О множествах с двумя расстояниями

А. В. Акопян*и О. Р. Мусин†

Аннотация

В этой заметке пойдёт речь о множестве точек в пространстве или на сфере, расстояния между которыми принимают не более чем два значения. Обсуждается вопрос о том, как много точек может иметь такое множество, а также какие конфигурации образуют точки из экстремальных наборов.

Введение

Сколько точек можно выбрать в d-мерном евклидовом пространстве так, что расстояния между любыми двумя из них будут равны? Легко видеть, что можно выбрать не более $d+1$ точек, а вершины d-мерного симплекса как раз и будут образовывать такое множество. Правильный симплекс вписан в $(d-1)$-мерную сферу, и поэтому на такой сфере тоже можно выбрать $(d+1)$ точку так, что расстояния между любыми двумя точками принимает фиксированное значение.

Отметим, что вопрос о том, какое максимальное количество точек на одинаковом друг от друга расстоянии гарантировано можно выбрать в d-мерном банаховом пространстве остаётся открытым (см. обзоры [17, 16]).

Множество $\mathcal{S}$ в $\mathbb{R}^d$ или $\mathbb{S}^d$ (или любом другом метрическом пространстве) называется *множеством с s расстояниями*[1], если расстояния между его точками принимают не более s значений.

В этой статье в основном обсуждаются множества с двумя расстояниями. Оказывается, что, несмотря на такое, в общем-то, достаточно простое, ограничение, эти множества обладают рядом довольно интересных и иногда неожиданных свойств.

Отметим, что Эйнхорн и Шонберг в [9, 10] показали, что существует лишь конечное число множеств (с точностью до подобия) с двумя расстояниями в $\mathbb{R}^d$, состоящими из более чем $d+2$ точек. Заметим, что подобный результат для множеств с $s>2$ расстояниями был получен Х. Нозаки совсем недавно [19].

Имеется пример множества с двумя расстояниями в $\mathbb{R}^d$, состоящего из $C_{d+1}^2 = d(d+1)/2$ точек. Мы будем обозначать это множество S_d. Рассмотрим правильный симплекс в $\mathbb{R}^d$, у которого длины всех рёбер равны 1. У этого симплекса всего $d(d+1)/2$ рёбер. Их середины будут образовывать множество с двумя расстояниями. Действительно, если два ребра имеют общую вершину, то расстояние между их серединами равно $1/2$ (поскольку соединяющий их отрезок будет средней линией треугольника, образованного вершинами этих рёбер). Если не имеют, то $1/\sqrt{2}$, поскольку в этом случае вершины этих рёбер являются вершинами правильного трёхмерного тетраэдра, а расстояние между серединами противоположных рёбер правильного тетраэдра именно таково.

*Работа выполнена при частичной поддержке фонда «Династия», гранта 11-01-00735 и гранта Правительства РФ №11.G34.31.0053.

†Работа выполнена при частичной поддержке гранта 11-01-00735 и гранта Правительства РФ №11.G34.31.0053.

[1] По-английски *s-distance set.*

Это множество можно описать также с помощью ортонормированного базиса $e_1, e_2, \ldots, e_{d+1}$ пространства $\mathbb{R}^{d+1}$. Рассмотрим точки вида

$$e_i + e_j \quad (1 \leqslant i < j \leqslant d+1).$$

Расстояние между такими точками может быть равно либо $\sqrt{2}$, либо 2, в зависимости от того, имеют ли они общую единицу в координатной записи или нет. Сумма координат получившихся $d(d+1)/2$ точек будет равна 2 и поэтому они будут лежать в гиперплоскости, задаваемой уравнением $x_1 + \ldots + x_{d+1} = 2$.

Заметим, что если a и b $(a < b)$ — два расстояния множества S_d, то $b^2/a^2 = 2$. Оказывается, что подобное свойство верно для всех достаточно больших множеств с двумя расстояниями.

Ларман, Роджерс и Зейдель в [14] доказали, что если множество с двумя расстояниями a и b $(a < b)$ в $\mathbb{R}^d$ состоит из более чем $2d + 3$ точек, то

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{k-1}{k}, \text{ где } k \in \mathbb{N}, \quad \text{и} \quad 2 \leqslant k \leqslant \frac{1+\sqrt{2d}}{2}. \tag{1}$$

Недавно этот соотношение было обобщено Нозаки [19] на случай множеств с s расстояниями.

Естественно, что нас будет интересовать максимальная мощность множеств с s расстояниями. Часто экстремальные конфигурации, то есть множества с s расстояниями, состоящие из максимального возможного числа точек, оказываются весьма любопытными и граф расстояний между точками имеет высокую степень симметрии. Это одна из причин, почему интересно исследовать вопросы о мощности и виде таких множеств.

