

А. В. Акопян  
А. А. Заславский

# Геометрические свойства кривых второго порядка

Для учащихся старших классов

*Издание 2-е, дополненное*

Москва  
Издательство МЦНМО  
2011

УДК 22.151

ББК 514

А40

Книга посвящена тем свойствам коник (кривых второго порядка), которые формулируются и доказываются на чисто геометрическом языке (проективном или метрическом).

Изложение начинается с элементарных фактов и доведено до весьма нетривиальных результатов, классических и современных. Глава 2 является содержательным дополнением к традиционному курсу евклидовой планиметрии, расширяющим математический кругозор читателя.

Авторы стремились показать преимущества чисто геометрических методов, сочетающих наглядность и логическую прозрачность. В книге имеется значительное количество задач, решение которых тренирует геометрическое мышление и интуицию.

Книга будет интересна школьникам старших классов, студентам физико-математических специальностей, преподавателям и широкому кругу любителей математики.

Первое издание вышло в 2007 г. В данное издание включены наиболее интересные результаты, полученные после этого (§ 4.5–4.7).

**Акопян А. В., Заславский А. А.**

А40 Геометрические свойства кривых второго порядка. — 2-е изд., дополн. — М.: МЦНМО, 2011. — 152 с.  
ISBN 978-5-94057-732-4

ББК 514

ISBN 978-5-94057-732-4

© Издательство МЦНМО, 2011.

# Оглавление

## Вступительные слова 5

### Глава 1. Элементарные свойства кривых второго порядка 7

- § 1.1. Определения 7
- § 1.2. Аналитическое определение и классификация кривых второго порядка 10
- § 1.3. Оптическое свойство 12
- § 1.4. Изогональное свойство коник 15
- § 1.5. Кривые второго порядка как проекции окружности 20
- § 1.6. Эксцентриситет и еще одно определение коник 22
- § 1.7. Замечательные свойства параболы 24

### Глава 2. Некоторые факты классической геометрии 31

- § 2.1. Инверсия и теорема Фейербаха 31
- § 2.2. Основные сведения о проективных преобразованиях 33
- § 2.3. Некоторые факты из геометрии треугольника 41
- § 2.4. Радикальные оси и пучки окружностей 58

### Глава 3. Проективные свойства коник 67

- § 3.1. Двойное отношение четырех точек кривой. Параметризация. Обратные теоремы Паскаля и Брианшона 67
- § 3.2. Полярное соответствие. Принцип двойственности 69
- § 3.3. Пучки кривых. Теорема Понселе 79

**Глава 4. Евклидовы свойства кривых  
второго порядка 101**

- § 4.1. Особые свойства равносторонней гиперболы 101
- § 4.2. Вписанные коники 107
- § 4.3. Нормали к конике. Окружность Иоахимсталя 117
- § 4.4. Теорема Понселе для софокусных эллипсов 119
- § 4.5. Теорема Сонда. Гиперболы Кипера и Гринберга—Мякишева 122
- § 4.6. «Новая» теорема замыкания 129
- § 4.7. Параболические многоугольники 135

**Решения задач 137**

**Предметный указатель 149**

**Список литературы 151**

## Вступительные слова

Кривые второго порядка, или коники, традиционно считаются объектом аналитической геометрии и изучаются на первых курсах технических вузов. При этом из их геометрических свойств упоминаются, в лучшем случае, только оптические. Между тем, эти кривые обладают рядом других весьма красивых свойств, большая часть которых может быть доказана методами элементарной геометрии, вполне доступными старшеклассникам. Кроме того, коники могут применяться для решения геометрических задач, на первый взгляд никак с ними не связанных. В данной работе приводятся наиболее интересные факты, связанные с кривыми второго порядка, в том числе доказанные в последнее время.

Глава 1 книги посвящена элементарным свойствам коник. Большая часть изложенных в ней фактов широко известна, но и остальные достаточно просты, так что эта глава не требует от читателя подготовки, выходящей за рамки школьной программы. Некоторые несложные, но важные утверждения предлагаются в этой главе в качестве упражнений. Мы рекомендуем читателям, прежде чем читать решения упражнений, попытаться выполнить их самостоятельно. Это облегчит понимание дальнейших частей книги. Глава 2 носит вспомогательный характер. В ней изложены некоторые факты из классической геометрии, нужные для понимания последующих глав, которые в школе не изучаются в достаточном объеме. В главе 3 излагаются общие для всех ко-

ник проективные свойства, к числу которых относятся и довольно сложные, например теоремы о пучках коник. Наконец, глава 4 посвящена метрическим свойствам, которые, как правило, присущи только коникам определенного вида. Эта глава является наиболее сложной и требует для понимания достаточно глубокого ознакомления с предыдущими главами книги.

Авторы благодарят за ценные замечания И. И. Богданова и Е. Ю. Бунькову.

## ГЛАВА 1

# Элементарные свойства кривых второго порядка

### § 1.1. Определения

Пусть коза привязана веревкой к колышку. Ясно, что в этом случае она съест траву внутри круга, центром которого является колышек, а радиус равен длине веревки. Привяжем теперь козу к двум колышкам с помощью веревки и скользящего по ней кольца. В этом случае область, внутри которой коза съест траву, будет выглядеть как на рис. 1.1.

Граница этой фигуры характеризуется тем свойством, что сумма расстояний от любой ее точки до колышков равна длине веревки. Такая кривая называется *эллипсом*, а точки, в которые воткнуты колышки, — *фокусами*.

Понятно, что эллипс выглядит как «вытянутая окружность». У него, очевидно, есть две оси симметрии. Это прямая, соединяющая фокусы, и серединный перпендикуляр к отрезку с концами в фокусах. Эти две прямые называются *большой* и *малой осями эллипса*, а длины их частей, лежащих внутри эллипса, — длинами большой и малой осей. Расстояние между фокусами называют *фокусным расстоянием*.

Также очевидно, что длина веревки, к которой привязана коза, равна длине большой оси эллипса, внутренность которого она выедает.

Интуитивно ясно, что коза может добраться до любой точки внутри эллипса и пожевать там траву, а до точек вне этого эллипса она добраться не может. Но если переформулировать это утверждение на чисто математическом языке, оно уже не так очевидно.

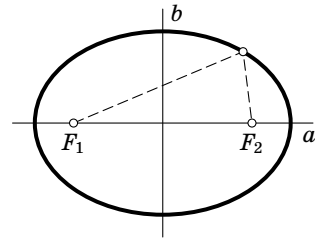


Рис. 1.1.  $F_1$  и  $F_2$  — фокусы,  $a$  и  $b$  — большая и малая оси

**Упражнение 1.** Докажите, что сумма расстояний от любой точки внутри эллипса до фокусов меньше, а от точки вне эллипса больше длины большой оси.

**Решение.** Обозначим фокусы эллипса через  $F_1$  и  $F_2$ , а точку через  $X$ . Точку пересечения луча  $F_1X$  с эллипсом обозначим через  $Y$ . Пусть сначала точка  $X$  лежит внутри эллипса. По неравенству треугольника  $F_2X < XY + YF_2$ , а значит,  $F_1X + XF_2 < F_1X + XY + YF_2 = F_1Y + F_2Y$  (рис. 1.2).

Но  $F_1Y + F_2Y$  равно длине веревки, к которой привязана коза, т. е. большой оси эллипса. Рассуждая аналогично в случае, если точка  $X$  лежит вне эллипса, получаем  $F_2Y < XY + XF_2$ . Следовательно,  $F_1X + XF_2 = F_1Y + YX + XF_2 > F_1Y + F_2Y$ .

Эллипсы часто встречаются в механике. Так, например, планета, двигаясь вокруг Солнца, описывает эллипс, причем Солнце находится в одном из его фокусов (закон Кеплера).

Эллипс является одним из примеров *кривых второго порядка*, или *коник*. Другими примерами таких кривых являются *парабола* и *гипербола*.

*Гиперболой* называется множество точек, модуль разности расстояний от которых до двух фиксированных точек, называемых *фокусами*, постоянен.

Гипербола состоит из двух дуг, которые сколь угодно близко приближаются к двум прямым, называемым *асимптотами гиперболы* (рис. 1.3). Гипербола с перпендикулярными асимптотами называется *равносторонней*.

Прямая, проходящая через фокусы гиперболы, является ее осью симметрии и называется *действительной осью*. Перпендикулярная ей прямая, проходящая через середину отрезка между фокусами, также является осью симметрии и называется *мнимой осью* гиперболы.

Если комета летит мимо Солнца и силы притяжения Солнца недостаточно, чтобы оставить комету в пределах солнечной системы, то траекторией кометы будет дуга гиперболы, фокус которой находится в центре Солнца.

*Параболой* называется множество точек, расстояния от которых до фиксированных точки и прямой равны. Эти точка и прямая называются *фокусом* и *ди-*

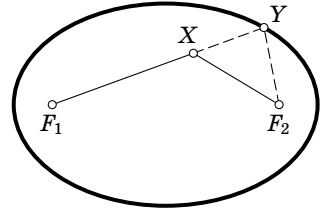


Рис. 1.2

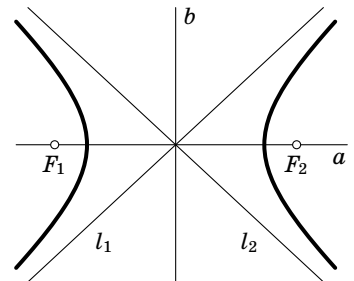


Рис. 1.3.  $F_1$  и  $F_2$  — фокусы,  $a$  и  $b$  — действительная и мнимая оси,  $l_1$  и  $l_2$  — асимптоты



ректрисой параболы соответственно. Прямая, перпендикулярная директрисе и проходящая через фокус, называется *осью параболы* (рис. 1.4). Очевидно, что эта прямая является осью симметрии параболы.

Например, камень, брошенный под углом к горизонту, летит по параболе.

В каком-то смысле, с геометрической точки зрения, парабола всего одна (как и окружность). Точнее говоря, все параболы подобны, т. е. они переводятся друг в друга поворотной гомотетией.

Рассмотрим семейство эллипсов с фокусом в фиксированной точке и проходящих через заданную точку. Второй же фокус устремим к бесконечности вдоль какого-то направления. Тогда эти эллипсы будут стремиться к параболе с тем же фокусом и осью, параллельной направлению, вдоль которого мы уводили второй фокус. Аналогичный эксперимент можно повторить и для гипербол. Таким образом, парабола является предельным случаем как эллипса, так и гиперболы.

**Упражнение 2.** Сформулируйте и докажите для параболы и гиперболы утверждения, аналогичные утверждению из упражнения 1.

**Решение.** Для точек внутри параболы расстояние до фокуса меньше, чем расстояние до директрисы, а для точек вне параболы наоборот (рис. 1.5).

Проекцию точки  $X$  на директрису обозначим через  $Y$ , а точку пересечения  $XY$  с параболой через  $Z$ . Через  $F$  обозначим фокус параболы. По определению параболы  $FZ = ZY$ . Если точка  $X$  лежит внутри параболы, то  $XY = XZ + ZY$ . По неравенству треугольника  $FX < FZ + ZY = XZ + ZY = XY$ . Если точка  $X$  и парабола лежат по разные стороны от директрисы, то утверждение очевидно. Пусть точка  $X$  лежит вне параболы, но по ту же сторону от директрисы, тогда  $ZY = ZX + XY$ , и по неравенству треугольника  $FZ + ZX > FX = FZ = ZY = ZX + XY$ . А значит,  $FZ > XY$ , что и требовалось доказать.

В случае с гиперболой это утверждение формулируется следующим образом: пусть модуль разности расстояний от любой точки на гиперболе до фокусов  $F_1$  и  $F_2$  равен  $d$ . Обозначим дугу гиперболы, внутри которой лежит  $F_1$ , через  $\Gamma$ . Тогда для точек  $X$  вне  $\Gamma$  величина  $XF_2 - XF_1$  меньше  $d$ , а внутри — больше.

Пусть точка  $X$  лежит внутри части, отсекаемой дугой  $\Gamma$ . Обозначим точку пересечения луча  $F_2X$  и  $\Gamma$  через  $Y$ . Получаем, что

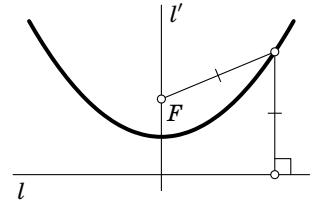


Рис. 1.4.  $F$  — фокус,  $l$  и  $l'$  — директриса и ось параболы

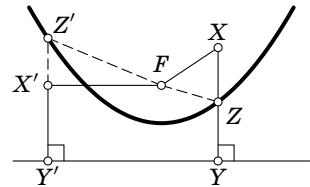


Рис. 1.5

$F_2X = F_2Y + YX$ . По неравенству треугольника  $F_1X < F_1Y + YX$ , значит,  $F_2X - F_1X > (F_2Y + YX) - (F_1Y + YX) = F_2Y - F_1Y = d$ .

Если же точка  $X$  лежит вне  $\Gamma$ , то, взяв за точку  $Y$  пересечение  $F_1X$  и  $\Gamma$ , получим  $F_1X = F_1Y + YX$ . По неравенству треугольника  $F_2X < F_2Y + YX$ . Следовательно,  $F_2X - F_1X < (F_2Y + YX) - (F_1Y + YX) = F_2Y - F_1Y = d$ .

Отметим (пока без доказательства), что и эллипс, и парабола, и гипербола обладают следующими свойствами: любая прямая пересекает каждую из этих кривых не более чем в двух точках, и из любой точки плоскости к кривой можно провести не более двух касательных. Эти свойства являются очевидными следствиями результатов § 1.5.

**Упражнение 3.** Найдите геометрическое место центров окружностей, касающихся двух данных.

**Решение.** Рассмотрим для определенности случай, когда окружности с центрами  $O_1, O_2$  и радиусами  $r_1, r_2$  лежат одна вне другой. Если окружность с центром  $O$  и радиусом  $r$  касается обеих окружностей внешним образом, то  $OO_1 = r + r_1, OO_2 = r + r_2$  и, значит,  $OO_1 - OO_2 = r_1 - r_2$ , т. е.  $O$  лежит на одной из ветвей гиперболы с фокусами  $O_1, O_2$ . Аналогично если окружность касается обеих данных внутренним образом, то ее центр лежит на другой ветви этой гиперболы. Если же одно из касаний внешнее, а другое внутреннее, то модуль разности расстояний  $OO_1$  и  $OO_2$  равен  $r_1 + r_2$ , т. е.  $O$  описывает другую гиперболу с теми же фокусами. Аналогично если одна окружность лежит внутри другой, то искомое ГМТ состоит из двух эллипсов с фокусами  $O_1, O_2$  и большими осями, равными  $r_1 + r_2$  и  $r_1 - r_2$ . Случай пересекающихся окружностей разберите самостоятельно.

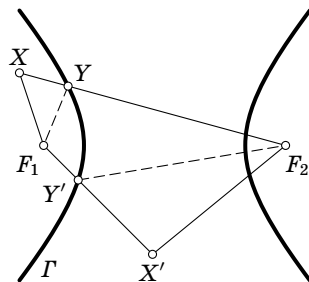


Рис. 1.6

## § 1.2. Аналитическое определение и классификация кривых второго порядка

В предыдущем параграфе мы упомянули, что эллипс, парабола и гипербола являются частными случаями кривых второго порядка. Сейчас мы уточним это утверждение и покажем, что, в определенном смысле, других кривых второго порядка не существует.

**Определение.** *Кривой второго порядка* называется множество точек, координаты которых в некоторой (а значит и в любой) декартовой системе координат удовлетворяют уравнению второго порядка:

$$(1) \quad a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0.$$

Если левая часть уравнения (1) разлагается на два множителя первой степени, то кривая является объединением двух прямых (возможно, совпадающих). В этом случае она называется *вырожденной*. Вырожденной считается также кривая, содержащая ровно одну действительную точку (например,  $x^2 + y^2 = 0$ ).

В курсе аналитической геометрии показывается (см., например, [1]), что для любой невырожденной кривой существует система координат, в которой ее уравнение имеет достаточно простой вид. Опишем основную идею этого упрощения.

Вначале совершим поворот осей координат на угол  $\varphi$ . Это значит, что в уравнении (1) координаты  $x$  и  $y$  надо заменить соответственно на  $x \cos \varphi - y \sin \varphi$  и  $x \sin \varphi + y \cos \varphi$ . Выбирая значение  $\varphi$ , можно добиться того, что коэффициент при произведении  $xy$  станет равен нулю. Затем перенесем начало координат в точку  $(x_0, y_0)$ , т. е. заменим  $x$  на  $x + x_0$  и  $y$  на  $y + y_0$ . Выбором значений  $(x_0, y_0)$  можно добиться того, что уравнение (1) примет один из следующих канонических видов (I), (II), (III).

Непосредственное вычисление показывает, что кривая

$$(I) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a \geq b > 0,$$

является *эллипсом* с центром в начале координат, фокусами в точках  $(\pm\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$  и большой и малой полуосями (т. е. половинами длин соответствующих осей), равными соответственно  $a$ ,  $b$ . В частном случае  $a = b$  эллипс (I) является окружностью.

Кривая

$$(II) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > 0, b > 0,$$

является *гиперболой*, пересекающей свою действительную ось в двух точках, расстояние между которыми равно  $2a$ . Величина  $a$  называется действительной, а  $b$  — мнимой полуосью гиперболы. Прямые  $x/y = \pm a/b$  являются асимптотами гиперболы, а точки  $(\pm\sqrt{a^2 + b^2}, 0)$  — ее фокусами. При  $a = b$  гипербола (II) будет равносторонней.

В случае

$$(III) \quad y^2 = 2px, \quad p > 0,$$

кривая является параболой, ось которой совпадает с осью абсцисс, фокус находится в точке  $(p/2, 0)$ , а уравнение директрисы  $x = -p/2$ .

Кривая

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$$

называется *мнимым эллипсом* и не содержит ни одной действительной точки.

В дальнейшем, если не оговорено противное, кривая второго порядка подразумевается невырожденной и не мнимой.

**Задача 1.** Докажите, что уравнение  $y = 1/x$  задает гиперболу, и найдите ее фокусы.

### § 1.3. Оптическое свойство

Как известно, если луч света падает на зеркальную поверхность, то отражается он от нее под таким же углом, под которым упал. Это связано с так называемым принципом Ферма, гласящим, что свет всегда выбирает кратчайший путь. Давайте докажем, что этот путь действительно будет кратчайшим.

Итак, дана прямая  $l$  и точки  $F_1$  и  $F_2$ , лежащие по одну сторону от нее. Требуется найти такую точку  $P$  на прямой, что сумма расстояний от  $P$  до  $F_1$  и  $F_2$  будет минимальной. Отразив  $F_2$  относительно прямой  $l$ , получим точку  $F'_2$ . Очевидно, что  $F_2X = F'_2X$  для любой точки  $X$  на прямой  $l$ . Поэтому нам достаточно найти такую точку  $P$ , что сумма расстояний от  $P$  до  $F_1$  и  $F'_2$  будет как можно меньше. Очевидно, минимум достигается, когда точка  $P$  лежит на отрезке  $F_1F'_2$ , пересекающем прямую  $l$ . Тогда требуемые углы, очевидно, равны (рис. 1.7).

**Упражнение 1.** а) Когда достигается максимум модуля разности расстояний от точки  $P$  до точек  $F_1$  и  $F_2$ , лежащих по разные стороны от прямой  $l$ ?

б) Пусть даны две прямые  $l$  и  $l'$  и точка  $F$ , не лежащая на них. Найдите такую точку  $P$  на прямой  $l$ , что разность расстояний от нее до прямой  $l'$  и до точки  $F$  (взятая со знаком) максимальна.

**Решение.** а) Обозначим через  $F'_2$  точку, симметричную  $F_2$  относительно прямой  $l$ . Очевидно, что  $F_2X = F'_2X$  для любой точки  $X$  на прямой  $l$ . Нам достаточно найти такую точку  $P$ , что разность расстояний от  $P$  до  $F_1$  и  $F'_2$  будет как можно больше. Из неравенства треугольника следует что  $|F_1P - F'_2P| < F_1F'_2$ . И достигается этот максимум тогда и только тогда, когда точки  $F_1, F'_2, P$  лежат на одной прямой. Поскольку точки  $F_2$  и  $F'_2$  симметричны, углы, которые образуют прямые  $F_1P$  и  $F_2P$  с прямой  $l$ , равны (рис. 1.8).

б) Обозначим через  $F'$  точку, симметричную  $F$  относительно  $l$ . Выберем ту из точек  $F$  и  $F'$ , расстояние от которой до прямой  $l'$

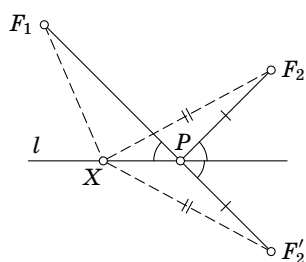


Рис. 1.7

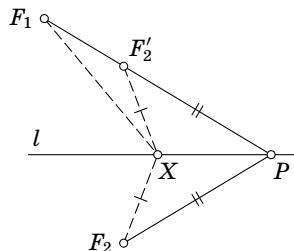


Рис. 1.8

минимально (расстояние берется со знаком). Пусть это точка  $F$ . Расстояние от  $F$  до  $l'$  обозначим через  $d$ . Тогда для любой точки  $P$  на прямой  $l$  расстояние до  $l'$  не больше чем  $PF + d$ . А значит, требуемая в задаче разность всегда не превосходит  $d$ . С другой стороны, она равна в точности  $d$ , когда точка  $P$  лежит на перпендикуляре к  $l'$ , проведенном из точки  $F$  (рис. 1.9).

