

**МФТИ, бакалавриат ФИВТ. 2014.**  
**Упражнения ко второй части курса**  
**Введение в теорию информации. А.Е. Ромащенко**  
 (upd. 11.06.2014)

1. Рассмотрим двоичный канал без памяти, а котором ноль всегда передаётся без искажений, а единица с вероятностью  $\varepsilon$  превращается в ноль. Вычислите пропускную способность этого канала.

2. Рассмотрим канал без памяти с входным алфавитом  $\{0, 1\}$  и выходным алфавитом  $\{0, 1, *\}$ . Символы 0 и 1 с вероятностью  $(1 - \varepsilon)$  передаются без искажения, а с вероятностью  $\varepsilon$  превращаются в \*. Вычислите пропускную способность этого канала.

3. В некотором канале с шумом (без памяти) входной алфавит состоит из 3 символов, а выходной из 4. (а) Может ли пропускная способность такого канала быть равна 1? (б) Может ли пропускная способность такого канала быть равна 2?

4. (а) Существует ли такой оптимальный алгоритмический способ описания  $U$ , что величина колмогоровской сложности  $KS(x)$  для любого слова  $x$  чётна? (б) Такой, что колмогоровская сложность любого слова  $x$  является степенью двойки?

5. Пусть вычислимая функция  $U$  является оптимальным способом описания для колмогоровской сложности. Докажите, что отображение  $V$ , определяемое для всякого слова  $p$  как  $V(p) = U(U(p))$ , тоже является оптимальным способом описания.

6. Докажите, что множество пар  $\{(x, n) \mid KS(x) < n\}$  является перечислимым, но не является разрешимым.

7. Докажите, что существует такая константа  $C$ , что для любого палиндрома  $x$  длины  $n$  выполнено неравенство

$$KS(x) \leq n/2 + c.$$

8. Докажите, что  $KS(x, KS(x)) = KS(x) + O(1)$ .

9. Докажите неравенства для колмогоровской сложности:

(а)  $2KS(x, y, z) \leq KS(x, y) + KS(x, z) + KS(y, z|x) + O(\log(|x| + |y| + |z|))$ ,

(б)  $KS(x, y, z) + KS(z) \leq KS(x, z) + KS(y, z) + O(\log(|x| + |y| + |z|))$ ,

(в)  $KS(z) \leq KS(z|x) + KS(z|x) + I(x : y) + O(\log(|x| + |y| + |z|))$ .

10. (а) Докажите, что для любых чисел  $C$  и  $D$  найдутся такие слова  $x, y, z$ , что

$$2KS(x, y, z) \not\leq KS(x, y) + KS(x, z|y) + KS(y, z|x) + C \log(KS(x, y, z)) + D.$$

(б) Докажите, что для любых чисел  $C$  и  $D$  найдутся такие слова  $x, y, z$ , что

$$I(x : y) \not\leq I(x : y|z) + C \log(KS(x, y, z)) + D.$$

(в) Докажите, что для любых чисел  $C$  и  $D$  найдутся такие слова  $x, y, v, w$ , что

$$I(x : y) + I(v : w) \not\leq I(x : y|v) + I(x : y|w) + C \log(KS(x, y, z)) + D$$

11. (а) Докажите, что ряд  $\sum_{x \in \{0,1\}^*} 2^{-KS(x)}$  расходится.

(б) Докажите, что ряд  $\sum_{x \in \{0,1\}^*} 2^{-KP(x)}$  сходится.

12. Докажите, что для любого  $m$ , для всех достаточно больших  $n$  найдется не менее  $m$  слов  $x$  длины  $n$  таких, что  $KS(x) \geq n$ .

13. Докажите, что для префиксной колмогоровской сложности выполняется неравенство

$$KP(x, y) \leq KP(x) + KP(y) + O(1).$$

14. Докажите, что  $KP(x) \leq KS(x) + \log KS(x) + 2 \log \log KS(x) + O(1)$ .