Отметим, что верхние оценки на мощность множеств с s расстояниями в $\mathbb{R}^d$ стали известны около 30 лет назад. В частности, Блокхаус доказал, что число точек у множества $\mathcal{S}$ с двумя расстояниями в $\mathbb{R}^d$ не превосходит $(d+1)(d+2)/2$ (см. ниже теорему 1). Как показал Лисонек (см. раздел 3), эта оценка достигается в размерности 8.

В работе [8] были получены оценки для случая, когда точки множества $\mathcal{S}$ лежат на сфере в $\mathbb{R}^d$. (Мы будем называть такие множества *сферическими множествами с двумя расстояниями.*) В этом случае оценка будет $d(d+3)/2$ (см. теорему 2). Заметим, что эта оценка достигается для $d = 2$, 6 и 22.

В разделе 3 мы разбираем работу Лисонека по множествам с двумя расстояниями в $\mathbb{R}^d$ для $d \leqslant 8$. Кроме верхних оценок и работы Лисонека, основанной на компьютерном переборе, практически никаких результатов для максимальных евклидовых множеств с двумя расстояниями нет.

В отличии от евклидова, для сферического случая имеется значительный прогресс. Мы немного обсудим это в разделе 5. В работе [18] было показано, что для $6 < d < 22$ и $23 < d < 40$ количество точек не превосходит $d(d+1)/2$. Следовательно, в этих размерностях множество S_d является максимальным. Недавно этот результат был расширен для $d = 23$ и $40 \leqslant d \leqslant 93$ $(d \neq 46, 78)$ в работе А. Барга и В.-Ш. Ю [4].

1 Множества с двумя расстояниями для $d \leqslant 3$.

В случае, когда наше пространство — это прямая, легко видеть, что максимальная мощность множества с двумя расстояниями равна трём. Экстремальной конфигурацией тут служат концы отрезка и точка в его середине.

На плоскости такое множество может уже состоять из пяти точек — вершин правильного пятиугольника. Два расстояния — это длина стороны пятиугольника и длина его диагонали. В следующем разделе мы покажем, что эта конфигурация единственна.

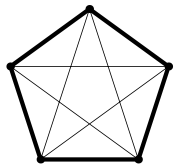

Рис. 1:

В трёхмерном пространстве максимальная мощность не сильно больше и равна шести. Это показал Крофт в [7]. Оказывается, что размерность три в данном случае является исключительной ситуацией, поскольку таких множеств из шести точек не одно, а целых шесть штук. Перечислим их.

Во-первых, существует два множества с отношением длин, равным $\sqrt{2}$. Первое — это вершины правильного октаэдра. Другой пример — это призма, основание которой — правильный треугольник, а боковые рёбра равны стороне это треугольника (рис. 1).

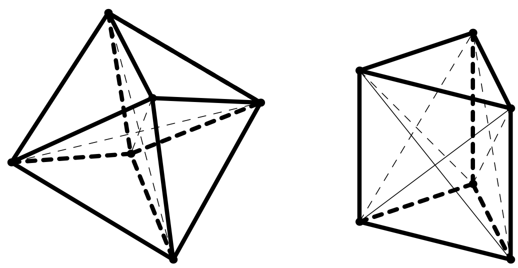

Рис. 1

Есть ещё четыре довольно любопытных примера, которые получаются из правильного икосаэдра. В правильном икосаэдре 12 вершин (рис. 2).

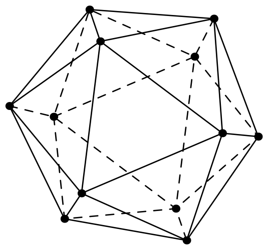

Рис. 2

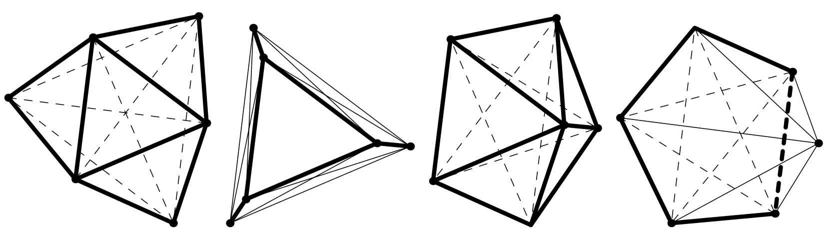

Рис. 3 Четыре примера множеств с двумя расстояниями, получающимися из правильного икосаэдра. Жирные линии обозначают расстояния, равные 1, а тонкие — $\sqrt{5}/2$

Для каждой вершины есть 5 соседних вершин (давайте считать, что расстояние до них равно 1), противоположная и 5 соседних с противоположной (расстояние до них равно $\sqrt{5/2}$). Давайте из каждой пары противоположных вершин выберем одну. Тогда мы получим 6 точек, между которыми расстояние либо 1, либо $\sqrt{5/2}$. Таким образом, мы можем получить четыре новые конструкции, изображённые на рис. 3.