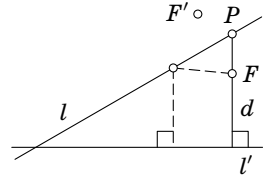


Рис. 1.9

Стоит также отметить, что если в п. а) прямая  $F_1F_2'$  параллельна  $l$ , а в п. б) прямая  $l'$  перпендикулярна  $l$ , то рассматриваемого максимума не существует (он достигается на бесконечности).

Теперь сформулируем одно из важнейших свойств коник — так называемое оптическое свойство.

**Теорема 1.1 (оптическое свойство эллипса).** Пусть прямая  $l$  касается эллипса в точке  $P$ . Тогда прямая  $l$  — это внешняя биссектриса угла  $F_1PF_2$  (рис. 1.10).

**Доказательство.** Пусть  $X$  — произвольная точка на прямой  $l$ , отличная от  $P$ . Так как  $X$  лежит вне эллипса, мы имеем  $XF_1 + XF_2 > PF_1 + PF_2$ , т. е. из всех точек прямой  $l$  точка  $P$  имеет наименьшую сумму расстояний до  $F_1$  и  $F_2$ . Но в силу вышесказанного это означает, что углы, образованные прямыми  $PF_1$  и  $PF_2$  с  $l$ , равны.  $\square$

**Упражнение 2.** Сформулируйте и докажите оптическое свойство для парабол и гипербол.

**Решение.** Для парабол оптическое свойство формулируется следующим образом. Пусть прямая  $l$  касается параболы в точке  $P$ . Проекцию точки  $P$  на директрису обозначим через  $P'$ . Тогда  $l$  является биссектрисой угла  $FPP'$  (рис. 1.11).

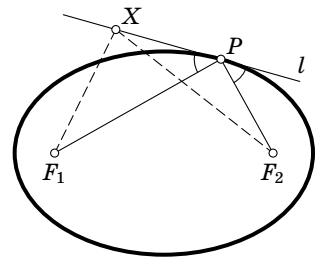


Рис. 1.10

Предположим, что биссектриса угла  $FPP'$  (обозначим ее через  $l'$ ) пересекает параболу еще в какой-нибудь точке. Обозначим эту точку через  $Q$ , а ее проекцию на директрису — через  $Q'$ . По определению параболы  $FQ = QQ'$ . С другой стороны, треугольник  $FPP'$  равнобедренный, и биссектриса угла  $P$  — это серединный перпендикуляр к  $FP'$ . А значит, для любой точки  $Q$ , лежащей на этой биссектрисе, выполняется равенство  $QP' = QF = QQ'$ . Но этого не может быть, так как  $Q'$  — единственная точка на директрисе параболы, в которой достигается минимум расстояния до точки  $Q$ .

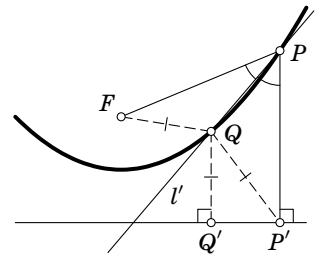


Рис. 1.11

Теперь сформулируем оптическое свойство для гиперболы.

Если прямая  $l$  касается гиперболы в точке  $P$ , то  $l$  является биссектрисой угла  $F_1PF_2$ , где  $F_1$  и  $F_2$  — фокусы гиперболы (рис. 1.12).

Предположим, что биссектриса  $l'$  угла  $F_1PF_2$  пересекает гиперболу еще в какой-нибудь точке  $Q$  (лежащей на той же дуге, что и  $P$ ). Для удобства будем считать, что точка  $P$  лежит на дуге, которая ближе к фокусу  $F_1$ .

Обозначим через  $F'_1$  точку, симметричную  $F_1$  относительно  $l'$ . Тогда  $F_1Q = QF'_1$ ,  $F_1P = PF'_1$ ; кроме того, точки  $F_2$ ,  $F'_1$  и  $P$  лежат на одной прямой. Итак,  $F_2P - PF_1 = F_2Q - F_1Q$ . В силу вышеуказанных равенств получаем  $F_2F'_1 = F_2P - PF_1 = F_2Q - F_1Q$ . Но по неравенству треугольника  $F_2F'_1 > F_2Q - QF'_1$ .

Можно также получить доказательства этих утверждений, аналогичные доказательству оптического свойства для эллипса. Для этого достаточно воспользоваться результатами упражнения 1.

Оптическое свойство параболы было известно еще древним грекам. Скажем, Архимед, расположив много медных щитов так, что они образовали параболическое зеркало, сжег осаждавший Сиракузы флот римлян.

**Упражнение 3.** Рассмотрим семейство софокусных коник (так называются коники, у которых фокусы совпадают). Докажите, что любые гипербола и эллипс из этого семейства пересекаются под прямыми углами (углом между двумя кривыми называется угол между касательными к ним в данной точке их пересечения, см. рис. 1.13).

**Решение.** Пусть эллипс и гипербола с фокусами  $F_1$  и  $F_2$  пересекаются в точке  $P$ . Тогда касательные к ним в этой точке будут биссектрисами внешнего и внутреннего углов  $F_1PF_2$  соответственно. Следовательно, они будут перпендикулярны.

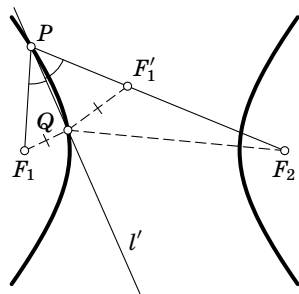


Рис. 1.12

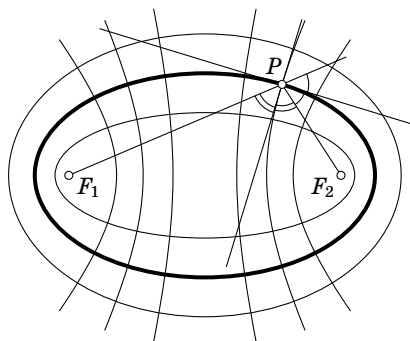


Рис. 1.13

**Теорема 1.2.** Пусть хорда  $PQ$  содержит фокус  $F_1$  эллипса,  $R$  — точка пересечения касательных к эллипсу в точках  $P$  и  $Q$ . Тогда  $R$  — это центр вневписанной окружности треугольника  $F_2PQ$ , а  $F_1$  — это точка касания этой окружности со стороной  $PQ$  (рис. 1.14).

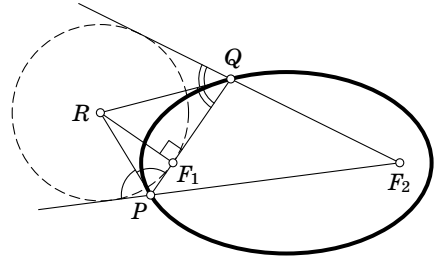


Рис. 1.14

**Доказательство.** В силу оптического свойства  $PR$  и  $QR$  — это биссектрисы внешних углов треугольника  $F_2PQ$ . А значит,  $R$  — центр его вневписанной окружности. Точка касания вневписанной окружности со стороной (обозначим ее через  $F'_1$ ) вместе с противоположной вершиной  $F_2$  делят периметр треугольника пополам, т. е.  $F'_1P + PF_2 = F_2Q + QF'_1$ . Но этим свойством обладает  $F_1$ , и такая точка только одна. Значит,  $F'_1$  и  $F_1$  совпадают.  $\square$

**Следствие.** Если точку пересечения касательных к эллипсу в концах хорды, содержащей фокус, соединить с этим фокусом, получившаяся прямая будет перпендикулярна хорде.

В случае гиперболы теорема 1.2 тоже верна, но вместо вневписанной окружности надо рассматривать вписанную.

### § 1.4. Изогональное свойство коник

Оптическое свойство позволяет элементарно доказать совсем удивительные свойства.

**Теорема 1.3.** Проведем из любой точки  $P$ , лежащей вне эллипса, две касательные к нему. Пусть они касаются эллипса в точках  $X$  и  $Y$ . Тогда углы  $F_1PX$  и  $F_2PY$  равны ( $F_1$  и  $F_2$  — фокусы эллипса).

**Доказательство.** Пусть  $F'_1, F'_2$  — точки, симметричные  $F_1$  и  $F_2$  относительно  $PX$  и  $PY$  соответственно (рис. 1.15).

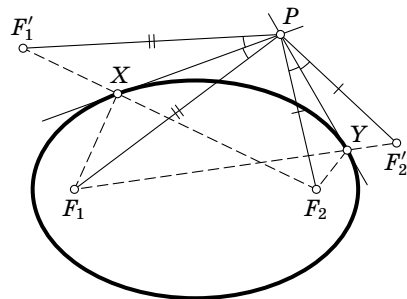


Рис. 1.15

Тогда  $PF'_1 = PF_1$  и  $PF'_2 = PF_2$ . Кроме того, точки  $F_1$ ,  $Y$  и  $F'_2$  лежат на одной прямой (в силу оптического свойства). То же самое верно и для точек  $F_2$ ,  $X$  и  $F'_1$ . Получаем  $F_2F'_1 = F_2X + XF_1 = F_2Y + YF_1 = F'_2F_1$ . Следовательно, треугольники  $PF_2F'_1$  и  $PF_1F'_2$  равны (по трем сторонам). А значит,

$$\angle F_2PF_1 + 2\angle F_1PX = \angle F_2PF'_1 = \angle F_1PF'_2 = \angle F_1PF_2 + 2\angle F_2PY.$$

Отсюда получаем, что  $\angle F_1PX = \angle F_2PY$ , что и требовалось<sup>1</sup>. □

Из рис. 1.16 видно, что аналогичное свойство выполнено для гиперболы<sup>2</sup>.

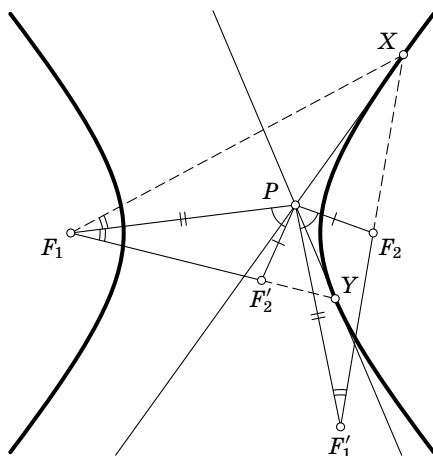


Рис. 1.16

Пусть теперь эллипс (гипербола) с фокусами  $F_1$ ,  $F_2$  вписан в треугольник  $ABC$ . Из доказанного утверждения следует, что  $\angle BAF_1 = \angle CAF_2$ ,  $\angle ABF_1 = \angle CBF_2$  и  $\angle ACF_1 = \angle BCF_2$ .

В § 2.3 будет показано, что для любой (за редким исключением) точки плоскости  $X$  существует единственная такая точка  $Y$ , что  $X$  и  $Y$  являются фокусами коники, касающейся всех сторон треугольника. Такая точка  $Y$  называется *изогонально сопряженной* точке  $X$  относительно треугольника.

Из конструкции, с помощью которой мы доказали теорему 1.3, можно получить еще один интересный результат. Поскольку треугольники  $PF_2F'_1$  и  $PF'_2F_1$  равны, равны углы  $\angle PF'_1F_2$  и  $\angle PF_1F'_2$ . Получаем

$$\angle PF_1X = \angle PF'_1F_2 = \angle PF_1F'_2 = \angle PF_1Y.$$

1. Мы рассмотрели случай, когда  $F_1$ ,  $F_2$  лежат внутри угла  $F'_1PF'_2$ , причем  $F_1$  лежит внутри угла  $F_2PF'_1$ . В других случаях рассуждения аналогичны.
2. Предлагаем читателям разобрать два возможных случая: точки касания на одной ветви и на разных.



Таким образом, доказана следующая теорема, являющаяся обобщением теоремы 1.2.

**Теорема 1.4.** В обозначениях теоремы 1.3 прямая  $F_1P$  является биссектрисой угла  $XF_1Y$  (рис. 1.17).

**Теорема 1.5.** Геометрическим местом точек, из которых данный эллипс виден под прямым углом (т. е. проведенные к нему из этой точки касательные перпендикулярны), является окружность с центром в центре эллипса (рис. 1.18).

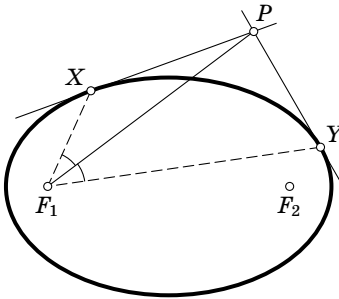


Рис. 1.17

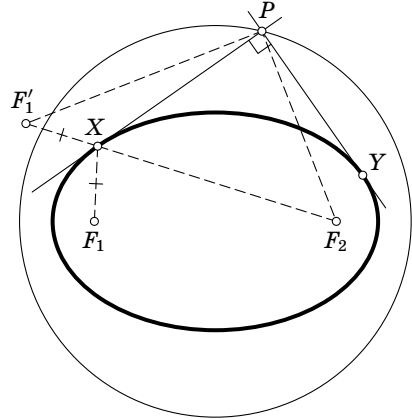


Рис. 1.18

**Доказательство.** Обозначим фокусы этого эллипса через  $F_1$  и  $F_2$ . Пусть касательные к эллипсу в точках  $X$  и  $Y$  пересекаются в точке  $P$ . Отразим  $F_1$  относительно  $PX$ . Полученную точку обозначим через  $F'_1$ . Тогда из теоремы 1.3 следует, что  $\angle XPY = \angle F'_1PF_2$  и  $F'_1F_2 = F_1X + F_2X$ , т. е. длина отрезка  $F'_1F_2$  равна большой оси эллипса (длине веревки, к которой привязана коза). Угол  $F'_1PF_2$  прямой тогда и только тогда, когда  $F'_1P^2 + F_2P^2 = F'_1F_2^2$  (по теореме Пифагора). Следовательно, угол  $XPY$  прямой тогда и только тогда, когда сумма  $F_1P^2 + F_2P^2$  равна квадрату большой оси эллипса. Но, как легко показать, это условие определяет окружность. Действительно, пусть точка  $F_1$  имеет декартовы координаты  $(x_1, y_1)$ , а  $F_2$  соответственно  $(x_2, y_2)$ . Тогда координаты искомых точек  $P$  будут удовлетворять условию

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = C,$$

где  $C$  — это квадрат большой оси. Но поскольку коэффициенты при  $x^2$  и  $y^2$  равны (а именно 2) и коэффициент при  $xy$  равен 0, множеством точек, удовлетворяющих этому уравнению, будет окружность. Легко понять из соображений симметрии, что центром этой окружности будет середина отрезка  $F_1F_2$ .  $\square$

Для гиперболы такая окружность существует, вообще говоря, не всегда. Когда угол между асимптотами гиперболы острый, радиус окружности будет мнимым. Если асимптоты перпендикулярны, то окружность вырождается в точку — центр гиперболы.

**Примечание.** Пусть даны точки  $P_1, P_2, \dots, P_n$  и числа  $k_1, k_2, \dots, k_n$  и  $C$ . Геометрическим местом точек  $X$ , удовлетворяющих уравнению  $k_1XP_1^2 + k_2XP_2^2 + \dots + k_nXP_n^2 = C$ , будет окружность. Эта окружность называется *окружностью Ферма—Аполлония*. Понятно, что иногда она будет мнимого радиуса (когда?).

**Теорема 1.6.** Пусть на эллипс  $\alpha$  накинута нить, которую натянули с помощью карандаша. Тогда карандаш при вращении вокруг эллипса опишет другой эллипс, софокусный с данным эллипсом  $\alpha$  (рис. 1.19).

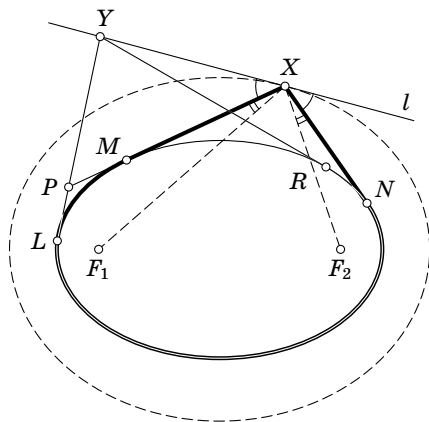


Рис. 1.19

**Доказательство.** Очевидно, что получившаяся фигура (обозначим ее через  $\alpha_1$ ) будет иметь гладкую границу. Покажем, что в каждой точке  $X$  на фигуре  $\alpha_1$  касательная будет совпадать с биссектрисой внешнего угла  $F_1XF_2$ .

Пусть  $XM$  и  $XN$  — касательные к  $\alpha$ . Тогда  $\angle F_1XN = \angle F_2XM$ , а значит, биссектриса внешнего угла  $NXM$  будет совпадать с биссектрисой внешнего угла  $F_1XF_2$ . Обозначим ее через  $l$ .

Пусть  $Y$  — произвольная точка на прямой  $l$ ,  $YL$  и  $YR$  — касательные к  $\alpha$ , причем они проведены с тех же сторон, как показано на рис. 1.19. В дальнейших рассуждениях будет использоваться, что точка  $Y$  лежит «слева» от  $X$ , другой случай рассматривается аналогично.

Обозначим через  $P$  точку пересечения прямых  $XM$  и  $YL$ . Легко понять, что  $YN < YR + \cup RN$ , а  $\cup LM < LP + PM$ . Кроме того, поскольку

ку  $l$  — внешняя биссектриса угла  $NXP$ , имеем  $PX + XN < PY + YN$ . А значит,

$$\begin{aligned} MX + XN + \cup NM &< MX + XN + \cup NL + LP + PM = \\ &= PX + XN + \cup NL + LP < PY + YN + \cup NL + LP = \\ &= LY + YN + \cup NL < LY + YR + \cup RN + \cup NL = LY + YR + \cup RL \end{aligned}$$

(здесь под дугами подразумеваются дуги, по которым идет нить). Следовательно, точка  $Y$  будет вне фигуры  $\alpha_1$ . То же верно для любой точки  $Y$  на прямой  $l$ . Получается, что  $\alpha_1$  содержит единственную точку прямой  $l$ , т. е. касается этой прямой. Из доказанного также сразу следует, что полученная кривая выпукла.

Итак, сумма расстояний до фокусов  $F_1$  и  $F_2$  в любой момент времени не меняется. Из этого можно сделать вывод, что она постоянна, а значит, траектория карандаша совпадает с эллипсом.

Строго это можно доказать так. Пусть точка  $X$  лежит вне эллипса. Поставим карандаш в точку  $X$  и натянем нить вокруг него и эллипса. Пусть  $f(X)$  — длина такой нити, а  $g(X) = F_1X + F_2X$  (точку мы понимаем как пару ее координат; таким образом, и функции  $f$  и  $g$  зависят от пары действительных чисел). Можно показать, что эти функции непрерывно дифференцируемы, причем векторы  $\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$  и  $\text{grad } g = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}\right)$  отличны от нуля во всех точках. Тогда по теореме о неявной функции кривая, описываемая карандашом при фиксированной длине нити (т. е. линия уровня функции  $f$ ), гладкая (непрерывно дифференцируемая). Отсюда следует, что кривую можно параметризовать дифференцируемой функцией  $R = R(t)$  (это опять же пара координатных функций  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ), вектор производной которой отличен от нуля. Выше фактически доказано, что касательный к кривой вектор  $\frac{dR}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$  касается линии уровня функции  $g$ , т. е. ортогонален вектору  $\text{grad } g(R)$  в точке  $R = R(t)$ . Рассмотрим функцию  $g(R(t))$ . Ее производная равна

$$\frac{dg(R(t))}{dt} = \frac{\partial g}{\partial x} \frac{dx(t)}{dt} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{dy(t)}{dt} \equiv 0$$

(это запись упомянутой выше ортогональности), т. е. функция  $g(R(t))$  — константа. Это и означает, что наша кривая лежит на эллипсе с теми же фокусами. Поскольку на любом луче, исходящем из  $F_1$ , должна лежать точка нашей кривой, она совпадает с эллипсом.  $\square$

**Задача 2.** Пусть вокруг коники с фокусом  $F$  описан  $2n$ -угольник, стороны которого окрашены попеременно в черный и белый цвета. Докажите, что сумма углов, под которыми из  $F$  видны черные стороны многоугольника, равна  $180^\circ$ .

**Задача 3.** В выпуклый четырехугольник вписан эллипс, фокусы которого лежат на диагоналях (разных) четырехугольника. Докажите, что произведения противоположных сторон равны.

