусатов, А.Е. Ромащенко.

Звездочкой отмечены пункты, которые входят в программу экзамена только для специальности ПМИ.

1. **Трансфинитная индукция.**

   1.1. Фундированные множества: эквивалентность трёх определений. Определение вполне упорядоченного множества.

   1.2. Пример рассуждения по трансфинитной индукции: если A вполне упорядоченное множество и $f : A \to A$ (строго) монотонная функция, то $f(x) \geq x$ для всех x.

   1.3. Начальные отрезки вполне упорядоченного множества. Лемма о представлении произвольного собственного начального отрезка в виде полуинтервала $[0, a)$. Лемма об объединении начальных отрезков.

   1.4. Теорема о сравнимости любых двух вполне упорядоченных множеств.

   1.5. Аксиома выбора. Теорема Цермело: любое множество может быть вполне упорядочено.

   1.6. Сравнимость мощностей любой пары множеств.

   1.7. Декартово произведение бесконечного A и счетного B равномощно A. Следствие: мощность объединения бесконечных A и B имеет мощность $\max\{|A|, |B|\}$.

   1.8. * Лемма Цорна.

   1.9. * Равномощность бесконечного множества A и его декартова квадрата $A \times A$.

   1.10. * Определение базиса Гамеля, теорема о существовании.

   1.11. * Базис Гамеля для множества вещественных чисел, рассматриваемого, как вектороное пространство на полем рациональных чисел. Применения: изоморфизм $(\mathbb{R}, +)$ и $(\mathbb{R}^2, +)$; существование функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющей условию $f(x + y) = f(x) + f(y)$, отличной от умножением на константу.

2. **Вычислимость.**

   2.1. Формальное определение алгоритма, машины Поста. Другие модели вычислимости: машины Тьюринга, машины Минского, нормальные алгорифмы Маркова. Определение вычислимой функции. Тезис Чёрча. Существование невычислимых функций.

2.2. Разрешимые и перечислимые множества. Эквивалентность трёх определений перечислимого множества в $\mathbb{N}$: существование перечисляющего алгоритма, вычислимость полухарактеристической функции, множество есть проекция некоторой разрешимого $A \subset \mathbb{N}^2$ на первую координату.

2.3. Замкнутость классов разрешимых и перечислимых множеств относительно объединения и пересечения. Теорема Поста о перечислимых и коперечислимых множествах.

2.4. Неразрешимость проблем самоприменимости и остановки.

2.5. Универсальные вычислимых функций. Главные универсальные вычислимые функции. Универсальная машина Поста и теорема о существовании главной универсальной вычислимой функции.

2.6. Теорема Райса–Успенского о неразрешимости любых нетривиальных свойств вычислимых функций.

2.7. Теорема Клини о неподвижной точке.

2.8. Понятия m-сводимости, простейшие свойства. Сводимость произвольного перечислимого множества к задачам оставновки и самоприменимости; m-полнота.

2.9. Вычисления с оракулом. Сводимость по Тьюрингу, её простейшие свойства.

2.10. Классы Σ_n и Π_n, их замкнутость относительно объединения и пересечения.

2.11. * Множества $\mathbf{0}^{(n)}$. Теорема об арифметической иерархии (без доказательства).

3. **Лямбда-исчисление.**

3.1. Чистое λ-исчисление: термы, комбинаторы. Преобразование λ-термов: α-конверсии, β-редукции. Определение эквивалентности (равенства) λ-термов, λ-термы в нормальной форме. Формулировка теоремы Чёрча–Россера.

3.2. Нумералы Чёрча. Представление в λ-исчислении операции прибавления единицы, сложения, умножения.

3.3. Логические операции в λ-исчислении. Кодирование пары и комбинатор вычитания единицы.

3.4. Теорема о неподвижной точке для λ-исчисления; комбинаторы неподвижной точки.

3.5. Комбинатор, представляющий функцию факториал.

4. **Формальная арифметика и доказуемость.**

   4.1. Лемма о представлении в языке формальной арифметике конечных последовательностей натуральных чисел.

   4.2. Представление в формальной арифметике разрешимых и перечислимых множеств. Множество арифметично тогда и только тогда, когда оно принадлежит арифметической иерархии.

   4.3. Понятие системы аксиом для языка первого порядка. Непротиворечивые и полные системы аксиом. Аксиомы арифметики Пеано.

   4.4. Теорема о неразрешимости множества истинных замкнутых формул формальной арифметики. Первая теорема Гёделя о неполноте (семантическая формулировка[1]).

   4.5. * Прямое доказательство первой теоремы Гёделя о неполноте: построение истинного недоказуемого утверждения с помощью теоремы Клини о неподвижной точке.

   4.6. Построение арифметической формулы,выражающей свойство непротиворечивости системы аксиом $\mathcal{A}$. Формулировка второй теоремы Гёделя о неполноте.

Основной список литературы.

1. Верещагин Н.К., Шень А. Лекции по математической логике. Часть 1. Начала теории множеств. – М.: МЦНМО, 1999.

2. Верещагин Н.К., Шень А. Лекции по математической логике. Часть 3. Вычислимые функции. – М.: МЦНМО, 1999.

3. Булос Дж., Джеффри Р. Вычислимость и логика. М.: Мир, 1994.

4. Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. М.: Физматлит, 2002.

5. Барендрегт Х. Ламбда-исчисление. Его синтаксис и семантика. М.: Мир, 1985.

Дополнительная литература.

1. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. М.: Наука, 1984.

2. Колмогоров А.Н., Драгалин А.Г. Математическая логика. М.: КомКнига, 2006.

3. Клини С.К. Математическая логика. М.: Мир, 1973.

[1] Синтаксическая формулировка теоремы Гёделя о неполноте в программу экзамена не входит.

4. Успенский В.А. Машина Поста. М.: Наука, 1988.

5. Успенский В.А., Верещагин Н.К., Плиско В.Е. Вводный курс математической логики. М.: Физматлит, 2004.

6. Йех Т. Теория множеств и метод форсинга. М.: Мир, 1973.

7. Шёнфилд Дж. Математическая логика. М.: Наука, 1975.

8. Манин Ю.И. Доказемое и недоказуемое. М.: Советское радио, 1979.

9. Манин Ю.И. Вычислимое и невычислимое. М.: Советское радио, 1980.