Интересно, что для плоскости и пространства также решена задача о множествах с тремя расстояниями. На плоскости оно может состоять максимум из семи точек, и существует две такие конфигурации: вершины правильного семиугольника и вершины правильного шестиугольника и его центр (рис. 4). Полностью все множества с тремя расстояниями на плоскости, состоящие из пяти и более точек классифицировал Шинохара [21] (их оказалось 24 штуки). Он же показал [20], что в трёхмерном пространстве единственное максимальное множество с тремя расстояниями — это икосаэдр (рис. 2).

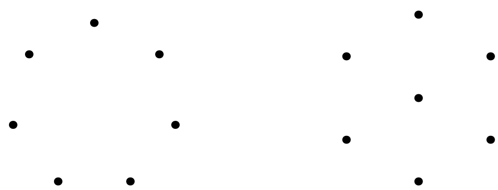

Рис. 4 Множества из 7-ми точек на плоскости, между которыми только три вида расстояний.

Примеры множеств с двумя расстояниями в больших размерностях, обсуждаются в разделе 3.

2 Максимальное множество с двумя расстояниями на плоскости

Приведём здесь доказательство того, что пять точек на плоскости с двумя расстояниями, всегда образуют правильный пятиугольник. Первым это доказал Келли [12], решая похожую задачу Эрдёша из задачника American Mathematical Monthly. Задача Эрдёша состояла в следующем: сколько точек можно расположить на плоскости или в пространстве так, чтобы любой треугольник с вершинами в них был равнобедренным. Множество с двумя расстояниями, очевидно, является примером такого множества. Обратное неверно. В частности, ответом на вопрос Эрдёша для плоскости будет 6 — правильный пятиугольник и его центр. Келли показал, что эта конструкция из шести точек будет единственной. В трёхмерном пространстве задачу Эрдёша решил Крофт [7], показав, что в этом случае точек не более 8. Множество из 8 точек существует: правильный пятиугольник в горизонтальной плоскости, его центр и две дочки над и под центром на расстоянии равным радиусу описанной окружности пятиугольника. Однако доказать, что это единственная восьмиточечная конфигурация удалось доказать лишь сравнительно недавно (Кидо [13]). Позже Ю. И. Ионину удалось получить решение этой задачи для пространств размерности не большей 8 [11]. Более подробно об этой задаче и похожих вопросах можно прочитать в его недавней статье [2].

Вернёмся к нашей задаче о множестве с двумя расстояниями на плоскости. Очевидно, что к вершинам правильного пятиугольника нельзя будет добавить ещё одну точку, так чтобы число различных расстояний не увеличилось. Поэтому, из единственности будет следовать, что максимальная мощность множества с двумя расстояниями на плоскости равна пяти.

Итак пусть дано множество $\mathcal{S}$ из 5 точек на плоскости, таких, что между ними только два расстояния a и b ($a < b$). Заметим, что среди этих точек нет трёх, образующих правильный треугольник. Действительно, пусть три точки A, B и C образуют правильный треугольник. Тогда про любую точку X из двух оставшихся точек $\mathcal{S}$, можно сказать, что
а) из трёх расстояний до A, B и C два должны быть равны, поэтому X лежит на одном из серединных перпендикулярах к сторонам;
б) все три расстояния до A, B и C не могут быть одинаковыми (случай, когда X центр $\triangle ABC$ легко исключается, так как пятую точку к этому набору добавить нельзя), поэтому одно из

них должно быть равно $|AB|$. Следовательно эта точка лежит на окружности радиуса $|AB|$ с центром в одной из вершин треугольника.

Таким образом, кандидатами в наше множество могут быть только 9 точек, отмеченных на рис. 5. Легко заметить, что в множестве с двумя расстояниями точки должны быть одного типа (— одинаково отмечены на рис. 5). Но, проанализировав все три возможные в этом случае конструкции, мы видим, что они имеют три различных расстояния.

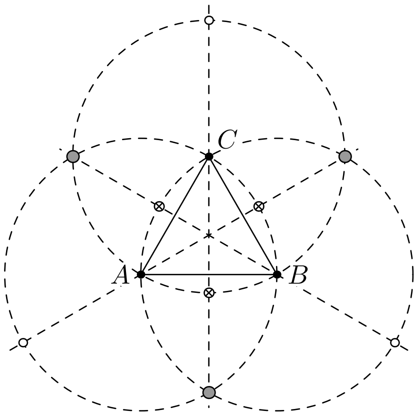

Рис. 5

Заметим также, что для каждой точки X из множества $\mathcal{S}$, существует ровно две точки из $\mathcal{S}$ на расстоянии a и две на расстоянии b. Действительно, если три точки A, B и C находятся на расстоянии, скажем, a от X, то либо между какими-то двумя из них расстояние a и они образуют правильный треугольник вместе с точкой X, либо между ними всеми расстояние b и $\triangle ABC$ правильный.