## § 1.5. Кривые второго порядка как проекции окружности

Проведем через центр окружности перпендикуляр к ее плоскости и возьмем на нем точку  $S$ . Прямые, соединяющие  $S$  с точками окружности, образуют конус. Рассмотрим сначала сечение конуса плоскостью  $\pi$ , пересекающей все его образующие и не перпендикулярной оси симметрии.

Впишем в конус два шара, касающиеся плоскости  $\pi$  в точках  $F_1$  и  $F_2$  (рис. 1.20).

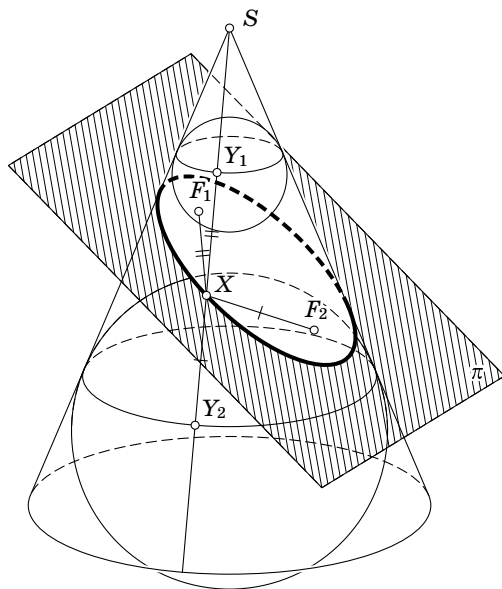


Рис. 1.20

Пусть  $X$  — произвольная точка на линии пересечения конуса с плоскостью  $\pi$ . Проведем через  $X$  образующую  $SX$  и найдем точки  $Y_1$ ,  $Y_2$  ее пересечения с вписанными шарами. Тогда  $XF_1 = XY_1$ ,  $XF_2 = XY_2$  как отрезки касательных к шарам, проведенных из одной точки. Следовательно,  $XF_1 + XF_2 = XY_1 + XY_2 = Y_1Y_2$ . Но  $Y_1Y_2$  — это отрезок образующей, заключенный между двумя плоскостями, перпендикулярными оси конуса, и его длина не зависит от выбора точки  $X$ . Значит, линия пересечения конуса с плоскостью  $\pi$  является эллипсом. Отношение его полуосей зависит от наклона секущей плоскости и, очевидно, может принимать любые значения. Следовательно, любой эллипс может быть получен как центральная проекция окружности.

Аналогично доказывается, что если секущая плоскость параллельна двум образующим конуса, то в сечении получается гипербола (рис. 1.21).

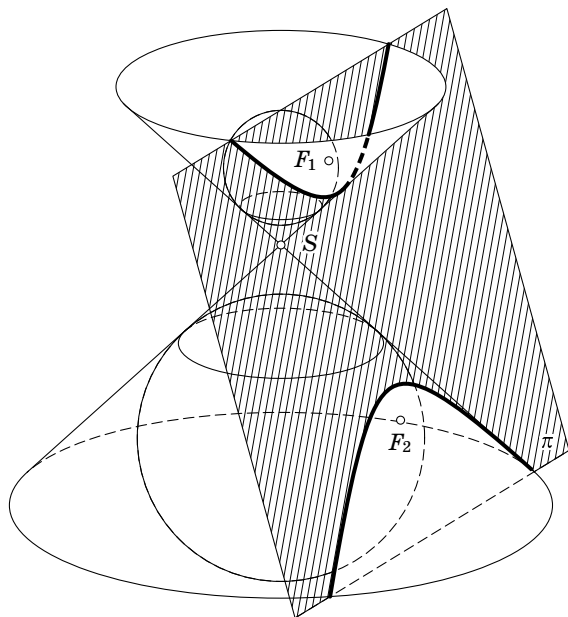


Рис. 1.21

Наконец, рассмотрим случай, когда секущая плоскость параллельна одной образующей (рис. 1.22).

Впишем в конус сферу, касающуюся этой плоскости  $\pi$  в точке  $F$ . Эта сфера касается конуса по окружности, лежащей в плоскости  $\sigma$ .

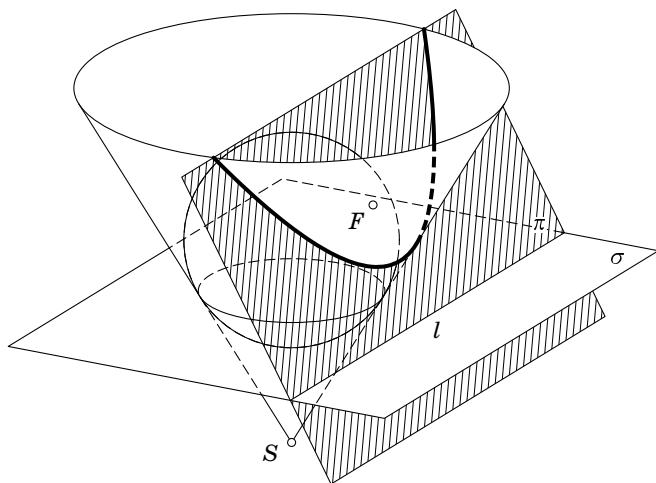


Рис. 1.22

Обозначим через  $l$  линию пересечения плоскостей  $\pi$  и  $\sigma$ . Возьмем произвольную точку  $X$  сечения конуса плоскостью  $\pi$  и найдем точку  $Y$  пересечения образующей  $SX$  с плоскостью  $\sigma$  и проекцию  $Z$  точки  $X$  на прямую  $l$ . Тогда  $XF = XY$  как касательные к сфере. С другой стороны, точки  $Y$  и  $Z$  лежат в плоскости  $\sigma$ , угол между  $XY$  и  $\sigma$  равен углу между образующей конуса и плоскостью, перпендикулярной его оси, а угол между  $XZ$  и  $\sigma$  — углу между плоскостями  $\pi$  и  $\sigma$ . В силу выбора плоскости  $\pi$  эти углы равны. Значит,  $XY = XZ$  как наклонные, образующие равные углы с плоскостью  $\sigma$ . Следовательно,  $XF = XZ$ , и точка  $X$  лежит на параболе с фокусом  $F$  и директрисой  $l$ .

Таким образом, всякая невырожденная кривая второго порядка может быть получена как сечение конуса. Поэтому такие кривые называют также *коническими сечениями* или просто *кониками*.

Надо сказать, что если вместо конуса будет цилиндр, то абсолютно такими же рассуждениями можно показать, что его сечением будет эллипс. Соответственно, эллипс может быть получен как параллельная проекция окружности.

**Упражнение 1.** Найдите геометрическое место середин хорд эллипса, параллельных данному направлению.

**Решение.** Рассмотрим эллипс как параллельную проекцию окружности. Тогда параллельным хордам эллипса и их серединам соответствуют параллельные хорды окружности и их середины, лежащие на диаметре окружности. Следовательно, геометрическим местом середин параллельных хорд эллипса также будет некоторый его диаметр (хорда, проходящая через центр).

**Упражнение 2.** С помощью циркуля и линейки найдите фокусы данного эллипса.

**Решение.** Построим две параллельные хорды эллипса. По предыдущему упражнению прямая, соединяющая их середины, является диаметром эллипса. Построив таким образом два диаметра, мы найдем центр эллипса  $O$ . В силу симметрии эллипса окружность с центром  $O$  пересекает эллипс в четырех точках, образующих прямоугольник со сторонами, параллельными осям эллипса. Теперь фокусы эллипса можно найти как точки пересечения большой оси и окружности с центром в конце малой оси и радиусом, равным большой полуоси.

Сферы, вписанные в конус и касающиеся секущей плоскости, называются *сферами Данделена*.

## § 1.6. Эксцентриситет и еще одно определение коник

Описанная в предыдущем параграфе конструкция Данделена дает еще одно важное свойство коник.

Пусть плоскость  $\pi$  пересекает все образующие кругового конуса с вершиной  $S$ . Впишем в конус сферу, касающуюся  $\pi$  в точке  $F_1$ . Как и в случае с параболой, проведем плоскость  $\sigma$  через точки касания. Прямую, по которой пересекаются  $\pi$  и  $\sigma$ , обозначим через  $l$ . Пусть  $X$  принадлежит конике, образующейся при пересечении конуса и плоскости  $\pi$ . Обозначим через  $Y$  точку пересечения прямой  $SX$  с плоскостью  $\sigma$ , а через  $Z$  проекцию  $X$  на прямую  $l$ . Покажем, что отношение  $XU$  к  $XZ$  постоянно, т. е. не зависит от выбора точки  $X$ .

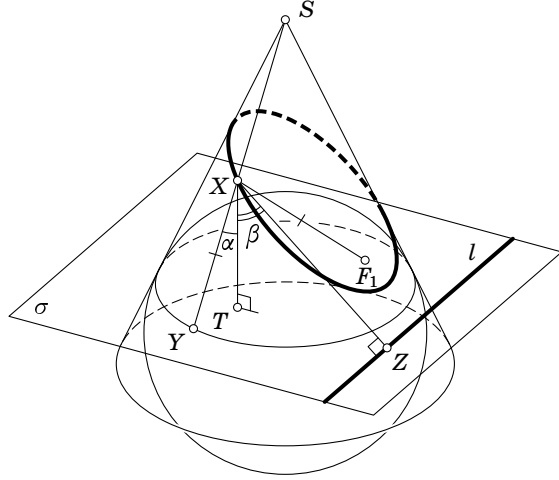


Рис. 1.23

Обозначим через  $T$  проекцию  $X$  на плоскость  $\sigma$ . Отношение  $XT$  к  $XU$  не будет зависеть от выбора точки  $X$  и будет равняться косинусу угла между образующей конуса и его осью (обозначим этот угол через  $\alpha$ ). Отношение  $XT$  к  $XZ$  тоже не зависит от выбора точки  $X$  и равно косинусу угла между плоскостью  $\pi$  и осью конуса (обозначим этот угол через  $\beta$ ). Следовательно,

$$\frac{XY}{XZ} = \frac{XY}{XT} \cdot \frac{XT}{XZ} = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}.$$

Поскольку  $XF_1$  и  $XU$  равны (так как это просто-напросто касательные к сфере, проведенные из точки  $X$ ), отношение  $XF_1$  к  $XZ$  постоянно.

Таким образом, для любой коники существует такая прямая  $l$ , что для любой точки на конике отношение расстояний до фокуса и этой прямой постоянно. Это отношение называется *эксцентриситетом* конической кривой, а прямые *директрисами*. Директрис у эллипса и гиперболы две (по одной для каждого фокуса).

Легко понять, что с помощью этого свойства можно сформулировать еще одно определение кривых второго порядка.

Конической кривой с фокусом в точке  $F$ , директрисой  $l$  ( $F$  не лежит на  $l$ ) и эксцентриситетом  $\varepsilon$  называется множество точек, у которых отношение расстояний до  $F$  и до  $l$  равно  $\varepsilon$ .

Если  $\varepsilon > 1$ , то кривая — гипербола, если  $\varepsilon < 1$ , то эллипс, а в случае  $\varepsilon = 1$  — парабола.

**Задача 4.** Докажите, что асимптоты всех равносторонних гипербол с фокусом в  $F$ , проходящих через точку  $P$ , касаются некоторых двух окружностей (одно семейство асимптот одной окружности, другое — другой).

### § 1.7. Замечательные свойства параболы

В этом параграфе через  $F$  мы будем обозначать фокус параболы, фигурирующей в рассуждениях.

Сперва сформулируем лемму, которая еще не раз нам пригодится.

**Лемма 1.1.** Если фокус параболы отразить относительно касательной, то его образ попадет на директрису. Получившаяся точка будет проекцией точки, в которой касательная касается параболы (рис. 1.24).

**Доказательство.** Пусть прямая  $l$  касается параболы в точке  $P$ . Проекцию  $P$  на директрису обозначим через  $P'$ . Так как треугольник  $FPP'$  равнобедренный и  $l$  — биссектриса угла  $P$ ,  $l$  является осью симметрии треугольника. Значит, точка  $F$  при симметрии относительно  $l$  переходит в точку  $P'$ , лежащую на директрисе.  $\square$

**Следствие.** Проекции фокуса параболы на его касательные лежат на прямой, касающейся параболы в ее вершине (рис. 1.25).

**Лемма 1.2.** Пусть касательные к параболе в точках  $X$  и  $Y$  пересекаются в точке  $P$ . Тогда  $P$  является центром описанной окружности треугольника  $FXY$ , где  $X'$  и  $Y'$  — проекции точек  $X$  и  $Y$  на директрису параболы, а  $F$  — фокус этой параболы.

**Доказательство.** В силу леммы 1.1 эти две касательные являются серединными перпендикулярами к отрезкам  $FX'$  и  $FY'$ . Следовательно, точка их пересечения и будет центром описанной окружности треугольника  $FXY$  (рис. 1.26).  $\square$

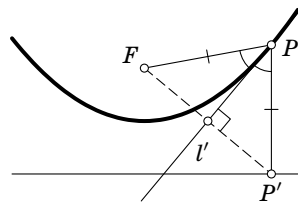


Рис. 1.24

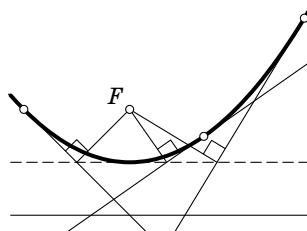


Рис. 1.25

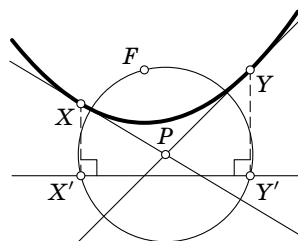


Рис. 1.26



**Следствие.** Если  $PX$  и  $PY$  — касательные к параболе, то проекция точки  $P$  на директрису будет серединой отрезка с концами в проекциях точек  $X$  и  $Y$  (рис. 1.27).

Следующая теорема аналогична теоремам 1.2 и 1.5, но только для параболы. Как выглядит множество точек, из которых парабола видна под прямым углом? Оказывается, верен следующий факт.

**Теорема 1.7.** Множество таких точек  $P$ , из которых парабола видна под прямым углом, есть директриса этой параболы. Кроме того, если  $PX$  и  $PY$  — касательные к этой параболе, то  $XU$  содержит  $F$  и  $PF$  — высота треугольника  $PXY$  (рис. 1.28).

**Доказательство.** Пусть точка  $P$  лежит на директрисе, а  $X'$  и  $Y'$  — проекции точек  $X$  и  $Y$  на директрису параболы. Тогда треугольники  $PXF$  и  $PXX'$  равны (они просто симметричны относительно  $PX$ ). Значит,  $\angle PFY = \angle PY'Y = 90^\circ$ . Аналогично  $\angle PFY = \angle PY'Y = 90^\circ$ . Кроме того,  $\angle XPY = \frac{1}{2}(\angle FPX' + \angle FPY') = 90^\circ$ . То, что других точек, обладающих этим свойством, нет, очевидно.  $\square$

Поскольку аналогичные факты верны и для остальных коник, эта теорема достаточно естественна. Однако первая часть этой теоремы имеет достаточно неожиданное обобщение, верное только для парабол. Оно нам еще пригодится в § 3.2 для доказательства теоремы Фрежье.

**Теорема 1.8.** Множество точек, из которых парабола видна под углом  $\varphi$  или  $180^\circ - \varphi$ , есть гипербола с фокусом в точке  $F$  и директрисой  $l$  (рис. 1.29).

**Доказательство.** Действительно, пусть касательные  $PX$  и  $PY$ , проведенные к параболе из точки  $P$ , образуют угол  $\varphi$ . Рассмотрим случай, когда  $\varphi > 90^\circ$ .

Проекции точек  $X$  и  $Y$  на директрису параболы обозначим через  $X'$  и  $Y'$ . Понятно, что  $\angle X'FY' = 180^\circ - \varphi$ . В силу леммы 1.2 точка  $P$  является центром описанной окружности треугольника  $FX'Y'$ . А значит,  $\angle X'PY' = 360^\circ - 2\varphi$ .

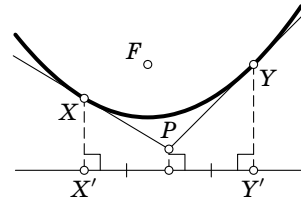


Рис. 1.27

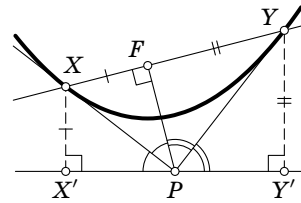


Рис. 1.28

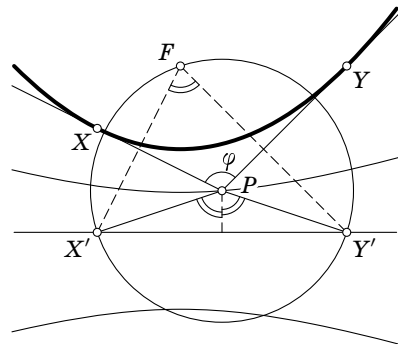


Рис. 1.29

Поэтому расстояние от  $P$  до директрисы равно  $PF |\cos(180^\circ - \varphi)| = PF |\cos \varphi|$  и  $P$  лежит на гиперболе, фокус и директриса которой совпадают с фокусом и директрисой параболы, а эксцентриситет равен  $|\cos \varphi|$  (т. е. угол между асимптотами равен  $2\varphi$ ).

То же справедливо, если угол между касательными равен  $180^\circ - \varphi$ . При этом если парабола лежит внутри острого угла между касательными, то  $P$  находится на «дальней» от  $F$  ветви гиперболы, а если внутри тупого, то на «ближней».  $\square$

Для парабол также можно сформулировать утверждение, аналогичное теоремам 1.3, 1.4.

**Теорема 1.9.** Пусть  $PX$  и  $PY$  — касательные к параболе, проведенные из точки  $P$ , а  $l$  — прямая, проходящая через  $P$  параллельно оси параболы. Тогда угол между прямыми  $PY$  и  $l$  равен  $\angle XPF$ , а треугольники  $XFP$  и  $PFY$  подобны (как следствие,  $FP$  — биссектриса угла  $XFY$ , см. рис. 1.30).

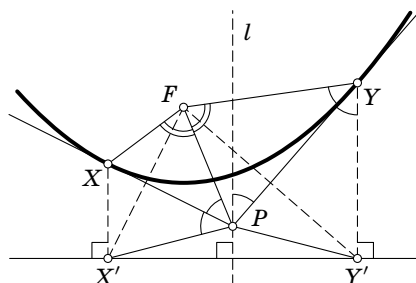


Рис. 1.30

**Доказательство.** Пусть  $X'$  и  $Y'$  — проекции точек  $X$  и  $Y$  на директрису. Тогда в силу теоремы 1.2 точки  $F$ ,  $X'$  и  $Y'$  лежат на окружности с центром в точке  $P$ . Поэтому  $\angle X'Y'F = \frac{1}{2}\angle X'PF = \angle XPF$ . С другой стороны, угол между  $PY$  и  $l$  равен углу между  $Y'F$  и  $X'Y'$ , так как прямая  $l$  перпендикулярна  $X'Y'$  (директрисе параболы), а  $Y'F$  перпендикулярно  $PY$  (более того,  $PY$  — это серединный перпендикуляр к  $Y'F$ ). Первая часть теоремы доказана.

Докажем вторую часть. Поскольку прямая  $l$  параллельна  $YY'$ , угол между  $PY$  и  $l$  равен углу  $PYY'$ , который в силу оптического свойства равен углу  $FYP$ . Таким образом,  $\angle FYP = \angle XPF$ . Аналогично  $\angle FXP = \angle YPF$ . Следовательно, треугольники  $XFP$  и  $PFY$  подобны.  $\square$

Следующая теорема является на самом деле следствием теоремы 1.9. Но мы ее докажем, воспользовавшись прямой Симсона, которая поможет нам выйти на еще более интересные свойства параболы.

**Теорема 1.10.** Пусть вокруг параболы описан треугольник  $ABC$  (т. е. парабола касается прямых  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$ ). Тогда фокус этой параболы лежит на описанной окружности треугольника  $ABC$ .

**Доказательство.** Согласно следствию из леммы 1.1 проекции фокуса на стороны лежат на одной прямой (эта прямая параллельна директрисе и лежит в два раза ближе к фокусу, чем директриса). Осталось воспользоваться леммой Симсона.

**Лемма 1.3 (Симсон).** *Проекции точки  $P$  на стороны треугольника  $ABC$  лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда точка  $P$  лежит на описанной окружности треугольника.*

**Доказательство.** Пусть  $P_a, P_b$  и  $P_c$  — проекции точки  $P$  на стороны  $BC, CA$  и  $AB$  соответственно. Мы рассмотрим случай, изображенный на рис. 1.31, остальные случаи рассматриваются аналогично.

Четырехугольник  $P C P_b P_a$  вписанный, поэтому  $\angle P P_b P_a = \angle P C P_a$ . Аналогично  $\angle P P_b P_c = \angle P A P_c$ . Точки  $P_a, P_b$  и  $P_c$  лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда  $\angle P P_b P_c = \angle P P_b P_a$ , или, что то же самое,  $\angle P A P_c = \angle P C P_a$ . Но это и означает, что точка  $P$  лежит на описанной окружности треугольника  $ABC$ . Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Обратное утверждение доказывается абсолютно так же. Если точка  $P$  лежит на описанной окружности треугольника  $ABC$ , то  $\angle P A B = \angle P C P_a = \angle P P_b P_a$  (последнее в силу того, что точки  $P, C, P_a$  и  $P_b$  лежат на окружности). Аналогично  $\angle P A B = \angle P P_b P_c$ . Следовательно, точки  $P_a, P_b$  и  $P_c$  лежат на одной прямой.  $\square$

Тем самым теорема 1.10 доказана.  $\square$

Получающаяся таким образом прямая называется *прямой Симсона* точки  $P$ .