15. Докажите, что для любой константы  $c$ , для бесконечно многих  $x$

$$KP(x) > KS(x) + c.$$

16. Известно, что для колмогоровской сложности взаимная информация симметрична с логарифмической погрешностью:

$$|I(x : y) - I(y : x)| = O(\log KS(x, y)).$$

(а) Покажите, что  $O(\log KS(x, y))$  в этом равенстве нельзя заменить на  $O(1)$ .

(б) Покажите, что  $O(\log KS(x, y))$  в этом равенстве нельзя заменить на  $O(\sqrt{\log KS(x, y)})$ .

17. (а) Докажите, что если последовательность  $x_1x_2x_3 \dots$  случайна по Мартин-Лёфу, то она не может быть вычислимой. (б) Докажите, что если последовательность  $x_1x_2x_3 \dots$  случайна по Мартин-Лёфу, то подпоследовательность  $x_2x_4x_6 \dots$  не может быть вычислимой. (в) Докажите, что никакая последовательность вида  $x_1x_1x_2x_2x_3x_3 \dots$  не может быть случайной по Мартин-Лёфу

18. Докажите, что в любой случайной по Мартин-Лёфу последовательности  $x_1x_2x_3 \dots$  встречаются сколь угодно длинные последовательности нулей.

19. В последовательности битов  $x_1x_2x_4 \dots x_n \dots$  в каждом префиксе длины  $n$  не встречается больше  $\frac{\log n}{2}$  нулей подряд. Докажите, что такая последовательность не может быть случайной по Мартин-Лёфу.

20. Рассмотрим предикат  $GT_n : \{1, \dots, 2^n\} \times \{1, \dots, 2^n\} \rightarrow \{0, 1\}$

$$GT_n(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > y, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Докажите, что детерминированная коммуникационная сложность предиката  $GT_n$  равна  $n + 1$ .

21. Рассмотрим предикат *дизъюнктивности*  $DISJ_n$ : для подмножеств  $x, y \subseteq \{1, \dots, n\}$

$$DISJ_n(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \cap y = \emptyset, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Докажите, что детерминированная коммуникационная сложность предиката  $\text{DISJ}_n$  равна  $n + 1$ .

**22.** (а) Докажите, что предикат  $\text{GT}_n$  из задачи 20 имеет вероятностную коммуникационную сложность  $O(\log^2 n)$  (для вероятности ошибки  $\varepsilon = 1/3$ ).

(б)\* Докажите, что этот предикат имеет вероятностную коммуникационную сложность  $O(\log n)$  (также для вероятности ошибки  $\varepsilon = 1/3$ ).

**23.** Рассмотрим функцию  $\text{max}_n : \{0, \dots, 2^n - 1\} \times \{0, \dots, 2^n - 1\} \rightarrow \{0, 1\}$

$$\text{max}_n(x, y) = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq y, \\ y, & \text{иначе.} \end{cases}$$

(а) Докажите, что детерминированная коммуникационная сложность функции  $\text{max}_n$  не превосходит  $2n$ . (б) Докажите, что детерминированная коммуникационная сложность функции  $\text{max}_n$  не превосходит  $\frac{3}{2}n + O(1)$ . (в)\* Докажите, что детерминированная коммуникационная сложность этой функции не превосходит  $n + O(\sqrt{n})$ .

**24.** Докажите, что для любого  $\varepsilon < 1/2$  вероятностная коммуникационная сложность предиката  $\text{GT}_n$  из задачи 20 не меньше  $\Omega(\log n)$  (константа в  $\Omega(\cdot)$  может зависеть от  $\varepsilon$ ).

**25.** У Алисы имеется  $n$ -битная строка  $x$ , а у Боба  $n$ -битная строка  $y$ . Известно, что  $y$  получен из  $x$  инвертированием одного бита.

(а) Придумайте детерминированный коммуникационный протокол сложности  $O(\log n)$ , который позволяет Бобу узнать  $x$ .

(б) Придумайте *однораундовый* детерминированный коммуникационный протокол сложности  $O(\log n)$ , который позволяет Бобу узнать  $x$ . (В *однораундовом* протоколе Алиса посылает некоторое сообщение Бобу, после чего Боб вычисляет результат.)