Раз так, то получаем, что если соединить отрезками вершины на расстоянии b, то они образуют пятизвенную ломаную, при этом каждое ребро этой ломаной является диаметром $\mathcal{S}$. Но любые два диаметра множества на плоскости должны либо пересекаться, либо иметь общий конец (если два диаметра не пересекаются, то из каждого можно выбрать по вершине так, что расстояние между выбранными вершинами будет больше). Следовательно, эта ломаная устроена звездой, как изображено на рис. 6. Осталось заметить, что все стороны образовавшегося пятиугольника должны быть равны a. Отсюда уже легко получить равенство его углов, а значит, этот пятиугольник правильный.

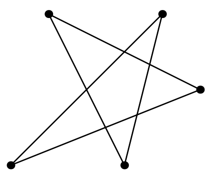
Рис. 6

3 Множества с двумя расстояниями в пространствах размерности $d \leqslant 8$

В 1997 году Пётр Лисонек опубликовал интересную статью [15], в которой он с помощью компьютера показал единственность (с точностью до подобия) максимальных множеств с двумя расстояниями в размерностях 4, 5, 6 и 7 (сами конструкции были известны ещё до него), а в размерности 8 он обнаружил множество состоящее из 45 точек, — максимально возможное согласно границе Блокхауса (см. теорему 1 в разделе 4).

Рассмотрим эту работу более подробно. Переберём все максимальные множества с двумя расстояниями в $\mathbb{R}^d$, где $d \leqslant 8$. Мы уже знакомы с такими множествами для $d = 2$ и $d = 3$.

$\mathbf{d = 4.}$ В этом случае число точек в множестве с двумя расстояниями не превосходит 10. И единственным множеством из 10 точек является описанное выше множество S_5, состоящее из середин рёбер правильного симплекса. Интересно, что граф рёбер большей длины в этой конфигурации образует знаменитый граф Петерсена (рис. 7).

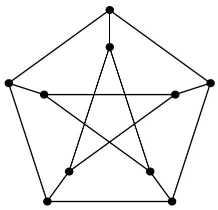

Рис. 7

$\mathbf{d = 5.}$ В этой размерности можно получить больше точек, чем даёт нам множество из середин рёбер симплекса — 16 вместо 15. Для этого надо «подкрутить» четыре точки, что позволит добавить ещё одну. Опишем эту конструкцию явно (она же является единственной максимальной в пятимерном пространстве). Пусть e_1, e_2, e_3, e_4 и e_5 — это ортонормированный базис. Наше множество будет состоять из пяти точек вида $-e_i + \sum\limits_{i=j}^{5} e_j$ $(1 \leqslant i \leqslant 5)$, 10 точек вида $e_i + e_j$ $(1 \leqslant i < j \leqslant 5)$ и начала координат. Легко видеть, что между точками этого множества расстояние либо $\sqrt{2}$, либо 2. Кроме того, все они лежат на сфере радиуса $\sqrt{5}/2$ с центром в $\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{5} e_i$.

$\mathbf{d = 6.}$ Оказывается, что в семимерном пространстве существует 28 прямых, проходящих через начало координат, таких, что угол между ними одинаковый и равен $\arccos 1/3$. Как построить такие прямые? Рассмотрим прямые в $\mathbb{R}^8$, выходящие из начала координат в направлениях вдоль векторов, у которых две координаты равны 3, а остальные шесть равны -1. Таких прямых $C_8^2 = 28$ и все они лежат на гиперплоскости задаваемой уравнением $\sum\limits_{i=1}^{8} x_i = 0$. Все векторы, порождающие эти прямые, имеют длину $\sqrt{24}$, а скалярное произведение этих векторов равно либо 8, либо -8. Значит, угол между этими векторами либо $\arccos 1/3$, либо $-\arccos 1/3$.

Выберем единичный вектор e на одной из прямой и 27 единичных векторов на оставшихся прямых, так что они образуют с e тупой угол. Легко понять, что концы этих векторов лежат на шестимерной плоскости, перпендикулярной e, и расстояния между ними равны либо $\sqrt{4/3}$, либо $\sqrt{8/3}$. (И опять же, видно, что все они лежат на одной сфере.)

$\mathbf{d = 7.}$ В этой размерности Лисонек обнаружил, что максимальное множество единственно и состоит оно из 29 точек. Как и в размерности пять, можно «подкрутить» конструкцию, образованную серединами рёбер правильного симплекса и добавить ещё одну точку.