Таким образом, точкам на описанной окружности треугольника  $ABC$  мы можем однозначно сопоставить параболу, касающуюся сторон этого треугольника. А именно, возьмем произвольную точку  $P$  на описанной окружности треугольника  $ABC$  и отразим ее относительно сторон треугольника. Получим точки  $P_A, P_B$  и  $P_C$ , лежащие на одной прямой. Парабола с фокусом в точке  $P$  и директрисой  $P_A P_C$  будет касаться всех сторон треугольника (например, стороны  $BC$  она будет касаться в точке пересечения  $BC$  с перпендикуляром к  $P_A P_C$ , см. рис. 1.32).

Прямые Симсона обладают рядом интересных свойств.

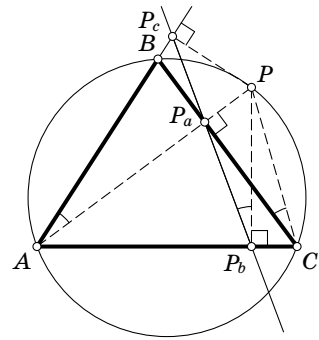


Рис. 1.31

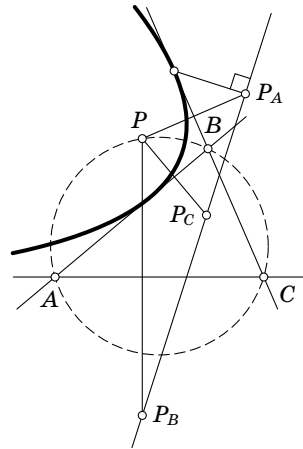


Рис. 1.32

**Лемма 1.4.** Пусть точка  $P$  лежит на описанной окружности треугольника  $ABC$ . Пусть точка  $B'$  на описанной окружности выбрана так, что прямая  $PB'$  перпендикулярна  $AC$ . Тогда прямая  $BB'$  параллельна прямой Симсона точки  $P$  (рис. 1.33).

**Доказательство.** Рассмотрим случай, изображенный на рис. 1.33, остальные случаи рассматриваются аналогично. Проекции точки  $P$  на стороны  $AB$  и  $AC$  обозначим через  $P_c$  и  $P_b$  соответственно. Тогда  $\angle ABB' = \angle APB'$  как углы, опирающиеся на дугу  $AB'$ . Поскольку четырехугольник  $AP_cP_bP$  вписанный ( $AP$  — диаметр его описанной окружности), а сумма противоположных углов вписанного четырехугольника равна  $180^\circ$ , мы имеем  $\angle APB' = \angle APP_b = 180^\circ - \angle AP_cP_b = \angle BP_cP_b$ . Следовательно, прямая  $P_bP_c$  параллельна  $BB'$ .  $\square$

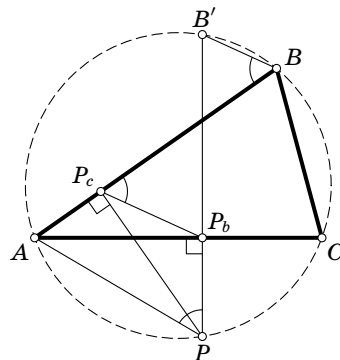


Рис. 1.33

**Следствие 1.** При вращении точки  $P$  по окружности прямая Симсона вращается в противоположную сторону, причем скорость ее вращения в два раза меньше, чем скорость изменения дуги  $PA$ .

**Следствие 2.** Прямая Симсона точки  $P$  относительно треугольника  $ABC$  делит отрезок  $RH$  (где  $H$  — ортоцентр треугольника  $ABC$ ) пополам (рис. 1.34).

**Доказательство.** Легко понять, что  $\angle ANC = 180^\circ - \angle ABC$ , а значит, точка  $H'$ , симметричная точке  $H$  относительно  $AC$ , лежит на описанной окружности треугольника  $ABC$ . Поскольку прямые  $PB'$  и  $BH'$  перпендикулярны  $AC$ , четырехугольник  $PB'VH'$  будет трапецией, причем равнобокой, поскольку он вписан. А значит, прямая, симметричная  $RH'$  относительно  $AC$  (т. е. прямой, параллельной оси симметрии трапеции), будет параллельна  $BB'$ . Следовательно, прямая  $P'H$  параллельна  $BB'$ , а значит, и прямой Симсона точки  $P$  (здесь  $P'$  — образ точки  $P$  при симметрии относительно  $AC$ ). Поскольку  $P_b$  (проекция точки  $P$  на сторону  $BC$ ) является серединой отрезка  $PP'$ , прямая Симсона будет средней линией треугольника  $HPP'$ , а значит, будет делить  $HP$  пополам.  $\square$

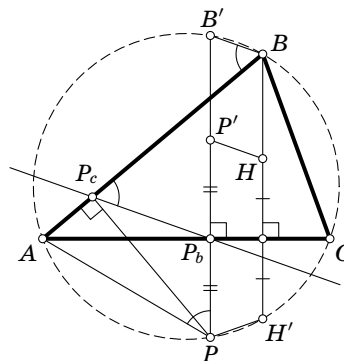


Рис. 1.34

Следствие 2 вкуче с теоремой 1.10 влечет за собой следующий очень красивый факт.

**Теорема 1.11.** Ортоцентр треугольника, описанного около параболы, лежит на ее директрисе (рис. 1.35).

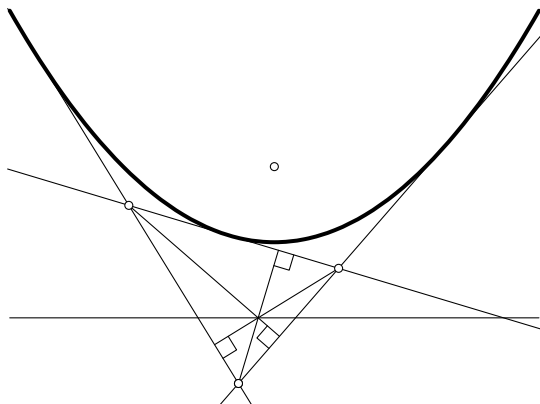


Рис. 1.35

**Задача 5.** Пусть точка  $X$  движется по параболе, нормаль к параболе в точке  $X$  (перпендикуляр к касательной) пересекает ее ось в точке  $Y$ , а  $Z$  — проекция точки  $X$  на ось. Докажите, что длина отрезка  $ZY$  не меняется.

**Задача 6.** По двум прямым дорогам с постоянными скоростями идут два пешехода. Докажите, что соединяющая их прямая все время касается некоторой параболы (дороги не параллельны, и через точку пересечения дорог пешеходы проходят не одновременно).

**Задача 7.** Парабола вписана в угол  $PAQ$ . Найдите геометрическое место середин отрезков, высекаемых сторонами угла на касательных к параболе.



## Некоторые факты классической геометрии

### § 2.1. Инверсия и теорема Фейербаха

*Инверсией* относительно окружности с центром в точке  $O$  и радиусом  $r$  называется преобразование плоскости, которое каждую точку  $A$  переводит в точку  $A'$ , лежащую на луче  $OA$  и такую, что  $OA' = \frac{r^2}{OA}$ . Саму точку  $O$  это преобразование переводит в бесконечно удаленную точку.

Очевидно, что при этом преобразовании прямые, проходящие через точку  $O$ , как множества остаются на месте.

Инверсия хороша тем, что переводит окружности, не проходящие через центр инверсии, в окружности, а окружности, проходящие через центр, — в прямые. Доказательство этих утверждений можно найти в книгах [2]–[4].

Хоть инверсия и переводит окружность в окружность, она обладает одним существенным недостатком при работе с кониками: коники в коники она, конечно, не переводит. Например, равносторонняя гипербола при инверсии относительно окружности с тем же центром, что и у этой гиперболы, переходит в *лемнискату Бернулли* (рис. 2.1). Но на основе инверсии мы чуть позже построим *полярное преобразование*, которое этим свойством обладает (переводит коники в коники).

С помощью инверсии мы докажем теорему Фейербаха и тем самым продемонстрируем мощь этого инструмента. С теоремой Фейербаха мы еще встретимся в § 4.1.

Сначала вспомним определение окружности девяти точек, или окружности Эйлера.

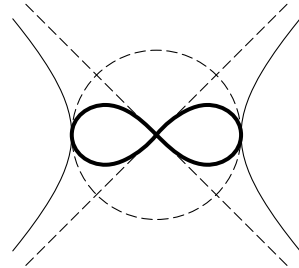


Рис. 2.1

Окружностью Эйлера или окружностью девяти точек называется окружность, проходящая через середины сторон треугольника  $ABC$ . Оказывается, она повторно пересекает стороны в основаниях высот. Кроме того, если через  $H$  обозначить ортоцентр треугольника, то середины отрезков  $AH$ ,  $BH$  и  $CH$  тоже лежат на этой окружности.

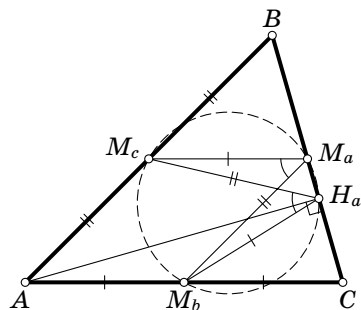


Рис. 2.2

Давайте докажем это. Пусть  $M_a$ ,  $M_b$  и  $M_c$  — середины сторон. Через  $H_a$ ,  $H_b$  и  $H_c$  обозначим основания высот (рис. 2.2).

Покажем, что углы  $M_bM_aM_c$  и  $M_bH_aM_c$  равны. Из этого будет следовать, что точка  $H_a$  лежит на окружности Эйлера.

Треугольник  $ACH_a$  прямоугольный, а значит,  $M_bH_a = M_bA$ . Аналогично  $M_cH_a = M_cA$ . Поскольку  $M_bA = M_aM_c$  и  $M_cA = M_aM_b$ , треугольники  $M_bM_aM_c$  и  $M_bH_aM_c$  равны. А значит, равны соответствующие углы. Аналогично показывается, что на окружности Эйлера лежат точки  $H_b$  и  $H_c$ .

Заметим, что основания высот треугольников  $ABC$  и  $ABH$  совпадают, а значит, совпадают и их окружности Эйлера. Следовательно, на окружности Эйлера лежат также середины отрезков  $AH$  и  $BH$ . То, что на ней также лежит середина отрезка  $HC$ , показывается аналогично.

Ну а теперь докажем теорему Фейербаха.

**Теорема 2.1 (Фейербах).** Окружность девяти точек касается вписанной и внеписанных окружностей треугольника (в случае, если треугольник равнобедренный, она совпадает с вписанной окружностью) (рис. 2.3).

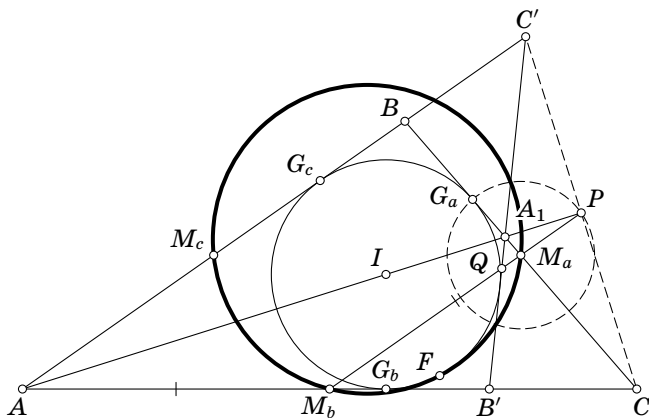


Рис. 2.3



**Доказательство.** Пусть  $G_a$ ,  $G_b$  и  $G_c$  — это точки касания вписанной окружности со сторонами. Через  $A_1$  обозначим основание биссектрисы угла  $A$ , через  $C'$  обозначим точку, симметричную  $C$  относительно  $AA_1$ . Пусть  $P$  — это точка пересечения  $AA_1$  и  $CC'$ .

Заметим, что  $P$  — середина  $CC'$ , а значит,  $P$  лежит на средней линии  $M_aM_b$ . Стоит также отметить, что

$$\begin{aligned} M_aP &= |M_aM_b - PM_b| = \frac{1}{2}|AB - AC| = \frac{1}{2}|BG_c - CG_b| = \frac{1}{2}|BG_a - CG_a| = \\ &= M_aG_a. \end{aligned}$$

Из подобия пар треугольников  $M_bM_aC$  и  $ABC$ ,  $ABA_1$  и  $PM_aA_1$  следует, что

$$\frac{M_aP}{M_aM_b} = \frac{BC'}{BA} = \frac{M_aQ}{M_aP},$$

где  $Q$  — это точка пересечения  $A_1C'$  и  $M_aM_b$ . Следовательно,  $M_aG_a^2 = M_aP^2 = M_aQ \cdot M_aM_b$ . А значит, при инверсии с центром в  $M_a$  и радиусом  $M_aG_a$  точка  $M_b$  переходит в точку, лежащую на прямой  $C'A_1$ , симметричной  $BC$  относительно биссектрисы угла  $A$ . То же самое можно сказать и про точку  $M_c$ . Таким образом, при инверсии с центром в  $M_a$  и радиусом  $M_aG_a$  окружность Эйлера переходит в прямую, касающуюся вписанной окружности, а значит, и сама окружность девяти точек касается этой окружности.

Для внеписанных окружностей теорема Фейербаха доказывается аналогично.  $\square$

Точку касания вписанной окружности и окружности Эйлера называют *точкой Фейербаха* (обозначают  $F$ ). Точками Фейербаха также иногда называют точки касания внеписанных окружностей с окружностью Эйлера (обозначают  $F_a$ ,  $F_b$  и  $F_c$ ).

## § 2.2. Основные сведения о проективных преобразованиях

Под проективными преобразованиями подразумеваются преобразования плоскости, сохраняющие прямые. При этом параллельность прямых может нарушаться. Правда, если речь идет об обычной плоскости, то сохранение параллельности является очевидным следствием взаимной однозначности преобразования. Поэтому при изучении проективных преобразований к плоскости добавляется так называемая *бесконечно удаленная* прямая. Точки этой прямой, также называемые бесконечно удаленными, считаются точками пересечения параллельных прямых, причем каждая бесконечно удаленная точка считается принадлежащей всем прямым определенного направления. Пополненная таким образом плоскость называется *проективной плоскостью*.

**Определение.** Преобразование проективной плоскости, переводящее каждую прямую (обычную или бесконечно удаленную) в прямую, называется *проективным*.

Из определения следует, что проективные преобразования образуют группу (иначе говоря, композиция двух проективных преобразований — это проективное преобразование). Отметим, что подгруппами этой группы являются группы *аффинных* преобразований, сохраняющих параллельность прямых (их можно также определить как сохраняющие бесконечно удаленную прямую), а также хорошо известные группы подобий и движений.

Проективное преобразование можно наглядно представить следующим образом. Пусть некоторый чертеж, нарисованный на стекле, проецируется из точечного источника света на стену. Тогда чертеж может подвергаться весьма существенным искажениям, однако прямыми на стекле соответствуют прямые на стене. При этом если провести через источник света плоскость, параллельную стене, то она пересечет стекло по некоторой прямой. Точкам этой прямой не соответствуют никакие обычные точки стены, поэтому ее образом следует считать бесконечно удаленную прямую стены. Аналогично, если провести через источник света плоскость, параллельную стеклу, то она пересечет стену по прямой, которую следует считать образом бесконечно удаленной прямой.

Можно показать, что приведенный пример является универсальным, т. е. любое проективное преобразование можно представить как композицию центральной проекции и движения пространства, совмещающего плоскость проекции с исходной. Следовательно, в силу результатов, доказанных в § 1.5, проективные преобразования переводят коники в коники. Действительно, любое проективное преобразование можно представить в виде композиции двух, первое из которых переводит конику в окружность. После второго эта окружность может перейти только в конику. Отсюда видно, что проективные преобразования являются мощнейшим инструментом для работы с кониками.

Заметим, что гипербола пересекает бесконечно удаленную прямую в двух точках. Эти точки задают направления, параллельные асимптотам этой гиперболы. Парабола касается бесконечно удаленной прямой в точке, которая задает направление, параллельное оси этой параболы. Ну а эллипс вообще не пересекает бесконечно удаленную прямую.

Ниже мы сформулируем несколько основных свойств проективных преобразований. Иногда вместо доказательства мы будем давать лишь пояснения. Подробные доказательства вы можете найти в книгах [2] и [3].

1. Все четырехугольники проективно эквивалентны. Точнее, для любых двух четверок точек общего положения  $A, B, C, D$  и  $A', B', C', D'$  существует единственное проективное преобразование, переводящее  $A$  в  $A'$ ,  $B$  в  $B'$ ,  $C$  в  $C'$  и  $D$  в  $D'$ .

Для доказательства достаточно проверить, что любую четверку проективным преобразованием можно перевести в квадрат и такое преобразование единственно.

Переведем точки пересечения пар прямых  $AB$  и  $CD$ , а также  $AD$  и  $BC$  в бесконечность. Тогда наша четверка точек перейдет в вершины параллелограмма. Далее аффинным преобразованием этот параллелограмм легко превратить в квадрат.

Соединим прямыми точки  $A, B, C, D$ . Через пары точек пересечения этих прямых проведем новые прямые и отметим точки их пересечения с уже проведенными прямыми и т. д. Образы всех отмеченных точек определяются однозначно и ими можно приблизить любую точку плоскости. Следовательно, искомое преобразование единственно.

Теперь покажем, что пять точек общего положения однозначно задают конику. Переведем четыре из них в квадрат, вершины которого имеют координаты  $\pm 1$ . Тогда легко проверить, что уравнения коник, проходящих через его вершины, будут иметь вид  $ax^2 + (1-a)y^2 = 1$ . Но, очевидно, через любую точку на плоскости (отличную от вершин квадрата) проходит только одна кривая, имеющая уравнение такого типа.

Ниже мы покажем, что существует единственная коника, касающаяся пяти заданных прямых общего положения.

2. Проективные преобразования сохраняют *двойные отношения* точек на прямой. Это значит, что если точки  $A, B, C, D$ , лежащие на одной прямой, переходят в точки  $A', B', C', D'$ , то

$$(AB; CD) = \frac{AC \cdot BD}{AD \cdot BC} = (A'B'; C'D').$$

Отметим, что длины отрезков берутся со знаками.

Докажем это. Как было показано выше, любое проективное преобразование можно считать центральной проекцией относительно какой-то точки. Пусть центром этой проекции будет точка  $P$  (рис. 2.4). Тогда

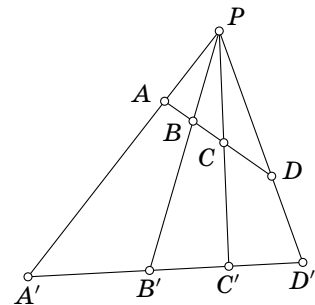


Рис. 2.4

$$\frac{AC \cdot BD}{AD \cdot BC} = \frac{S_{\triangle ACP} \cdot S_{\triangle BDP}}{S_{\triangle ADP} \cdot S_{\triangle BCP}},$$

поскольку площадь каждого из этих треугольников равна половине произведения длин рассматриваемых отрезков на расстояние от точки  $P$  до прямой, на которой все эти точки лежат. С другой стороны,

площадь каждого треугольника равна половине произведения сторон на синус угла между ними (для удобства обозначим угол между  $PA$  и  $PB$  через  $\alpha$ , между  $PB$  и  $PC$  через  $\beta$ , а между  $PC$  и  $PD$  — через  $\gamma$ ). Поэтому

$$\frac{S_{\triangle ACP} \cdot S_{\triangle BDP}}{S_{\triangle ADP} \cdot S_{\triangle BCP}} = \frac{(AP \cdot CP \cdot \sin(\alpha + \beta)) \cdot (BP \cdot DP \cdot \sin(\beta + \gamma))}{(AP \cdot DP \cdot \sin(\alpha + \beta + \gamma)) \cdot (BP \cdot CP \cdot \sin \beta)} = \frac{\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\beta + \gamma)}{\sin(\alpha + \beta + \gamma) \cdot \sin \beta}.$$

Поскольку это отношение не зависит от того, на какой прямой лежат наши точки, мы получаем

$$(A'B'; C'D') = \frac{\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\beta + \gamma)}{\sin(\alpha + \beta + \gamma) \cdot \sin \beta} = (AB; CD).$$

Это свойство позволяет определить двойное отношение четырех прямых, проходящих через одну точку, как двойное отношение точек их пересечения с произвольной прямой. Очевидно, что оно также сохраняется при проективных преобразованиях.

Двойное отношение четырех прямых  $a, b, c$  и  $d$  будем обозначать через  $(ab; cd)$ .