Мы опишем это множество с помощью ортонормированного базиса $e_1, e_2, \dots, e_8$ пространства $\mathbb{R}^8$. Сумма координат получившихся точек будет равна 2 и поэтому они будут лежать в семимерной гиперплоскости, задаваемой уравнением $x_1 + \ldots + x_8 = 2$.

7 точек нашего множества задаются так:

$$-e_i + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{7} e_k - \frac{1}{2}e_8 \quad (1 \leqslant i \leqslant 7).$$

21 точка имеет вид:

$$e_i + e_j \quad (1 \leqslant i < j \leqslant 7),$$

и 29-я точка — это точка

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{7} e_k - \frac{3}{2}e_8.$$

Расстояния между точками опять же равны либо $\sqrt{2}$, либо 2, но в отличие от предыдущих случаев, на этот раз точки не будут лежать на одной сфере.

$\mathbf{d = 8.}$ Как и в предыдущем случае, зададим это множество в координатах пространства большей размерности. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_9$ ортонормированный базис в $\mathbb{R}^9$. Сумма координат построенных точек опять будет равна 2, то есть они будут лежать на гиперплоскости, задаваемой уравнением $x_1 + \ldots + x_9 = 2$.

9 точек задаются с помощью таких соотношений

$$-e_i + \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{9} e_k \quad (1 \leqslant i \leqslant 9).$$

Остальные 36 образуют множество S_8 и имеют вид

$$e_i + e_j \quad (1 \leqslant i < j \leqslant 9).$$

Как и раньше расстояния между точками будут равны либо $\sqrt{2}$, либо 2. Этот пример является максимальным, поскольку на нём достигается граница Блокхауса (теорема 1). Но является ли эта конструкция единственной? Кроме того, отметим, что получившиеся точки будут лежать на двух концентрических сферах. Может быть, это верно и для других экстремальных конфигураций в бóльших размерностях (эта гипотеза была высказана несколько лет назад А. А. Глазыриным и О. Р. Мусиным)?

Метод перебора основан на соотношении (1), благодаря которому мы можем считать, что знаем отношения между расстояниями. После чего надо рассматривать различные графы и проверять, реализуются ли они в пространстве соответствующей размерности (для этого существуют классические методы, основанные на положительной определённости матрицы скалярных произведений).

В статье Лисонека также приводятся данные о времени, потраченном на вычисления на довольно мощном по меркам 1996 года компьютере (DEC Alpha 2000 4/275 с 256 MB RAM и суперкомпьютер IBM/SP2 с 40 узлами RS6000 по 256 MB RAM в каждой). Так на случай $d = 4$ ушло всего 0.2 секунды, на $d = 5$ — 7 секунд, на $d = 6$ — 12 минут, а на $d = 7$ понадобилось аж 40 дней.

4 Верхние оценки на мощность множества с двумя расстояниями в $\mathbb{R}^d$

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{S}$ — это множество с двумя расстояниями в $\mathbb{R}^d$. Тогда количество точек в $\mathcal{S}$ не превосходит $(d+1)(d+2)/2$ (что равно C^2_{d+2}).*

Первоначально оценка $(d+1)(d+4)/2$ была получена Ларманом, Роджерсом и Зейделем в [14]. Потом Блокхаус [6] слегка дополнил это доказательство и получил оценку из теоремы 1. Мы сейчас приведём эти довольно простые рассуждения.

Доказательство. Доказательство теоремы 1. Для каждой точки $p \in \mathcal{S}$ заведём многочлен от d переменных:

$$F_p(x) = (\|x-p\|^2 - a^2)(\|x-p\|^2 - b^2), \tag{2}$$

где a и b — это те самые два расстояния.

Легко видеть, что эти многочлены линейно независимы, поскольку, подставляя в качестве переменной x точку p, мы получим, что все многочлены $F_{p'}$, $p' \in \mathcal{S}$, $p' \neq p$, обнуляются, а значение F_p в этой точке равно a^2b^2. Заметим также, что они является линейными комбинациями следующих функций:

$$\|x\|^4, \;\; \|x\|^2 x_i, \;\; x_i x_j, \;\; x_i, \;\; 1. \tag{3}$$

Но размерность линейного пространства, задаваемого этими функциями, равна $1 + d + d(d+1)/2 + d + 1 = (d+1)(d+4)/2$.

Это рассуждение было приведено в работе [14]. Теперь приведём уточнение, придуманное Блокхаусом в [6].

Покажем, что набор функций $\{F_p, x_i, 1\}$ также является линейно независимым. Отсюда будет следовать оценка $(d+1)(d+4)/2 - d - 1 = (d+1)(d+2)/2 = C_{d+2}^2$.