Из сохранения двойного отношения следует, что если известны образы трех точек прямой, то образы остальных ее точек определяются однозначно. В частности, проективное преобразование, оставляющее три точки прямой неподвижными, оставляет неподвижной всю прямую.

### 3. Теорема Паппа

**Теорема 2.2.** Если точки  $A_1, B_1, C_1$  лежат на прямой  $l_1$ , а точки  $A_2, B_2, C_2$  на прямой  $l_2$ , то точки пересечения прямых  $A_1B_2$  и  $A_2B_1$ ,  $B_1C_2$  и  $B_2C_1$ ,  $C_1A_2$  и  $C_2A_1$  лежат на одной прямой (рис. 2.5).

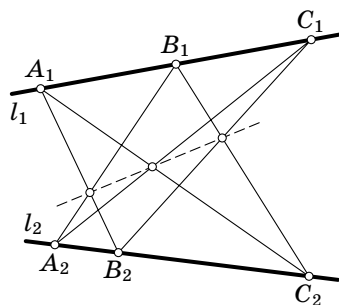


Рис. 2.5

Для доказательства достаточно увести точки пересечения пар прямых  $A_1B_2$  и  $A_2B_1$ ,  $B_1C_2$  и  $B_2C_1$  на бесконечность и воспользоваться теоремой Фалеса.

### 4. Теорема Дезарга

**Теорема 2.3.** Прямые  $A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2$ , соединяющие соответствующие вершины треугольников  $A_1B_1C_1$  и  $A_2B_2C_2$ , пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда точки пересечения прямых  $A_1B_1$  и  $A_2B_2$ ,  $B_1C_1$  и  $B_2C_2$ ,  $C_1A_1$  и  $C_2A_2$  лежат на одной прямой (рис. 2.6).

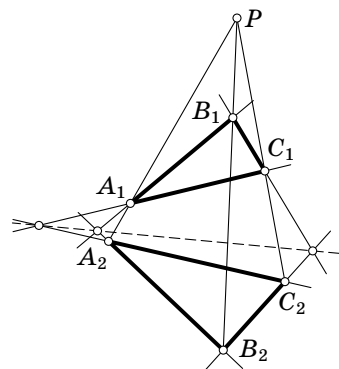


Рис. 2.6

Здесь надо проективным преобразованием перевести точки пересечения пар прямых  $A_1B_1$  и  $A_2B_2$ ,  $B_1C_1$  и  $B_2C_2$  на бесконечность и опять же воспользоваться теоремой Фалеса.

Как правило, проективные преобразования не сохраняют окружности. Однако имеют место следующие факты.

**5.** Пусть дана окружность и точка  $C$  внутри нее. Тогда существует проективное преобразование, при котором данная окружность переходит в окружность, а точка  $C$  — в ее центр.

Этот факт мы докажем чуть позже, воспользовавшись полярным соответствием.

**6.** Пусть дана окружность и не пересекающая ее прямая  $l$ . Тогда существует проективное преобразование, переводящее данную окружность в окружность, а прямую  $l$  — в бесконечно удаленную прямую.

Переведем проективным преобразованием нашу прямую  $l$  в бесконечно удаленную прямую. При таком преобразовании окружность может перейти только в эллипс, поскольку не имеет точек пересечения с бесконечно удаленной прямой. Далее сделаем аффинное преобразование, которое этот эллипс переведет в нашу окружность (такое, очевидно, найдется).

### 7. Теорема Паскаля

**Теорема 2.4.** Точки пересечения противоположных сторон вписанного шестиугольника лежат на одной прямой.

*Доказательство.* Пусть дан вписанный шестиугольник  $ABCDEF$ . Переведем проективным преобразованием на бесконечность точки пересечения пар прямых  $AB$  и  $DE$ , а также  $BC$  и  $EF$ . Получим, что  $AB \parallel DE$ ,  $BC \parallel EF$ ; надо доказать, что  $CD \parallel FA$ . Но это совсем не сложно. В силу параллельности углы  $ABC$  и  $DEF$  равны. А значит, равны дуги  $AC$  и  $DF$ . Но это, очевидно, и означает параллельность прямых  $AF$  и  $CD$ .  $\square$

### 8. Теорема Брианшона

**Теорема 2.5.** Главные диагонали описанного шестиугольника пересекаются в одной точке.

*Доказательство.* Переведем точку пересечения двух диагоналей в центр. Нам надо доказать, что и третья диагональ проходит через центр окружности.

Итак, пусть шестиугольник  $ABCDEF$  описан около окружности с центром в точке  $O$  и диагонали  $AD$  и  $BE$  проходят через  $O$ . Обозна-

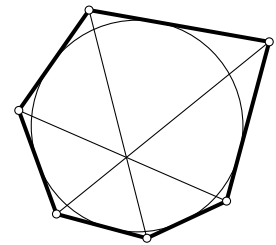
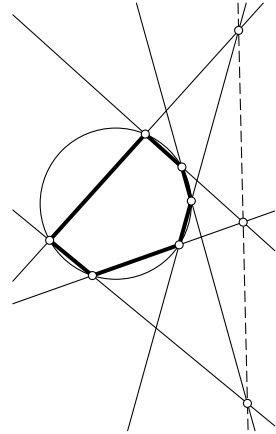


Рис. 2.7

чим точки касания окружности со сторонами  $AB, BC, \dots, FA$  через  $A_1, B_1, \dots, F_1$  соответственно. Легко понять, что  $\angle E_1OC_1 = \angle F_1OB_1 = 2\angle AOB$ , а также что  $\angle E_1OF = \angle FOF_1$  и  $\angle B_1OC = \angle COC_1$ . А значит,

$$\angle FOF_1 + \angle F_1OB_1 + \angle B_1OC = \angle E_1OF + \angle E_1OC_1 + \angle COC_1 = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ.$$

Следовательно, точки  $F, O$  и  $C$  лежат на одной прямой.  $\square$

Отметим, что теоремы Паскаля и Брианшона остаются верными, если шестиугольник вырождается в пяти- или четырехугольник. Это соображение не раз нам еще пригодится.

При доказательстве теоремы Паскаля мы пользовались тем, что соответствующая прямая не пересекает нашу окружность, а при доказательстве теоремы Брианшона — что точка пересечения диагоналей лежит внутри окружности. На самом деле эти две теоремы верны в любом случае, т. е. точки и прямые в этих теоремах могут идти в каком угодно порядке.

Важно также сказать, что это чисто проективные теоремы. Поэтому они верны и для коник. В гл. 3 мы сформулируем и докажем эти теоремы в общем виде.

**9.** Пусть даны точки  $A, B, C, D$ , лежащие на окружности. Из теоремы о вписанном угле следует, что для любой точки  $X$  на этой окружности двойное отношение прямых  $XA, XB, XC, XD$  будет одним и тем же. Назовем его двойным отношением точек  $A, B, C, D$ . Очевидно, что если проективное преобразование переводит окружность в окружность, то двойное отношение точек сохраняется. Верно и обратное: если задано преобразование окружности, сохраняющее двойные отношения, то его можно продолжить до проективного преобразования всей плоскости.

С проективными преобразованиями тесно связано отображение, ставящее в соответствие точкам прямые и наоборот.

**Определение.** Полярное соответствие относительно окружности с центром  $O$  и радиусом  $r$  ставит в соответствие каждой точке плоскости  $A$ , отличной от  $O$ , прямую  $a$ , перпендикулярную  $OA$  и пересекающую луч  $OA$  в точке, инверсной точке  $A$  относительно этой окружности. Прямая  $a$  называется *полярной* точки  $A$ , а точка  $A$  — *полюсом* прямой  $a$ . Полярной точки  $O$  считается бесконечно удаленная прямая, а полярной бесконечно удаленной точки — диаметр, перпендикулярный проходящим через нее параллельным прямым.

Отметим важные свойства полярного соответствия.

**1.** Если точка  $B$  лежит на поляре  $a$  точки  $A$ , то ее поляр  $b$  проходит через  $A$ .

**Доказательство.** Пусть точки  $A'$  и  $B'$  инверсны точкам  $A$  и  $B$  относительно нашей окружности. Тогда треугольник  $OA'B'$ , очевидно,

подобен треугольнику  $OB'A$ , а значит, угол  $AB'O$  прямой, т. е.  $A$  лежит на  $b$  (рис. 2.8).  $\square$

Отсюда вытекает, что полюс любой прямой является пересечением поляр всех ее точек, и наоборот, поляра точки является геометрическим местом полюсов всех проходящих через эту точку прямых.

**2.** Полярной точки  $A$ , лежащей вне окружности, будет прямая, соединяющая точки касания окружности с касательными, проведенными к ней из  $A$  (точки касания являются полюсами касательных). Отсюда следует, что, несмотря на метрическое определение, полярное соответствие является проективным понятием, т. е. если проективное преобразование сохраняет данную окружность и переводит точку  $A$  в  $A'$ , то поляра  $a$  точки  $A$  переходит в поляр  $a'$  точки  $A'$ . Это позволяет сформулировать следующий результат.

**Принцип двойственности.** Пусть доказано некоторое проективное утверждение. Тогда верным также будет утверждение, полученное из доказанного взаимной заменой следующих терминов: (точка)  $\leftrightarrow$  (прямая), (лежать на прямой)  $\leftrightarrow$  (проходить через точку), (лежать на окружности)  $\leftrightarrow$  (касаться окружности). Примерами утверждений, получающихся друг из друга по принципу двойственности, являются теоремы Паскаля и Брианшона, прямое и обратное утверждения теоремы Дезарга и др.

Также с помощью двойственного преобразования можно доказать свойство 5. Достаточно, воспользовавшись свойством 6, перегнуть поляр  $a$  точки  $A$  на бесконечность. Тогда, очевидно, точка  $A$  перейдет в центр окружности.

**3.** Прямая, соединяющая точки пересечения противоположных сторон вписанного (описанного) четырехугольника, является полярной прямой точки пересечения его диагоналей.

Это утверждение следует из свойства 1 и теоремы Ньютона: диагонали описанного четырехугольника проходят через точку пересечения прямых, соединяющих точки касания противоположных сторон со вписанной окружностью. Эта теорема является частным случаем теоремы Брианшона.

**4.** Двойное отношение четырех точек прямой равно двойному отношению их поляр.

**Доказательство.** Пусть это точки  $A, B, C$  и  $D$ . Тогда двойное отношение этой четверки точек равно двойному отношению прямых  $OA, OB, OC$  и  $OD$ , которое в свою очередь равно двойному отношению прямых  $OA', OB', OC'$  и  $OD'$ , где  $A', B', C', D'$  — проекции точки  $O$  на поляры точек  $A, B, C, D$  соответственно. Пусть  $P$  — это полюс пря-

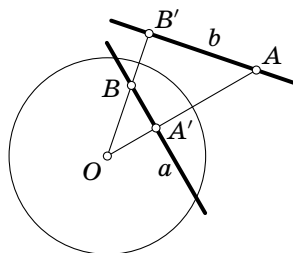


Рис. 2.8

мой  $AB$ . Тогда точки  $A', B', C', D', O$  и  $P$  лежат на одной окружности (с диаметром  $OP$ ). А значит,  $(PA', PB'; PC', PD') = (OA', OB'; OC', OD') = (A, B; C, D)$ . Но  $PA', PB', PC'$  и  $PD'$  и есть полярные точки  $A, B, C$  и  $D$ .  $\square$

**Задача 8.** На сторонах треугольника  $ABC$  выбраны точки  $A_1, B_1$  и  $C_1$ , так что  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  пересекаются в одной точке. Обозначим ее через  $P$ . Пусть  $C'$  — это точка пересечения прямой  $A_1B_1$  со стороной  $AB$ . Точки  $A'$  и  $B'$  определяются аналогично. Докажите, что точки  $A', B'$  и  $C'$  лежат на одной прямой.

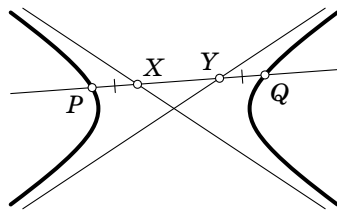


Рис. 2.9

Получающаяся таким образом прямая называется *трилинейной полярной* точки  $P$  относительно треугольника  $ABC$ , а точка  $P$  — *трилинейным полюсом* прямой.

**Задача 9.** Прямая пересекает гиперболу в точках  $P$  и  $Q$ , а ее асимптоты в точках  $X$  и  $Y$ . Докажите, что длины отрезков  $PX$  и  $QY$  равны (рис. 2.9).

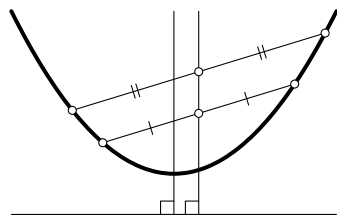


Рис. 2.10

**Задача 10.** Две параллельные прямые пересекают параболу в точках  $A, B$  и  $C, D$  соответственно. Докажите, что прямая, соединяющая середины этих отрезков, параллельна оси параболы (рис. 2.10).

**Задача 11.** Пусть дана окружность и точка  $C$  внутри (вне) ее. Через точку  $C$  проведены 4 хорды (секущие)  $A_iB_i, i = 1, \dots, 4$ . Пусть  $D$  — точка пересечения прямых  $A_1A_2$  и  $A_3A_4$ ,  $E$  — точка пересечения прямых  $B_1B_2$  и  $B_3B_4$ . Докажите, что точки  $C, D, E$  лежат на одной прямой (рис. 2.11).

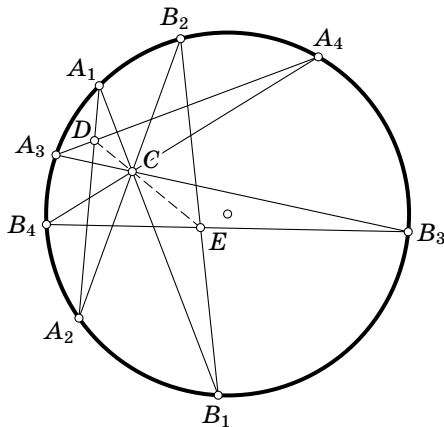


Рис. 2.11



**Задача 12.** Окружности, касающиеся пары сопряженных диаметров<sup>1</sup> эллипса, центры которых лежат на этом эллипсе, имеют одинаковый радиус.

**Задача 13.** По двум пересекающимся в точке  $A$  прямым скользят концы отрезка  $BC$ , так что его длина при этом не меняется. Докажите, что если на  $BC$  зафиксировать точку  $P$ , то ее траектория будет эллипсом (рис. 2.12).

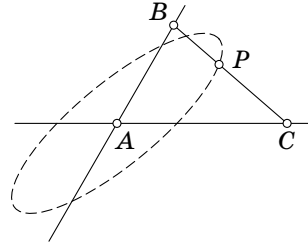


Рис. 2.12

**Задача 14.** Пусть на сторонах треугольника  $ABC$  лежат шесть точек:  $A_1, A_2$  на стороне  $BC$ ,  $B_1, B_2$  на стороне  $AC$  и  $C_1, C_2$  на  $AB$ . Докажите, что эти шесть точек лежат на одной конике тогда и только тогда, когда

$$\frac{BA_1 \cdot BA_2}{CA_1 \cdot CA_2} \cdot \frac{CB_1 \cdot CB_2}{AB_1 \cdot AB_2} \cdot \frac{AC_1 \cdot AC_2}{BC_1 \cdot BC_2} = 1.$$

Предполагается, что это отношение берется со знаками. Положительным направлением для каждого выражения полагается направление от фигурирующей в выражении вершины в сторону другой вершины фигурирующей стороны.

### § 2.3. Некоторые факты из геометрии треугольника

Этот параграф посвящен некоторым полезным, но не общеизвестным свойствам треугольника. В основном речь пойдет о свойствах изогонального и изотомического сопряжений, но будет упомянут и ряд других красивых фактов, не имеющих прямого отношения к теме книги.

**Определение.** *Педальным (подёрным) треугольником точки  $P$  относительно треугольника  $ABC$  называется треугольник, вершинами которого являются проекции точки  $P$  на стороны треугольника  $ABC$ . Описанная окружность педального треугольника называется *педальной (подерной) окружностью* точки  $P$  относительно треугольника  $ABC$  (рис. 2.13).*

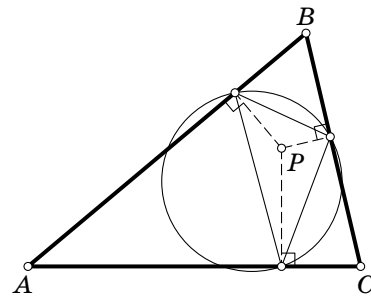


Рис. 2.13

**Теорема 2.6.** *Педальный треугольник вырождается (проекции лежат на одной прямой)  $\Leftrightarrow$  точка  $P$  лежит на описанной окружности треугольника  $ABC$ .*

1. Два диаметра эллипса сопряжены, если каждый из них параллелен касательным к эллипсу в концах другого.

(Это просто переформулировка леммы Симсона.)

**Определение.** *Чевианным треугольником* точки  $P$  относительно треугольника  $ABC$  называется треугольник, вершины которого — точки пересечения прямых  $AP$  и  $BC$ ,  $BP$  и  $AC$ ,  $CP$  и  $AB$ . Описанная окружность чевианного треугольника называется *чевианной окружностью* точки  $P$  относительно треугольника  $ABC$  (рис. 2.14).

О свойствах чевианных треугольников будем говорить позже. А сейчас дадим еще определение *окружностно-чевианного треугольника*.

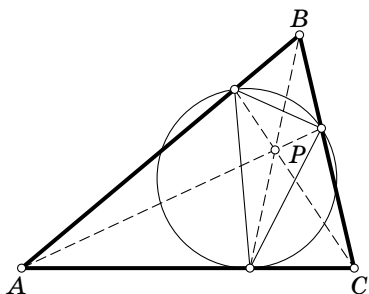


Рис. 2.14

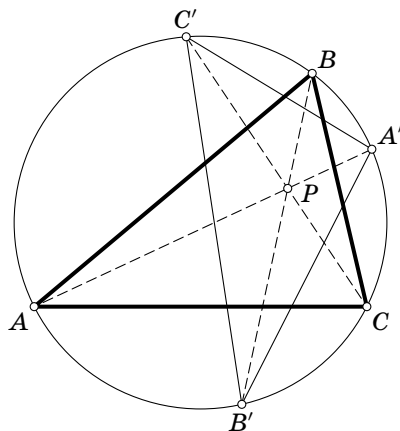


Рис. 2.15

**Определение.** *Окружностно-чевианным треугольником* точки  $P$  относительно треугольника  $ABC$  называется треугольник, вершины которого — это точки повторного пересечения прямых  $AP$ ,  $BP$ ,  $CP$  с описанной окружностью треугольника  $ABC$  (рис. 2.15).

**Лемма 2.1.** *Педальный и окружностно-чевианный треугольники точки  $P$  относительно треугольника  $ABC$  подобны и одинаково ориентированы.*

**Доказательство.** Рассмотрим случай, изображенный на рис. 2.16. Остальные случаи разбираются аналогично.

Точки  $P_a, P_b, P_c$  — это вершины педального треугольника, а точки  $A', B', C'$  — вершины окружностно-чевианного треугольника. Мы имеем  $\angle AA'C' = \angle ACC' = \angle P_b P_a P$ . Последнее равенство верно, поскольку четырехугольник  $PP_a C P_b$  вписанный. Аналогично доказывается, что  $\angle AA'B' = \angle P_c P_a P$ . А значит,  $\angle C'A'B' = \angle P_b P_a P_c$ . Аналогично  $\angle A'B'C' = \angle P_a P_b P_c$  и  $\angle A'C'B' = \angle P_a P_c P_b$ . Но это и означает, что треугольники  $A'B'C'$  и  $P_a P_b P_c$  подобны.  $\square$

**Теорема 2.7.** *Окружностно-чевианные треугольники точек, инверсных относительно описанной окружности треугольника, подобны и по-разному ориентированы.*

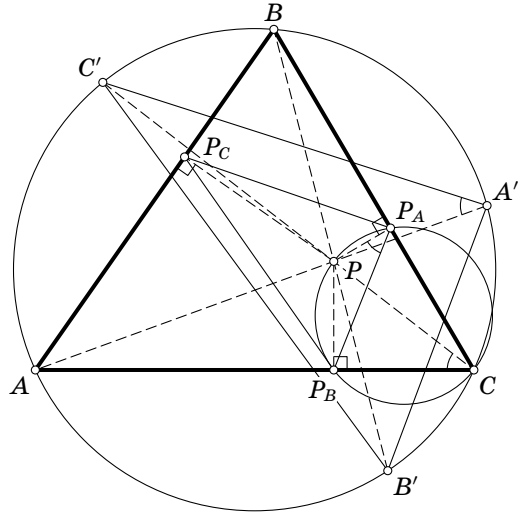


Рис. 2.16

Сначала докажем следующую лемму.

**Лемма 2.2.** Пусть точки  $P$  и  $Q$  инверсны относительно окружности  $\omega$  с центром  $O$ . Пусть отрезок  $PQ$  пересекает  $\omega$  в точке  $R$ . Тогда для любой точки  $A$ , лежащей на  $\omega$ ,  $RA$  — это биссектриса угла  $PAQ$ .

**Доказательство.** Поскольку точки  $P$  и  $Q$  инверсны, треугольники  $OAP$  и  $OQA$  подобны (рис. 2.17), следовательно,  $\angle OQA = \angle OAP$ . Поскольку  $O$  — центр окружности  $\omega$ , треугольник  $AOR$  равнобедренный, а значит,  $\angle OAR = \angle ORA$ . Таким образом,

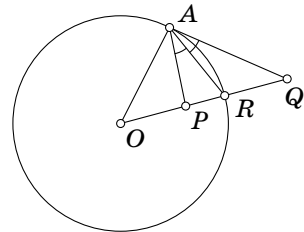


Рис. 2.17

$$\begin{aligned} \angle PAR &= \angle OAR - \angle OAP = \\ &= \angle ORA - \angle OQA = \angle RAQ, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.  $\square$

Из доказанной леммы следует, что окружность  $\omega$  является геометрическим местом точек, отношение расстояний от которых до  $P$  и  $Q$  постоянно (и отлично от 1). Она называется *окружностью Аполлония* отрезка  $PQ$ . О ней будет подробнее написано ниже.

**Доказательство теоремы.** Пусть точки  $P$  и  $Q$  инверсны относительно описанной окружности треугольника  $ABC$  (обозначим ее через  $\omega$ ). Пусть отрезок  $PQ$  пересекает  $\omega$  в точке  $R$ . Обозначим повторную точку пересечения прямой  $AP$  с  $\omega$  через  $A'$ , а прямой  $AQ$  — через  $A''$ . Ввиду леммы 2.2 прямая  $AR$  — биссектриса угла  $PAQ$ , следовательно,  $R$  делит дугу  $A'A''$  пополам, т. е. точки  $A'$  и  $A''$  симметричны

относительно  $OP$ . То же верно для пар точек  $B'$  и  $B''$ ,  $C'$  и  $C''$ , вершин окружностно-чевианного треугольника точек  $P$  и  $Q$  относительно треугольника  $ABC$ . Таким образом, при симметрии относительно  $PQ$  треугольники переходят друг в друга, а значит, они подобны и по-разному ориентированы.  $\square$

**Следствие.** *Педальные треугольники инверсных точек подобны и по-разному ориентированы.*

Можно показать, что для любого треугольника  $XYZ$  существует единственная такая точка, что педальный треугольник этой точки относительно данного треугольника  $ABC$  подобен треугольнику  $XYZ$  при фиксированном порядке вершин.

В доказательстве предыдущей теоремы мы получили два подобных треугольника и точку  $P$  внутри них, так что углы, образованные сторонами и чевианами, связанными с точкой  $P$ , равны, но как бы меняются местами (рис. 2.16).

Таким образом, мы приходим к так называемому *изогональному сопряжению* относительно треугольника.

Пусть дан произвольный треугольник  $ABC$  и точка  $P$ , отличная от вершин треугольника. Отразим прямые, соединяющие вершины треугольника с точкой  $P$ , относительно биссектрис соответствующих углов треугольника. Оказывается, эти три прямые всегда пересекаются в одной точке (или же параллельны, т. е. пересекаются в одной точке на проективной плоскости), которую мы обозначим  $P'$  (рис. 2.18). Точку  $P'$  называют *изогонально сопряженной* точке  $P$  относительно треугольника  $ABC$ , а преобразование, переводящее каждую точку проективной плоскости в изогонально сопряженную, — *изогональным сопряжением*.

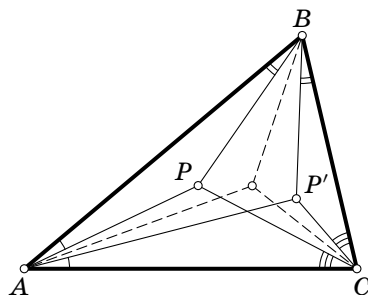


Рис. 2.18

На самом деле корректность этого определения мы почти доказали в лемме 2.1. Действительно, возьмем треугольник  $ABC$  и точку  $P$ . Пусть  $A'B'C'$  — окружностно-чевианный треугольник точки  $P$  относительно треугольника  $ABC$ . Тогда треугольник  $ABC$  будет окружностно-чевианным треугольником точки  $P$  относительно треугольника  $A'B'C'$ , а значит, подобен педальному треугольнику точки  $P$  относительно  $A'B'C'$ . Следовательно, при подобии, переводящем педальный треугольник точки  $P$  в треугольник  $ABC$ , точка  $P$  перейдет в точку  $P'$ , которая как раз и будет изогонально сопряженной.

Отметим несколько элементарных свойств изогонального сопряжения.

1. Если точка  $P$  не лежит на прямых, содержащих стороны треугольника, то точка  $P'$  определяется однозначно и изогонально сопряженной точкой к  $P'$  будет точка  $P$ . Такие две точки будем называть *изогонально сопряженными*.

2. Изогонально сопряженной точкой к точке, лежащей на прямой, содержащей сторону треугольника, будет вершина треугольника, противоположная этой стороне.

3. Изогональное сопряжение оставляет на месте ровно 4 точки плоскости, а именно, центры вписанной и трех внеписанных окружностей треугольника.

4. Если точка  $P$  лежит на описанной окружности треугольника  $ABC$ , то изогонально сопряженной точке  $P$  будет точка на бесконечно удаленной прямой, которая задает направление, перпендикулярное прямой Симсона точки  $P$  относительно треугольника  $ABC$  (прямой, проходящей через проекции точки  $P$  на стороны треугольника  $ABC$ ).

Первые три свойства очевидны. Докажем четвертое. Рассмотрим случай, изображенный на рис. 2.19, остальные случаи разбираются аналогично. Пусть точка  $P$  лежит на описанной окружности, а  $P_b$  и  $P_c$  — проекции точки  $P$  на стороны  $AC$  и  $AB$  соответственно. Точку пересечения прямой Симсона точки  $P$  с прямой  $a$ , симметричной  $AP$  относительно биссектрисы  $\angle A$ , обозначим через  $X$ . Четырехугольник  $APP_cP_b$  вписанный, а значит,  $\angle AP_bP_c = 180^\circ - \angle APP_c = 180^\circ - (90^\circ - \angle PAP_c) = 90^\circ + \angle PAP_c = 90^\circ + \angle XAP_b$ . Но, поскольку внешний угол равен сумме двух оставшихся внутренних углов треугольника,  $\angle AXP_b = 90^\circ$ . Аналогично доказыва-  
ется, что прямые, симметричные  $PB$  и  $PC$  относительно биссектрис соответствующих углов, перпендикулярны  $P_bP_c$ .

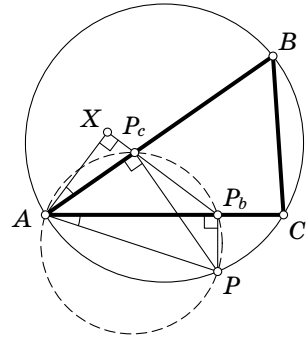


Рис. 2.19

Из приведенного доказательства существования изогонально сопряженной точки сложно получить какие-нибудь его свойства. Мы сейчас приведем еще один способ построения изогонально сопряженной точки, который сразу же выведет нас на несколько красивых свойств этого преобразования.

Пусть точка  $P$  лежит внутри треугольника  $ABC$ , точка  $P_a$  симметрична ей относительно стороны  $BC$ , точки  $P_b$  и  $P_c$  определены аналогично (рис. 2.20). Пусть  $P'$  — это центр описанной окружности треугольника  $P_aP_bP_c$ . Точка  $C$  равноудалена от  $P_a$  и  $P_b$ , следовательно, прямая  $CP'$  является серединным перпендикуляром к отрезку  $P_aP_b$ .

А значит,  $\angle P_aCP' = \frac{1}{2}\angle P_aCP_b = \angle C$ . Но тогда  $\angle BCP' = \angle P_aCP' - \angle BCP_a =$

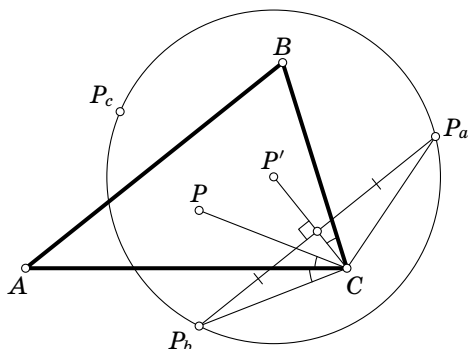


Рис. 2.20

$= \angle C - \angle BCP = \angle ACP$ . Аналогично показывается, что  $\angle ABP' = \angle CBP'$  и  $\angle BAP' = \angle CAP$ . А это и означает, что точка  $P'$  изогонально сопряжена  $P$  относительно  $ABC$ .

Если точка  $P$  лежит вне треугольника, то рассуждения абсолютно аналогичны, но, когда точка  $P$  лежит на описанной окружности треугольника  $ABC$ , треугольник  $P_aP_bP_c$  вырожден. Тогда центр описанной окружности треугольника  $P_aP_bP_c$  не определен (хотя естественно описанной окружностью считать прямую  $P_aP_b$ , а ее центром — точку на бесконечно удаленной прямой, соответствующую направлению, перпендикулярному  $P_aP_b$ ).

Из второго построения изогонально сопряженных точек также следует, что центр педальной окружности точки  $P$  — это середина отрезка  $PP'$ , а радиус в два раза меньше длины отрезка  $P'P_a$ , поскольку педальная окружность точки  $P$  — это окружность, получающаяся из описанной окружности треугольника  $P_aP_bP_c$  гомотетией с центром в точке  $P$  и коэффициентом  $\frac{1}{2}$ .

Отсюда также следует такая теорема.

**Теорема 2.8.** *Педальные окружности двух точек совпадают тогда и только тогда, когда они изогонально сопряжены.*

**Доказательство.** Действительно, если точки  $P$  и  $P'$  изогонально сопряжены, то их педальная окружность — это окружность с центром в середине отрезка  $PP'$  и радиусом  $\frac{P'P_a}{2} = \frac{PP'_a}{2}$ , где  $P_a$  и  $P'_a$  — это точки, симметричные  $P$  и  $P'$  относительно стороны  $BC$  треугольника  $ABC$ .

Докажем обратное. Если педальные окружности точек  $P$  и  $Q$  совпадают, то по доказанному выше они совпадают с педальной окружностью точки  $P'$ , изогонально сопряженной точке  $P$ . По принципу Дирихле у педального треугольника точки  $Q$  две из трех вершин общие с педальным треугольником либо точки  $P$ , либо точки  $P'$ . Следо-

вательно, точка  $Q$  совпадает с одной из этих точек, потому что проекции точки на две прямые полностью задают положение этой точки.

Непосредственно из этой теоремы следует, что ортоцентр  $H$  треугольника  $ABC$  изогонально сопряжен центру описанной окружности  $O$ . Действительно, педальные окружности точек  $H$  и  $O$  совпадают с окружностью девяти точек Эйлера.

Конечно, это можно доказать непосредственно подсчетом углов. Рассмотрим случай, изображенный на рис. 2.21, остальные случаи разбираются аналогично. Мы имеем  $\angle BAN = 90^\circ - \angle B$ , но  $\angle AOC = 2\angle B$ , следовательно,  $\angle OAC = \frac{1}{2}(180^\circ - 2\angle B) = 90^\circ - \angle B$ . Отсюда следует, что  $\angle BAN = \angle OAC$ , а это и означает, что  $AH$  при симметрии относительно биссектрисы угла  $A$  переходит в прямую  $AO$ . Для других двух углов доказательство аналогично.  $\square$

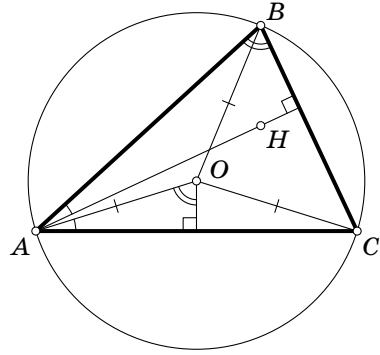


Рис. 2.21

Пусть  $K_a, K_b$  и  $K_c$  — это точки пересечения прямых  $BC$  и  $P'P_a$ ,  $AC$  и  $P'P_b$ ,  $AB$  и  $P'P_c$  соответственно. Понятно, что  $\angle PK_aB = \angle P'K_aC$ . Следовательно, коника с фокусами в  $P$  и  $P'$  и суммой расстояний до фокусов (или модулем разности в случае гиперболы), равной  $P'P_a$ , касается прямой  $BC$ . Аналогично показывается, что эта же коника касается двух других сторон треугольника, поскольку расстояния  $P'P_a = P'P_b = P'P_c$  равны удвоенному радиусу педальной окружности точки  $P$ . На рис. 2.22 заштрихованы зоны, где соответствующие точкам коники будут гиперболами, и не заштрихованы области, где эти коники будут эллипсами. Точкам описанной окружности соответствуют параболы.

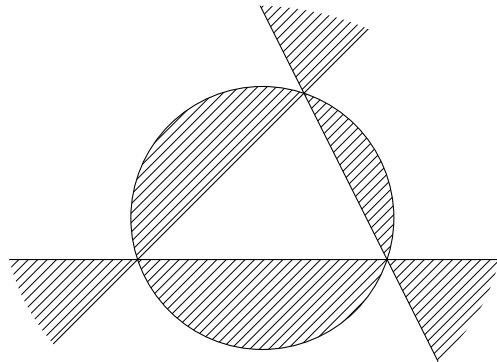


Рис. 2.22

Если точки  $P$  и  $Q$  изогонально сопряжены в многоугольнике (т. е. для любой вершины  $X$  этого многоугольника прямые  $XP$  и  $XQ$  симметричны относительно биссектрисы угла  $X$ ), то найдется коника, касающаяся всех сторон многоугольника, с фокусами в этих точках. Обратное тоже верно, т. е. если коника вписана в многоугольник, то ее фокусы изогонально сопряжены относительно этого многоугольника. Аналогично можно показать, что тогда pedalные окружности точек  $P$  и  $Q$  совпадают (помимо того что они существуют!).

В следующем параграфе будет показано, что для любых пяти прямых существует единственная касающаяся их коника. Поэтому для пятиугольника существует только одна пара изогонально сопряженных точек. Для четырехугольника, как легко понять, такие точки образуют некоторую кривую (на самом деле она будет кубикой — кривой третьего порядка), а для шестиугольников (и многоугольников с большим числом сторон) таких точек, как правило, не существует.

С помощью изогонального сопряжения можно довольно просто доказать теорему Паскаля, причем в общем виде.

**Теорема 2.9 (Паскаль).** Пусть точки  $A, B, C, D, E$  и  $F$  лежат на конике. Тогда точки пересечения прямых  $AB$  и  $DE$ ,  $BC$  и  $EF$ ,  $CD$  и  $FA$  лежат на одной прямой.

**Доказательство.** Мы рассмотрим только один случай расположения точек на окружности (конике). Остальные рассматриваются аналогично.

Переведем проективным преобразованием конику в окружность. Получим следующую конструкцию (рис. 2.23).

Точки  $A, B, C, D, E$  и  $F$  лежат на одной окружности. Пусть прямые  $AB$  и  $DE$  пересекаются в точке  $X$ , прямые  $BC$  и  $EF$  — в точке  $Y$ , а  $AF$  и  $CD$  — в точке  $Z$ . Надо доказать, что точки  $X, Y$  и  $Z$  лежат на одной прямой.

Углы  $BAF$  и  $BCF$  равны, поскольку опираются на одну дугу. Аналогично равны углы  $CDE$  и  $CFE$ . Кроме того, треугольники  $AZD$  и  $CZF$  подобны. Рассмотрим преобразование подобия, переводящее треугольник  $AZD$  в треугольник  $CZF$ . При этом преобразовании точка  $X$  перейдет в точку  $X'$ , изогонально сопряженную точке  $Y$  относительно треугольника  $CZF$  (в силу вышеуказанных равенств углов). Следовательно,  $\angle AZX = \angle CZX' = \angle FZY$ , а это и означает, что точки  $X, Z$  и  $Y$  лежат на одной прямой.  $\square$

Приведем еще несколько пар изогонально сопряженных точек.

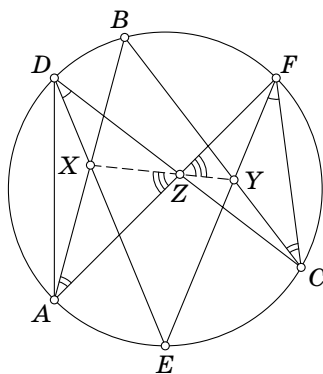


Рис. 2.23



### 1. Центр тяжести — точка Лемуана

Прямые, симметричные медианам относительно биссектрис соответствующих углов, называются *симедианами*. Точка пересечения симедиан, очевидно, изогонально сопряжена точке пересечения медиан. Эту точку называют *точкой Лемуана*.

Отметим несколько основных свойств точки Лемуана, которые в чем-то похожи на свойства центра тяжести.

1а. Пусть касательные к описанной окружности треугольника  $ABC$ , проведенные в точках  $B$  и  $C$ , пересекаются в точке  $A_1$ . Тогда  $AA_1$  — симедиана треугольника  $ABC$  (рис. 2.24).

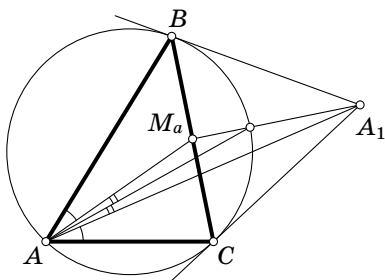


Рис. 2.24

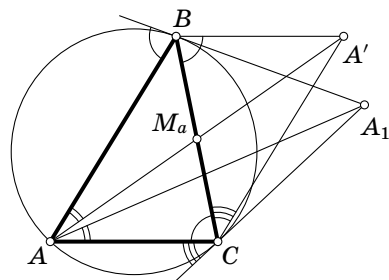


Рис. 2.25

Действительно, пусть точка  $M_a$  — середина стороны  $BC$ , тогда она инверсна точке  $A_1$  относительно описанной окружности треугольника  $ABC$ . Значит, основание биссектрисы угла  $M_aAA_1$  совпадает с серединой дуги  $BC$ , т. е. эта биссектриса совпадает с биссектрисой угла  $BAC$ . Ну а тогда прямая  $AA_1$  симметрична медиане  $AM_a$  относительно биссектрисы угла  $A$ .

Другое изящное доказательство этого факта основано исключительно на существовании изогонального сопряжения. Мы просто укажем точку, изогонально сопряженную  $A_1$ . Это точка, симметричная точке  $A$  относительно  $M_a$ ; она, очевидно, лежит на медиане  $AM_a$  (обозначим ее через  $A'$ ; см. рис. 2.25). Как нетрудно проверить, прямые  $BA'$  и  $CA'$  при отражении относительно биссектрис соответствующих углов переходят в касательные к описанной окружности. Ну а значит,  $A'$  переходит в  $A_1$ .

Из этой теоремы следует, что симедиану можно построить с помощью линейки, если дана описанная окружность треугольника. При проективных преобразованиях, оставляющих описанную окружность треугольника  $ABC$  на месте, симедианы переходят в симедианы и точка Лемуана — в точку Лемуана. Это свойство в некотором смысле аналогично тому, что при аффинных преобразованиях центр тяжести треугольника переходит в центр тяжести.

Как следствие, стоит также отметить, что точка Лемуана будет *точкой Жергонна* (см. ниже) треугольника  $A_1B_1C_1$ , где точки  $B_1$  и  $C_1$  строятся аналогично точке  $A_1$ .

16. *Симедиана делит сторону в отношении, равном отношению квадратов прилежащих сторон.*

Обозначим точку пересечения симедианы угла  $A$  со стороной  $BC$  через  $L_a$ , а середину отрезка  $BC$  через  $M_a$ .

Поскольку площади треугольников  $ABM_a$  и  $ACM_a$  равны, отношение расстояний от точки  $M_a$  до сторон  $AB$  и  $AC$  обратно пропорционально отношению этих сторон. Но поскольку прямая  $AL_a$  симметрична прямой  $AM_a$  относительно биссектрисы угла  $A$ , произведение отношений расстояний от  $M_a$  и  $L_a$  до  $AB$  и  $AC$  равно 1. Следовательно, отношение расстояний от  $L_a$  до  $AB$  и  $AC$  равно отношению длин этих сторон, а значит, площади треугольников  $ABL_a$  и  $ACL_a$  относятся как квадраты длин сторон  $AB$  и  $AC$ . Но, с другой стороны, это отношение равно отношению  $BL_a$  и  $CL_a$ , поскольку у этих треугольников общая высота.

1в. *Сумма квадратов расстояний от точки  $P$  до вершин треугольника достигает своего минимума, когда точка  $P$  — это точка пересечения медиан. В то же время сумма квадратов расстояний до сторон достигает своего минимума в точке Лемуана.*

Этот факт нетрудно вывести из предыдущего.