Итак, пусть

$$\sum_{p \in \mathcal{S}} c_p F_p(x) + \sum_{i=1}^{d} c_i x_i + c = 0. \tag{4}$$

Заметим, что поскольку многочлен — тождественный нуль, коэффициент при $\|x\|^4$ должен равняться нулю, поэтому $\sum\limits_{p \in \mathcal{S}} c_p = 0$.

Подставляя p в эти соотношения, получаем

$$a^2 b^2 c_p + \sum_{i=1}^{d} c_i p_i + c = 0, \tag{5}$$

где p_i — это i-ая координата точки p. Умножая соотношение (5) на c_p и суммируя по всем $p \in \mathcal{S}$, получаем

$$a^2 b^2 \sum_{p \in \mathcal{S}} c_p^2 + \sum_{i=1}^{d} c_i \sum_{p \in \mathcal{S}} c_p p_i + c \sum_{p \in \mathcal{S}} c_p = 0. \tag{6}$$

Заметим, что последние два члена с левой стороны обнуляются, поэтому $\sum\limits_{p \in \mathcal{S}} c_p^2 = 0$. Откуда все $c_p = 0$, а значит и все c_i и c равны нулю, что и завершает доказательство. □

Для множеств с s расстояниями это оценка была обобщена в работах [3, 5]. Развивая этот метод, было показано, что $|\mathcal{S}| \leqslant C_{d+s}^{s}$.

В случае сферических множеств с двумя расстояниями оценку можно уменьшить ещё на 1, для этого достаточно показать, что набор построенных многочленов ещё линейно независим от многочлена $\|x\|^2 - 1$.

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{S}$ — это множество с двумя расстояниями, располагающееся на сфере в $\mathbb{R}^d$. Тогда количество точек в $\mathcal{S}$ не превосходит $d(d+3)/2$.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что точки множества $\mathcal{S}$ лежат на единичной сфере. Как и в доказательстве теоремы 1 рассмотрим многочлены задаваемые в (2). Покажем, что функции из набора $\{F_p, x_i, 1, \|x\|^2-1\}$ линейно независимы.

Пусть это не так. Тогда

$$\sum_{p\in\mathcal{S}} c_p F_p(x) + \sum_{i=1}^{d} c_i x_i + c + c'(\|x\|^2-1) = 0. \tag{7}$$

Опять же, поскольку коэффициент при $\|x\|^4$ равен 0, имеем $\sum\limits_{p\in\mathcal{S}} c_p = 0$. Поскольку $\|p\|^2-1=0$, как и раньше, подставляя в это соотношение $x=p$, $p\in\mathcal{S}$, мы получим соотношения (5).

Конец доказательства дословно совпадает с доказательством предыдущей теоремы. Мы получаем, что все c_p, все c_i и c равны нулю. А значит, и $c'=0$. □

На самом деле, теорема 2 была доказана раньше теоремы 1 и сразу для множеств с несколькими расстояниями. Приведём здесь это доказательство.

Теорема 3 (Дельсарт, Гуталс и Зейдель, [8]). *Пусть $\mathcal{S}$ — это сферическое множество с s расстояниями в $\mathbb{R}^d$. Тогда количество точек в $\mathcal{S}$ не превосходит $C_{d+s-1}^{d-1}+C_{d+s-2}^{d-1}$.*

Доказательство. Опять же, можно считать, что все точки располагаются на единичной сфере. И тогда расстоянию между двумя точками соответствует значение скалярного произведения их векторов. Поэтому можно считать, что у нас задано семейство единичных векторов, скалярные произведения которых принимают одно из s значений a_i, $i=1,\ldots,s$.

Каждой точке $p\in\mathcal{S}$ сопоставим многочлен степени s следующим образом

$$F_p(x) = \prod_{i=1}^{s}(\langle x,p\rangle - a_i). \tag{8}$$

Заметим, что $F_p(x)$ равен нулю во всех точках множества $\mathcal{S}$, кроме p, в которой он равен произведению a_i (умноженному на -1, если s нечётно). Покажем, что эти многочлены линейно независимы, причём порождаемое ими линейное подпространство пересекается с пространством многочленов вида $(\|x\|^2-1)P(x)$, где $P(x)$ многочлены степени не больше $s-2$, только по 0 (это можно интерпретировать так, как будто мы рассматриваем многочлены, определённые только на сфере). А поскольку размерность пространства многочленов степени не больше s равна C_{d+s}^d, а размерность подпространства многочленов вида $(\|x\|^2-1)P(x)$ равна размерности подпространства многочленов степени не большей $s-2$, то есть C_{d+s-2}^d, получаем, что размерность линейной оболочки $F_p(x)$ не больше, чем

$$\begin{aligned} C_{d+s}^d - C_{d+s-2}^d &= C_{d+s-1}^d + C_{d+s-1}^d - C_{d+s-2}^d = \\ &= C_{d+s-1}^d + C_{d+s-2}^d + C_{d+s-2}^{d-1} - C_{d+s-2}^d = C_{d+s-1}^d + C_{d+s-2}^{d-1}. \end{aligned} \tag{9}$$

Здесь мы пользуемся известным соотношением $C_m^n = C_{m-1}^n + C_{m-1}^{n-1}$.