## 2. Точки Брокера

Оказывается, в любом треугольнике  $ABC$  существует такая точка  $Br_1$ , что  $\angle BABr_1 = \angle CBBr_1 = \angle ACBr_1$ . Если взять изогонально сопряженную к  $Br_1$  точку  $Br_2$ , то, очевидно,  $\angle ABBr_2 = \angle BCBr_2 = \angle CABr_2$  (рис. 2.26).

Эти две точки называют соответственно *первой* и *второй точками Брокера*, а эллипс, касающийся сторон треугольника, с фокусами в этих точках называют *эллипсом Брокера*. В правильном треугольнике эти две точки совпадают с центром треугольника, а эллипс — с вписанной окружностью.

Докажем существование точки  $Br_1$ . На сторонах треугольника построим подобные ему треугольники  $BCA_1$ ,  $B_1CA$ ,  $BC_1A$  так, как показано на рис. 2.27.

Тогда описанные окружности этих треугольников (обозначим их через  $\omega_a$ ,  $\omega_b$  и  $\omega_c$ ) пересекаются в одной точке. Действительно, пусть  $Br_1$  — это точка пересечения окружностей  $\omega_a$  и  $\omega_b$ , отличная от  $C$ .

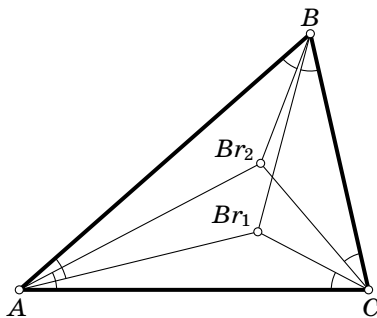


Рис. 2.26

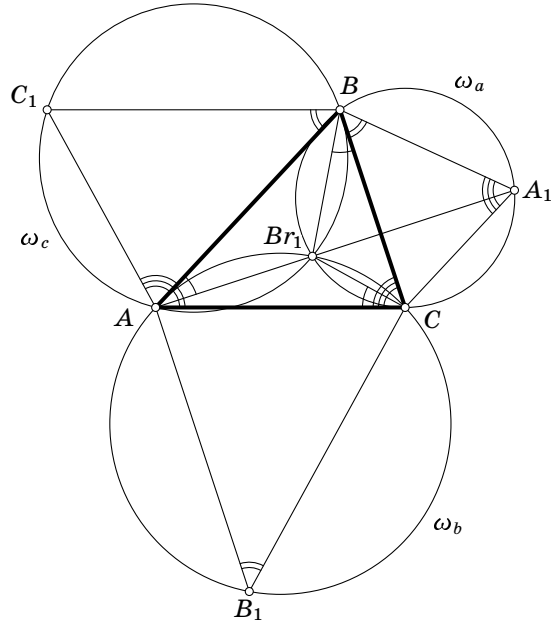


Рис. 2.27

Тогда

$$\begin{aligned} \angle ABr_1B &= 360^\circ - (\angle ABr_1C + \angle BBr_1C) = \\ &= 360^\circ - (180^\circ - \angle AB_1C) - (180^\circ - \angle BA_1C) = \\ &= \angle BA_1C + \angle AB_1C = \angle C + \angle A = 180^\circ - \angle B = 180^\circ - \angle AC_1B. \end{aligned}$$

А значит, точка  $Br_1$  лежит на  $\omega_c$ . Мы также имеем

$$\begin{aligned} \angle CBBr_1 &= 180^\circ - \angle BBr_1C - \angle BCBr_1 = \angle BA_1C - \angle BCBr_1 = \\ &= \angle BCA - \angle BCBr_1 = \angle ACBr_1. \end{aligned}$$

Аналогично  $\angle CBBr_1 = \angle BABr_1$ .

То, что такая точка единственная, легко понять из ее построения. Предположим, что существует еще одна такая точка  $X$ . Тогда, как нетрудно показать аналогичными рассуждениями,  $\angle BXA = 180^\circ - \angle B$ , а значит,  $X$  лежит на окружности  $\omega_c$ . Аналогично она должна лежать на окружностях  $\omega_a$  и  $\omega_b$ , а значит совпадать с  $Br_1$ .

Угол  $BABr_1$  называется *углом Брокара* треугольника  $ABC$ .

Отметим также, что точки  $A, Br_1, A_1$  лежат на одной прямой. Действительно,

$$\begin{aligned} \angle ABr_1A_1 &= \angle ABr_1C + \angle CBr_1A_1 = 180^\circ - \angle AB_1C + \angle CBA_1 = \\ &= 180^\circ - \angle A + \angle A = 180^\circ. \end{aligned}$$

Точки Брокара обладают несколькими интересными свойствами.

2а. *Педальные и окружностно-чевианные треугольники точек Брокара подобны треугольнику  $ABC$ .*

Обозначим проекции точки  $Br_1$  на стороны через  $A'$ ,  $B'$  и  $C'$  (рис. 2.28). Четырехугольник  $B'AC'Br_1$  вписанный, следовательно,  $\angle C'B'Br_1 = \angle C'ABr_1 = \angle ACBr_1$  (последнее равенство верно в силу того, что  $Br_1$  — точка Брокара). Аналогично  $\angle A'B'Br_1 = \angle A'CBr_1$ . Значит,  $\angle A'B'C' = \angle A'B'Br_1 + \angle C'B'Br_1 = \angle A'CBr_1 + \angle ACBr_1 = \angle C$ . Точно так же показывается, что  $\angle B'A'C' = \angle B$  и  $\angle A'C'B' = \angle A$ . Поскольку педальный треугольник подобен окружностно-чевианному треугольнику, окружностно-чевианный треугольник точки  $Br_1$  подобен  $ABC$ .

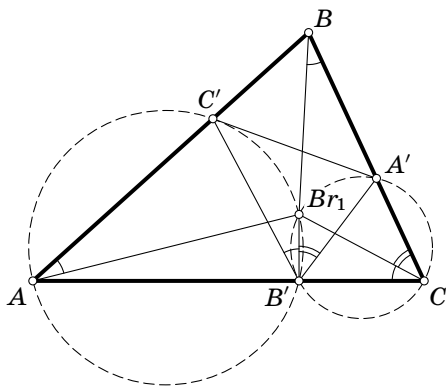


Рис. 2.28

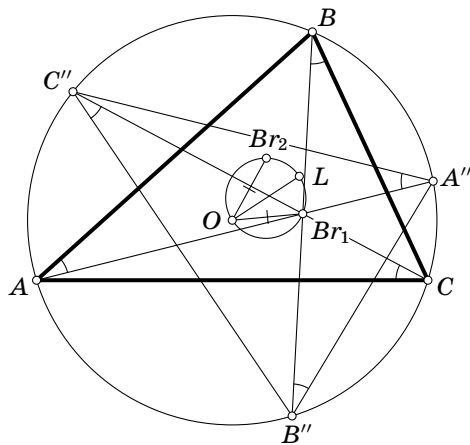


Рис. 2.29

2б. Пусть  $O$  — центр описанной окружности треугольника  $ABC$ . Тогда  $OB r_1 = OB r_2$  и  $\angle Br_1 O B r_2$  равен удвоенному углу Брокара.

Пусть  $A''B''C''$  — это окружностно-чевианный треугольник точки  $Br_1$  относительно треугольника  $ABC$  (рис. 2.29).

Заметим, что точка  $A$  при повороте вокруг точки  $O$  на угол, равный удвоенному углу Брокара, перейдет в точку  $C''$ . То же верно для точек  $B$  и  $C$ . А значит, при повороте вокруг точки  $O$  треугольник  $ABC$  переходит в треугольник  $C''A''B''$ . Точка  $Br_1$  будет второй точкой Брокара треугольника  $A''B''C''$  ( $\angle C''A''Br_1 = \angle C''A''A = \angle C''CA = \angle Br_1CA$ ).

Следовательно, при повороте на удвоенный угол Брокара вокруг точки  $O$  точка  $Br_2$  переходит в  $Br_1$ .

2в. *Точка Лемуана лежит на описанной окружности треугольника  $OB r_1 B r_2$  и является диаметрально противоположной точке  $O$ .*

Рассмотрим проективное преобразование, переводящее точку  $Br_1$  в центр окружности  $\omega$ , описанной около треугольника  $ABC$ . Треугольники  $ABC$  и  $A''B''C''$ , очевидно, перейдут в треугольники, симметрич-

ные относительно центра окружности  $\omega$ , а значит, их точки Лемуана тоже будут симметричны. С другой стороны, эти точки будут образами точек Лемуана треугольников  $ABC$  и  $A''B''C''$ , следовательно,  $L, Br_1, L''$  лежат на одной прямой, где  $L''$  — точка Лемуана треугольника  $A''B''C''$ . При этом, поскольку треугольники  $ABC$  и  $A''B''C''$  получают друг из друга поворотом на двойной угол Брокара вокруг точки  $O$ ,  $L$  и  $L''$  равноудалены от концов проходящей через них хорды. Отсюда и из сохранения двойных отношений при проективных преобразованиях следует, что  $Br_1$  — середина отрезка  $LL''$  и угол  $OBr_1L$  прямой. Следовательно, точки  $Br_1$  и  $Br_2$  лежат на окружности с диаметром  $OL$  и симметричны относительно прямой  $OL$ .

2г. Эллипс Брокара касается сторон треугольника в основаниях симедиан.

Пусть треугольники  $BCA_1$  и  $C_2AB$  подобны треугольнику  $ABC$  и расположены так, как показано на рис. 2.30. Обозначим их описанные окружности через  $\omega_a^1$  и  $\omega_c^2$ . Поскольку точки  $Br_1$  и  $Br_2$  лежат на  $\omega_a^1$  и  $\omega_c^2$  соответственно и углы, опирающиеся на дуги  $CBr_1$  и  $ABr_2$ , равны, то отношение длин отрезков  $CBr_1$  и  $ABr_2$  равно отношению радиусов окружностей  $\omega_a^1$  и  $\omega_c^2$ . С другой стороны, отношение радиусов этих окружностей равно коэффициенту подобия треугольников  $BCA_1$  и  $C_2AB$ , а значит, равно

$$\frac{BC}{AC_2} = \frac{BC}{AB} \cdot \frac{AB}{AC_2} = \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 = \frac{CL_b}{AL_b},$$

т. е.  $\frac{CBr_1}{ABr_2} = \frac{CL_b}{AL_b}$ . А поскольку  $\angle Br_1CA = \angle Br_2AC$  (углы Брокара),

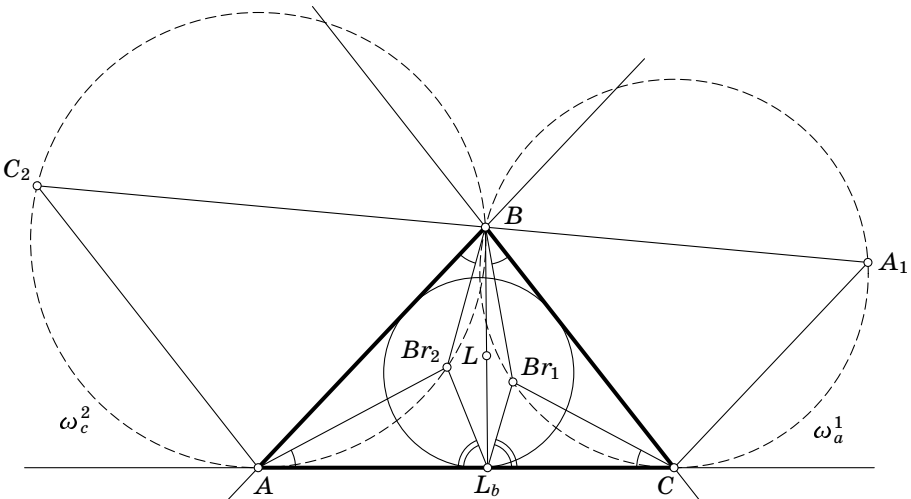


Рис. 2.30

треугольники  $CL_bBr_1$  и  $AL_bBr_2$  подобны. Следовательно,  $\angle Br_1L_bC = \angle Br_2L_bA$ . Значит, эллипс с фокусами в точках Брокара и суммой расстояний до фокусов  $Br_1L_b + Br_2L_b$  касается прямой  $AC$  в точке  $L_b$ . Но такой эллипс единственный, и это эллипс Брокара.

То, что эллипс Брокара касается  $AB$  и  $BC$  в точках  $L_c$  и  $L_a$ , доказывается аналогично.

### 3. Эллипс Штейнера и корни производной

Сопоставим каждой точке плоскости, имеющей декартовы координаты  $(a, b)$ , комплексное число  $a + ib$ .

**Теорема 2.10.** Пусть  $p$  и  $q$  — корни производной многочлена  $P(z) = (z - z_a)(z - z_b)(z - z_c)$ . Тогда точки на комплексной плоскости, соответствующие числам  $p$  и  $q$ , изогонально сопряжены относительно треугольника  $ABC$ , вершины которого соответствуют числам  $z_a, z_b, z_c$ .

*Доказательство.* Докажем, что  $\angle BAP = \angle CAQ$ , где точки  $P$  и  $Q$  соответствуют числам  $p$  и  $q$ . Без ограничения общности можно считать, что  $z_a = 0$ , поскольку если от точек  $z_a, z_b$  и  $z_c$  отнять  $z_a$ , то и корни производной многочлена  $P(z)$  изменятся на  $-z_a$ . В плоскости это будет соответствовать сдвигу на вектор  $-z_a$ .

Многочлен  $P(z)$  при этом будет равен  $z^3 - (z_b + z_c)z^2 + z_cz_bz$ , а его производная  $3z^2 - 2(z_b + z_c)z + z_bz_c$ . По теореме Виета произведение корней многочлена  $P'(z)$  равно  $\frac{1}{3}z_bz_c$ . А это означает, что произведение корней  $z_b$  и  $z_c$  имеет тот же аргумент, что и произведение  $p$  и  $q$ . Следовательно, углы  $\angle BAP$  и  $\angle CAQ$  равны. Аналогично доказывается, что  $\angle ABP = \angle CBQ$  и  $\angle ACP = \angle BCQ$ .  $\square$

Эллипс с фокусами в этих точках, касающийся сторон треугольника  $ABC$ , называется *вписанным эллипсом Штейнера*.

Докажем, что его центр совпадает с центром тяжести треугольника. Центр тяжести треугольника соответствует точке  $\frac{1}{3}(z_a + z_b + z_c)$ , а центр тяжести точек  $P$  и  $Q$  — точке  $\frac{1}{2}(p + q)$ . Мы имеем  $P'(z) = 3z^2 - 2(z_a + z_b + z_c)z + z_az_bz_c$ , а значит, по теореме Виета сумма корней производной равна  $\frac{2}{3}(z_a + z_b + z_c)$ , т. е. их центр тяжести равен  $\frac{1}{3}(z_a + z_b + z_c)$ , что и требовалось доказать.

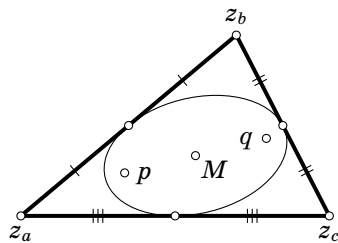


Рис. 2.31

**Замечания. 1.** Вообще этот факт верен для многочленов любой степени, большей единицы: *центр тяжести корней многочлена и центр тяжести корней его производной совпадают*. Проще всего это доказать, переведя центр тяжести в 0. Тогда второй коэффициент много-

члена, а значит, и его производной обратится в нуль, следовательно, сумма корней производной (а значит, и центра тяжести) будет равна нулю, т. е. совпадет с центром тяжести корней самого многочлена.

2. Рассмотрим аффинное преобразование, переводящее правильный треугольник в треугольник  $ABC$ . Тогда вписанная окружность этого треугольника перейдет в эллипс, причем центром этого эллипса будет центр тяжести треугольника  $ABC$ . Как будет показано в гл. 4, существует единственная коника, касающаяся данных трех прямых, с центром в данной точке. А значит, это и будет эллипс Штейнера.

Поскольку в правильном треугольнике точки касания вписанной окружности со сторонами — это их середины, эллипс Штейнера тоже будет касаться сторон треугольника  $ABC$  в их серединах.

По аналогии со вписанным существует *описанный эллипс Штейнера* — это эллипс с центром в точке пересечения медиан, проходящий через вершины треугольника. Он будет образом описанной окружности правильного треугольника при аффинном преобразовании, переводящем его в треугольник  $ABC$ .

#### 4. Точки Аполлония и Торричелли

Если дан треугольник  $ABC$ , то геометрическим местом точек  $P$ , для которых  $\frac{PA}{PB} = \frac{AC}{BC}$ , будет окружность Аполлония точек  $A$  и  $B$ , диаметрально противоположными точками которой являются основания внутренней и внешней биссектрис угла  $C$ . Для точек  $P_1, P_2$  пересечения этой окружности с аналогичной окружностью, построенной по другой паре вершин, выполняются равенства  $P_1A \cdot BC = P_1B \cdot AC = P_1C \cdot AB$ , следовательно, точки  $P_i$  лежат и на третьей такой окружности. Эти точки называются *точками Аполлония* треугольника  $ABC$ . Далее мы будем эти точки обозначать через  $Ap_1$  (обычно первой точкой Аполлония считают точку, лежащую внутри описанной окружности) и  $Ap_2$ . Простой подсчет углов показывает, что окружности Аполлония ортогональны описанной окружности треугольника  $ABC$ . Значит, при инверсии относительно этой окружности они переходят в себя, а точки Аполлония друг в друга. Отсюда, в частности, следует, что прямая  $Ap_1Ap_2$  проходит через центр  $O$  описанной окружности. Далее, центром окружности Аполлония, проходящей через точку  $C$ , является точка пересечения прямой  $AB$  с касательной к описанной окружности в точке  $C$ . При полярном соответствии относительно описанной окружности этим прямым соответствуют точка пересечения касательных к ней в точках  $A$  и  $B$  и точка  $C$ . Следовательно, полярами центров окружностей Аполлония являются симедианы, а полюсом прямой, на которой эти центры лежат, — точка Лемуана  $L$ . Таким образом, точка  $L$  также лежит на прямой  $Ap_1Ap_2$  и инверсна середине отрезка  $Ap_1Ap_2$  относительно описанной окружности.

Отметим важное свойство точек Аполлония, которое может быть принято за их определение.

*Педальные треугольники точек Аполлония правильные.*

**Доказательство.** Пусть  $A', B'$  — проекции точки  $Ap_i$  на  $BC$  и  $CA$ . Так как четырехугольник  $CA'Ap_iB'$  вписан в окружность с диаметром  $Ap_iC$ , то  $A'B' = Ap_iC \sin C = Ap_iC \cdot AB/2R$ . Отсюда сразу следует, что все стороны педального треугольника равны.  $\square$

Теперь легко понять, какие точки изогонально сопряжены точкам Аполлония. Действительно, если опустить из вершин  $A, B$  перпендикуляры на соответствующие стороны педального треугольника  $Ap_i$ , то они пересекутся в изогонально сопряженной точке  $T_i$ . Так как педальный треугольник правильный, угол  $AT_iB$  равен  $60^\circ$  или  $120^\circ$ . Таким образом, из точек  $T_i$  все стороны треугольника видны под углами  $60^\circ$  или  $120^\circ$ . Точки, удовлетворяющие этому условию, называются *точками Торричелли* треугольника  $ABC$ . Построить их можно следующим образом: пусть  $A', B', C'$  — вершины правильных треугольников, построенных на сторонах треугольника  $ABC$  во внешнюю (внутреннюю) сторону. Тогда прямые  $AA', BB', CC'$  пересекаются в *первой (второй) точке Торричелли* (рис. 2.32).

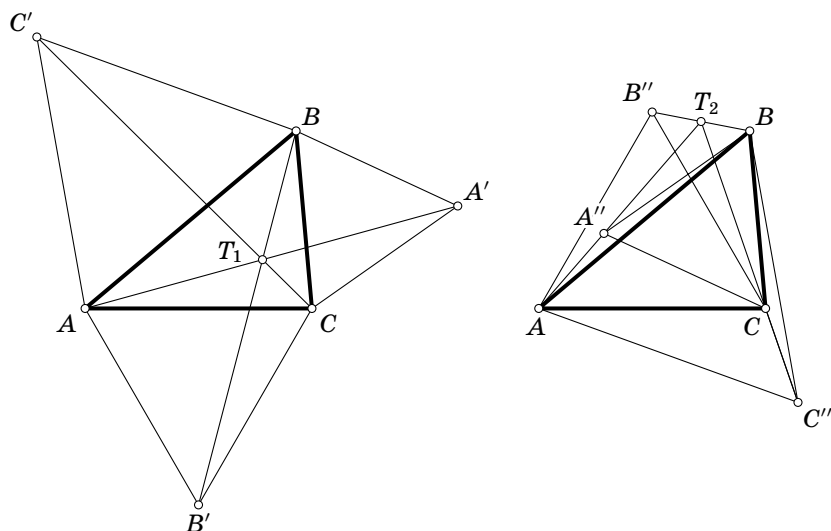


Рис. 2.32

Если все углы треугольника меньше  $120^\circ$ , то первая точка Торричелли лежит внутри треугольника и сумма расстояний от нее до его вершин меньше, чем от любой другой точки  $X$  плоскости. В этом нетрудно убедиться, повернув треугольники  $AXC$  и  $AT_1C$  на  $60^\circ$  вокруг точки  $A$  (рис. 2.33).