Итак, пусть

$$\sum_{p\in\mathcal{S}} c_p F_p(x) + (\|x\|^2-1)P(x) = 0 \tag{10}$$

для некоторого ненулевого набора c_p и многочлена $P(x)$. Тогда, подставляя $p\in\mathcal{S}$ в качестве x, мы обнулим все слагаемые в левой части этого равенства кроме $c_pF_p(p)$. Поскольку $F_p(p)$ не равно нулю, получаем, что $c_p=0$. Поскольку это верно для всех p, получаем противоречие, что и доказывает теорему. □

5 Недавние результаты по сферическим множествам с двумя расстояниями

Один из авторов этой статьи усилил верхнюю оценку для случая сферических множеств с двумя расстояниями, когда сумма этих расстояний не превосходит π.

Теорема 4 (О. Р. Мусин [18]). *Пусть $\mathcal{S}$ — это множество с двумя расстояниями, располагающееся на единичной сфере в $\mathbb{R}^d$, причём сумма этих (угловых) расстояний не превосходит π. Тогда количество точек в $\mathcal{S}$ не превосходит $d(d+1)/2$ (то есть C_{d+1}^2).*

Доказательство. Будем считать, что скалярные произведения, соответствующие указанным расстояниям, равны a и b. Тогда условие, что сумма этих расстояний не превосходит π, эквивалентно тому, что $a+b \geqslant 0$.

Как и в предыдущих доказательствах, каждой точке $p \in \mathcal{S}$ сопоставим многочлен

$$F_p(x) = (\langle x, p\rangle - a)(\langle x, p\rangle - b). \tag{11}$$

Как мы знаем, эти многочлены линейно независимы и имеют степень 2. Покажем, что кроме этого они линейно независимы с однородными линейными функциями и многочленом $\|x\|^2 - 1$.

Пусть

$$\sum_{p\in\mathcal{S}} c_p F_p(x) + \langle v, x\rangle + c(\|x\|^2 - 1) = 0, \tag{12}$$

где без ограничения общности можно считать, что $\|v\| = 1$. Тогда, подставляя в качестве x точки $p \in \mathcal{S}$, получим следующие соотношения:

$$\sum_{p\in\mathcal{S}} c_p F_p(p) + \langle v, p\rangle = 0, \text{ то есть } c_p = \frac{-\langle v, p\rangle}{(1-a)(1-b)}. \tag{13}$$

Теперь подставим в соотношение (11) в качестве x точки v и $-v$:

$$\sum_{p\in\mathcal{S}} \frac{-\langle v, p\rangle}{(1-a)(1-b)} F_p(v) + 1 = 0; \tag{14}$$

$$\sum_{p\in\mathcal{S}} \frac{-\langle v, p\rangle}{(1-a)(1-b)} F_p(-v) - 1 = 0. \tag{15}$$

Вычитая (15) из (14), получаем

$$0 = \sum_{p\in\mathcal{S}} \frac{-\langle v, p\rangle}{(1-a)(1-b)} (F_p(v) - F_p(-v)) + 2 =$$
$$= \sum_{p\in\mathcal{S}} \frac{-\langle v, p\rangle}{(1-a)(1-b)} (-2a-2b)\langle v, p\rangle + 2 = \sum_{p\in\mathcal{S}} \frac{2(a+b)\langle v, p\rangle^2}{(1-a)(1-b)} + 2, \tag{16}$$

чего не может быть, поскольку $a+b \geqslant 0$ и, значит, $\frac{2(a+b)\langle v,p\rangle^2}{(1-a)(1-b)}$ величина неотрицательная. □

Теорема 2 даёт верхнюю оценку на мощность множества с двумя расстояниями на сфере в $\mathbb{R}^d$, равную $d(d+3)/2$. Мы уже видели, что эта оценка достигается при $d = 6$. Подобно случаю $d = 6$ строится пример для $d = 22$ [8]. Других примеров, когда достигается оценка $d(d+3)/2$, не известно.

С другой стороны, у нас есть универсальный пример сферического множества с двумя расстояниями S_d — середины рёбер симплекса. В этом случае количество точек равно $d(d+1)/2$.

В работе [18] рассматривалась задача о максимальных множествах $\mathcal{S}$ с двумя расстояниями на сфере. По теореме 4, если сумма расстояний не превосходит π, то количество точек в $\mathcal{S}$ не превосходит $d(d+1)/2$. Таким образом, остаётся рассмотреть случай $a+b<0$.

Из теоремы Лармана–РоджерсаЗейделя следует, что $b = (ka-1)/(k-1)$, где $k = 2, \ldots, \lfloor (1+\sqrt{2d})/2 \rfloor$. Далее в [18] применяется метод Дельсарта (см., например, [1]) для оценки мощности множества точек с такими расстояниями. Этот метод для $6 < d < 22$ и $23 < d < 40$ даёт оценку меньшую чем $d(d+1)/2$. Следовательно, в этих размерностях у максимального множества $a+b \geqslant 0$ и множество середин рёбер симплекса является максимальным.

Недавно в работе [4] этот результат был расширен на $d = 23$ и $40 \leqslant d \leqslant 93$ ($d \neq 46, 78$).

Заметим, что 6, 22, 46, 78 являются числами вида $(2m+1)^2-3$, где $m = 1, 2, 3, 4$. Это приводит к следующей гипотезе:

Мощность максимального сферического множества с двумя расстояниями в $\mathbb{R}^d$, *где* $d > 6$ *и* $d \neq 4m^2+4m-2$, $m \in \mathbb{N}$, *равна* $d(d+1)/2$.

Список литературы

[1] Акопян А. В., Кабатянский Г. А., Мусин О. Р. *Контактные числа, коды и сферические многочлены*, Математическое просвещение. Третья Серия. Вып. 16. 2012. С. 57–74.

[2] Ионин Ю. И. *Строго равнобедренные множества*, Математическое просвещение. Третья Серия. Вып. 15. 2011. С. 154–175.

[3] Bannai E., Bannai E., Stanton D. *An upper bound for the cardinality of an s-distance subset in real Euclidean space* II, Combinatorica. Vol. 3(2). 1983. P. 147–152.

[4] Barg A., Yu W.-H. *New bounds for spherical two-distance sets*. ArXiv: 1204.5268. 2012.

[5] Blokhuis A. *Few-Distance Sets*. CWI Tracts, vol. 7. Amsterdam: CWI. 1984.

[6] Blokhuis A. *A new upper bound for the cardinality of 2-distance sets in Euclidean space*, North-Holland Mathematics Studies. Vol. 87. 1984. P. 65–66.

[7] Croft H. T. *9-point and 7-point configurations in 3-space*, Proc. London Math. Soc. Ser. 3. Vol. 12. 1962. P. 400–424.

[8] Delsarte P., Goethals J. M., Seidel J. J. *Spherical codes and designs*, Geometriae Dedicata. Vol. 6 (3). 1977. P. 363–388.

[9] Einhorn S. J., Schoenberg I. J. *On Euclidean sets having only two distances between points*. I, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 69=Indag. Math. Vol. 28. 1966. P. 479–488.

[10] Einhorn S. J., Schoenberg I. J. *On Euclidean sets having only two distances between points*. II, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 69=Indag. Math. Vol. 28. 1966. P. 489–504.

[11] Ionin Y. J. *Isosceles sets*, The Electronic Journal of Combinatorics. Vol. 16(R141):1. 2009.

[12] Kelly L. M. *Elementary Problems and Solutions. Isosceles n-points. Solutions: E735*, Amer. Math. Monthly. Vol. 54 (4). 1947. P. 227–229.

[13] Kido H. *Classification of isosceles eight-point sets in three-dimensional Euclidean space*, European Journal of Combinatorics. Vol. 27 (3). 2006. P. 329–341.

[14] Larman D. G., Rogers C. A., Seidel J. J. *On two-distance sets in Euclidean space*, Bulletin of the London Mathematical Society. Vol. 9(3). 1977. P. 261–267.

[15] Lisoněk P. *New maximal two-distance sets*, Journal of Combinatorial Theory. Series A. Vol. 77 (2). 1997. P. 318–338.

[16] Martini H., Swanepoel K. J. *The geometry of Minkowski spaces—a survey. Part* II, Expositiones mathematicae. Vol. 22(2). 2004. P. 93–144.

[17] Martini H., Swanepoel K. J., G. Weiß. *The geometry of Minkowski spaces—a survey. Part* I, Expositiones mathematicae. Vol. 19(2). 2001. P. 97–142.

[18] Musin O. R. *Spherical two-distance sets*, Journal of Combinatorial Theory. Series A. Vol. 116(4). 2009. P. 988–995.

[19] Nozaki H. *A generalization of Larman–Rogers–Seidel's theorem*, Discrete Mathematics. Vol. 311(10). 2011. P. 792–799.

[20] Shinohara M. *Uniqueness of maximum three-distance sets in the three-dimensional Euclidean space*. Preprint.

[21] Shinohara M. *Classification of three-distance sets in two dimensional euclidean space*, European Journal of Combinatorics. Vol. 25(7). 2004. P. 1039–1058.