Приведем без доказательства еще три свойства точек Торричелли и Аполлония:

1) прямые  $Ap_1T_1$  и  $Ap_2T_2$  параллельны прямой Эйлера  $OH$ ;

2) прямая  $T_1T_2$  проходит через точку Леуана, откуда, как будет показано в § 3.3, следует, что прямые  $Ap_1T_2$  и  $Ap_2T_1$  пересекаются в центре тяжести треугольника  $ABC$ ;

3)  $\angle ApBrL = 60^\circ$  (номера не имеют значения, поскольку  $Ap_1$ ,  $Ap_2$  и  $L$  лежат на одной прямой, относительно которой  $Br_1$  и  $Br_2$  симметричны); это, в частности, означает, что треугольник  $OB_1Br_2$  имеет те же точки Аполлония, что и исходный.

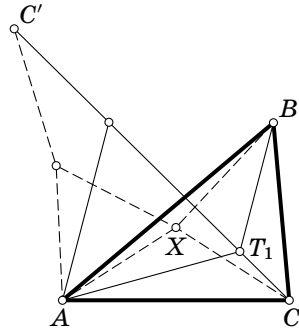


Рис. 2.33

**5. Точки Жергонна и Нагеля и центры гомотетии описанной и вписанной окружностей**

**Определение.** Пусть вписанная окружность треугольника  $ABC$  касается его сторон в точках  $G_a$ ,  $G_b$ ,  $G_c$ . Тогда прямые  $AG_a$ ,  $BG_b$  и  $CG_c$  пересекаются в одной точке  $G$  (доказать это можно с помощью теоремы Чевы или применив проективное преобразование, сохраняющее вписанную окружность и переводящее точку пересечения прямых  $AG_a$  и  $BG_b$  в центр), которая называется *точкой Жергонна*.

Проведем прямые, симметричные  $AG_a$  и  $BG_b$  относительно биссектрис  $AI$  и  $BI$ , и найдем точки  $A_1$ ,  $B_1$  их пересечения с вписанной окружностью, дальние от  $A$  и  $B$  (рис. 2.34). Имеем

$$\begin{aligned} \angle G_cIA_1 &= \angle G_cIG_a + \angle G_aIA_1 = 180^\circ - \angle B + 2\left(\angle B + \frac{1}{2}A - 90^\circ\right) = \\ &= \angle A + \angle B = \angle G_cIB_1. \end{aligned}$$

Следовательно,  $A_1B_1 \parallel AB$ . Аналогично прямая, симметричная  $CG_c$  относительно  $CI$ , пересечет вписанную окружность в такой точке  $C_1$ , что  $C_1A_1 \parallel CA$ ,  $C_1B_1 \parallel CB$ . Таким образом, треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  гомотетичны относительно точки, изогонально сопряженной точке  $G$ . При этой гомотетии описанная окружность треугольника  $ABC$  переходит в вписанную, следовательно, мы доказали такое утверждение.

*Точка Жергонна изогонально сопряжена внутреннему центру гомотетии описанной и вписанной окружностей треугольника.*

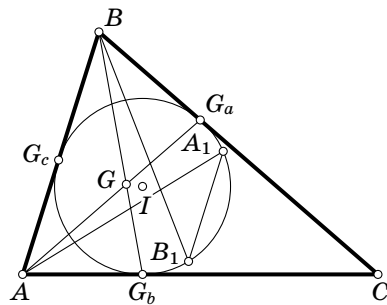


Рис. 2.34

Аналогично, если соединить вершины треугольника и точки касания противоположных сторон с вневписанными окружностями, то эти прямые пересекутся в одной точке, которая называется *точкой Нагеля*. Повторяя приведенные выше рассуждения, получаем:

*Точка Нагеля изогонально сопряжена внешнему центру гомотетии описанной и вписанной окружностей треугольника.*

Помимо изогонального сопряжения, относительно данного треугольника определено и так называемое *изотомическое*, которое строится следующим образом.

**Определение.** Пусть прямые  $AP$ ,  $BP$ ,  $CP$  пересекают противоположные стороны треугольника  $ABC$  в точках  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ , и пусть  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2$  — точки, симметричные  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  относительно середин соответствующих сторон. Тогда прямые  $AA_2$ ,  $BB_2$ ,  $CC_2$  пересекаются в одной точке  $P'$ , которая называется *изотомически сопряженной* точке  $P$  относительно треугольника  $ABC$  (рис. 2.35).

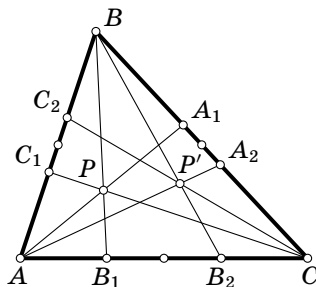


Рис. 2.35

Как и в случае изогонального сопряжения, вершина треугольника изотомически сопряжена любой точке противоположной стороны. Во всех остальных случаях изотомическое сопряжение взаимно однозначно.

Неподвижными точками изотомического сопряжения являются центр тяжести треугольника и точки, симметричные его вершинам относительно середин противоположных сторон. Следует также отметить, что изотомическая сопряженность точек сохраняется при аффинных преобразованиях.

Из других свойств изотомического сопряжения заслуживает упоминания то, что точка Жергонна изотомически сопряжена точке Нагеля.

## § 2.4. Радикальные оси и пучки окружностей

**Определение.** Пусть даны окружность с центром  $O$  и радиусом  $r$  и точка  $P$ . Величина  $OP^2 - r^2$  называется *степенью точки  $P$*  относительно окружности.

Из определения сразу следует, что степень внешних точек положительна, а внутренних отрицательна.

**Упражнение 1.** Найдите геометрическое место таких точек, что их степень относительно данной окружности равна некоторой постоянной величине.

**Ответ.** Точки, степени которых относительно окружности  $\omega$  равны, образуют окружность, концентрическую с  $\omega$ .

**Лемма 2.3.** Пусть прямая, проходящая через точку  $P$ , пересекает окружность в точках  $X$  и  $Y$ . Тогда произведение  $PX \cdot PY$  не зависит от прямой и равно модулю степени точки  $P$  относительно этой окружности.

**Доказательство.** Пусть через точку  $P$  проведены две прямые, первая из которых пересекает окружность в точках  $A$  и  $B$ , а вторая — в точках  $C$  и  $D$ . Докажем, что  $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ . Легко понять, что треугольники  $PAC$  и  $PDB$  подобны, а значит,

$$\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB} \Rightarrow PA \cdot PB = PC \cdot PD.$$

Осталось доказать, что эта величина равна модулю степени точки  $P$  относительно окружности. Проведем прямую через центр этой окружности. Тогда произведение расстояний от точки  $P$  до точек пересечения будет, очевидно, равно  $(OP + r) \cdot (OP - r)$  (где через  $O$  мы обозначили центр окружности, а через  $r$  — ее радиус). Ну а это произведение, очевидно, равно  $OP^2 - r^2$ .  $\square$

**Упражнение 2.** Пусть отрезки  $AB$  и  $CD$  пересекаются в точке  $P$ , причем  $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ . Докажите, что тогда четырехугольник  $ABCD$  вписанный.

**Решение.** Поскольку  $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ , треугольники  $PBD$  и  $PCA$  подобны, а значит,  $\angle PBD = \angle PCA$ . Но это и означает, что четырехугольник  $ABCD$  вписанный.

Лемма 2.3, в частности, нужна для доказательства следующей важной теоремы.

**Теорема 2.11.** Множество точек, степени которых относительно двух данных неконцентрических окружностей равны, есть прямая. Эта прямая называется радикальной осью окружностей.

**Доказательство.** Предположим, что эти две окружности пересекаются. Проведем прямую через точки их пересечения. Тогда эта прямая будет радикальной осью. Покажем это. Пусть эти две окружности пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . Возьмем произвольную точку  $P$  на прямой  $AB$ . Тогда модуль степени точки  $P$  относительно этих двух окружностей равен  $PA \cdot PB$ , а знаки, очевидно, совпадают.

Других точек, обладающим этим свойством, нет. Проведем через произвольную точку  $X$ , не лежащую на прямой  $AB$ , прямую, проходящую через точку  $A$ . Тогда, как легко видеть, либо расстояния от точки  $X$  до повторных точек пересечения с этими окружностями различны (а значит, и модули степеней точек не равны), либо знаки степеней точек отличаются.

Теперь докажем теорему в случае, если окружности не имеют общих точек. Для этого применим некоторый трюк, который также пригодится в дальнейшем. Рассмотрим две сферы, которые пересека-

ют нашу плоскость по этим двум окружностям и имеют общие точки. Легко понять, что такие сферы существуют. Действительно, рассмотрим произвольную точку, не лежащую в нашей плоскости, и сферы, проходящие через эту точку и эти две окружности. Для сфер аналогично можно определить степень точки, и для нее, очевидно, верна лемма 2.3. Аналогично показывается, что множество точек, степени которых относительно этих двух сфер равны, есть плоскость, проходящая через окружность пересечения этих двух сфер. Эта плоскость пересекает нашу плоскость по какой-то прямой. Получающаяся таким образом прямая, очевидно, и будет радикальной осью наших двух окружностей.  $\square$

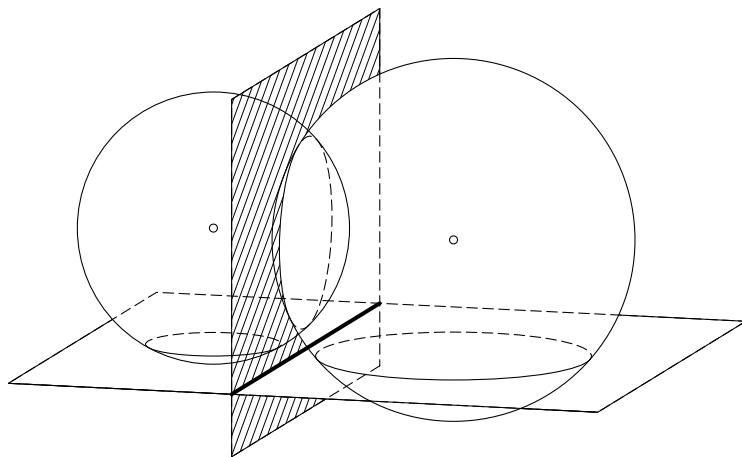


Рис. 2.36

Пусть теперь даны три окружности. Если их центры не лежат на одной прямой, то радикальные оси каких-то двух пар пересекаются. Степени точки их пересечения относительно всех трех окружностей равны, значит, и третья радикальная ось проходит через эту точку, которая называется *радикальным центром* трех окружностей. Если же центры окружностей лежат на одной прямой, то радикальные оси параллельны или совпадают. В последнем случае окружности называются *соосными*.

Множество всех окружностей, соосных с двумя данными, называется *пучком*. Если задающие пучок окружности пересекаются в двух точках, то пучок состоит из всех окружностей, проходящих через эти точки. Такой пучок называется *гиперболическим*. Если две окружности касаются, то любая окружность пучка касается их общей касательной в той же точке. Такой пучок называется *параболическим*. Наконец, две непересекающиеся окружности задают пучок такого типа, как изображено на рис. 2.37. Такой пучок называется *эллиптиче-*

ским. Отметим, что две из окружностей эллиптического пучка вырождаются в точки, которые называются *предельными точками* пучка.

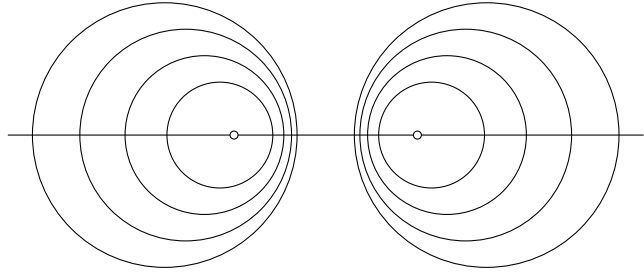


Рис. 2.37

Если взять на радикальной оси пучка любую точку, лежащую вне окружностей, то касательные, проведенные из нее ко всем окружностям пучка, равны. Поэтому окружность с центром в этой точке и радиусом, равным длине касательной, перпендикулярна всем окружностям пучка. Все такие окружности сами образуют некоторый пучок (рис. 2.38), и по любым двум из них исходный пучок строится однозначно. Отсюда следует, что при инверсии относительно произвольной окружности пучки переходят в пучки, причем любой пучок, содержащий окружность инверсии, переходит в себя. В частности, предельные точки эллиптического пучка переходят друг в друга при инверсии относительно любой окружности этого пучка. Отметим также, что инверсия с центром в предельной точке переводит окружности перпендикулярного пучка в прямые. Следовательно, исходный пучок перейдет в пучок concentрических окружностей.

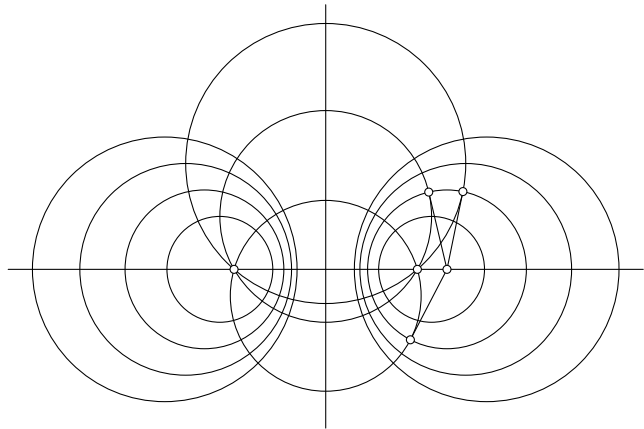


Рис. 2.38

**Упражнение 3.** Докажите этот факт с помощью «выхода» в трехмерное пространство.

**Решение.** Рассмотрим пересекающееся семейство сфер, пересекающих нашу плоскость по окружностям из этого пучка. Эти сферы также образуют пучок. При инверсии эти сферы также переходят в сферы, причем пересекающиеся по некоторой окружности. Следовательно, они будут пересекать нашу плоскость опять же по пучку.

Пучок окружностей обладает еще одним очень важным свойством.

**Теорема 2.12.** Пусть даны две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Геометрическим местом таких точек, что отношение их степеней относительно этих двух окружностей постоянно, является окружность, принадлежащая пучку, образованному окружностями  $\omega_1$  и  $\omega_2$ .

**Доказательство.** Предположим, что окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$  (рис. 2.39). Обозначим центры этих окружностей через  $O_1$  и  $O_2$ , а их радиусы — через  $r_1$  и  $r_2$  соответственно. Точки, симметричные точке  $A$  относительно  $O_1$  и  $O_2$ , обозначим через  $A_1$  и  $A_2$ . Покажем, что множество таких точек  $X$ , что отношение их степеней относительно  $\omega_1$  и  $\omega_2$  равно  $k$ , — это окружность. Проведем прямую  $XA$ . Пусть она пересечет  $\omega_1$  и  $\omega_2$  в точках  $X_1$  и  $X_2$  соответственно. Тогда  $k$  будет равно  $\frac{XX_1}{XX_2}$  (взятому с нужным знаком). Поскольку  $AA_1$  и  $AA_2$  — диаметры соответствующих окружностей, углы  $AX_1A_1$  и  $AX_2A_2$  прямые, а значит,  $X_1$  и  $X_2$  — это проекции точек  $A_1$  и  $A_2$  на прямую  $AX$ . Возьмем на прямой  $A_1A_2$  такую точку  $P$ , что  $\frac{PA_1}{PA_2} = k$  (таких точек, что это отношение равно  $|k|$ , будет две, надо выбрать ту, у которой «знак» соответствующий). Тогда по теореме Фалеса точка  $X$  будет проекцией точки  $P$  на прямую  $AX$ , а значит, она будет лежать на окружности с диаметром  $AP$ . Обратными рассуждениями легко показать, что для любой точки на этой окружности отношение степеней точек относительно  $\omega_1$  и  $\omega_2$  равно  $k$ .

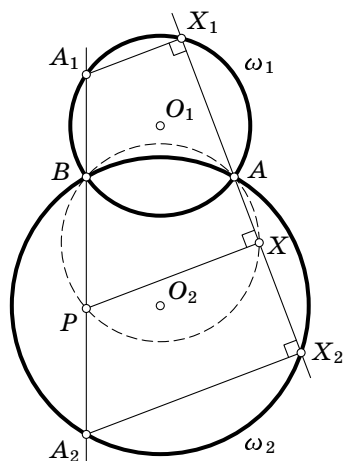


Рис. 2.39

Для того чтобы доказать это утверждение для непересекающихся окружностей, опять применим идею «выхода» в трехмерное пространство. Пусть даны две пересекающиеся сферы, пересекающие нашу плоскость по этим двум окружностям. Проводя аналогичные рассуждения, показываем, что геометрическим местом таких точек, что отношение их степеней относительно этих двух сфер равно  $k$ , есть

сфера из этого пучка, т. е. сфера, содержащая окружность пересечения этих двух сфер. Пересечение этой сферы с нашей плоскостью есть окружность из пучка, образованного окружностями  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , а это и требовалось доказать.  $\square$

С помощью этой теоремы можно достаточно просто доказать теорему Понселе (для пучка окружностей), не прибегая к алгебраическим соображениям. Теорему Понселе в общем виде мы докажем в § 3.3.

**Теорема 2.13 (Понселе).** Пусть даны окружности  $\omega_i$ , принадлежащие одному пучку, и точка  $A_0$ , лежащая на окружности  $\omega_0$ . Касательная к окружности  $\omega_1$ , проведенная из точки  $A_0$ , повторно пересекает  $\omega_0$  в точке  $A_1$ , касательная к окружности  $\omega_2$ , проведенная из точки  $A_1$ , повторно пересекает  $\omega_0$  в точке  $A_2$  и т. д. Касательная к окружности  $\omega_{i+1}$ , проведенная из точки  $A_i$ , повторно пересекает  $\omega_0$  в точке  $A_{i+1}$ . Пусть для некоторого  $n$  оказалось, что точка  $A_n$  совпала с точкой  $A_0$ . Тогда для любой точки  $B_0$ , лежащей на  $\omega_1$ , построенная аналогичным образом точка  $B_n$  совпадет с  $B_0$  (рис. 2.40).

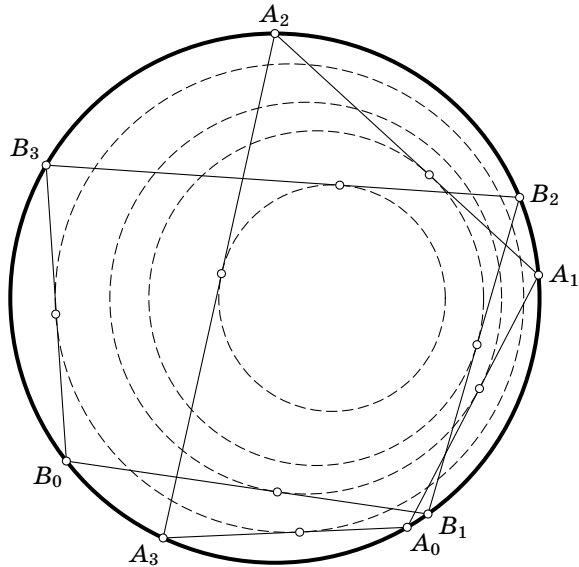


Рис. 2.40

Надо заметить, что не всегда можно построить такую точку  $B_n$ . Например, если точка  $B_0$  лежит внутри  $\omega_1$ , этого сделать нельзя. Мы предполагаем, что такая точка  $B_n$  все-таки получилась.

**Доказательство.** Для доказательства достаточно показать, что  $A_i B_i$  касается некоторой фиксированной окружности из нашего пучка. Тогда если  $A_0$  совпадает с  $A_n$ , то касательная, проведенная из

точки  $A_0$ , должна совпадать с касательной, проведенной из точки  $A_n$  к этой окружности (предполагается, что мы всегда проводим касательные в нужную сторону). А значит, и точки их пересечения с  $\omega_0$  должны совпадать, а это точки  $B_0$  и  $B_n$ .

Пусть прямые  $A_0A_1$  и  $B_0B_1$  касаются окружности  $\omega_1$  в точках  $X$  и  $Y$  соответственно (рис. 2.41). Точку пересечения этих прямых обозначим через  $Z$ . Треугольник  $XZY$  равнобедренный (так как  $X$  и  $Y$  — это просто касательные, проведенные из точки  $Z$  к окружности  $\omega_1$ ). Следовательно, углы  $X$  и  $Y$  в этом треугольнике равны. Кроме того, равны углы  $B_1A_1A_0$  и  $B_1B_0A_0$ . Таким образом, треугольники  $XQA_1$  и  $YPB_0$  подобны, где  $P$  и  $Q$  — это точки пересечения прямой  $XU$  с отрезками  $A_0B_0$  и  $A_1B_1$ . Следовательно, углы  $PQA_1$  и  $QPB_0$  равны, а значит, существует окружность  $\omega'$ , касающаяся отрезков  $A_0B_0$  и  $A_1B_1$  в точках  $P$  и  $Q$  соответственно.

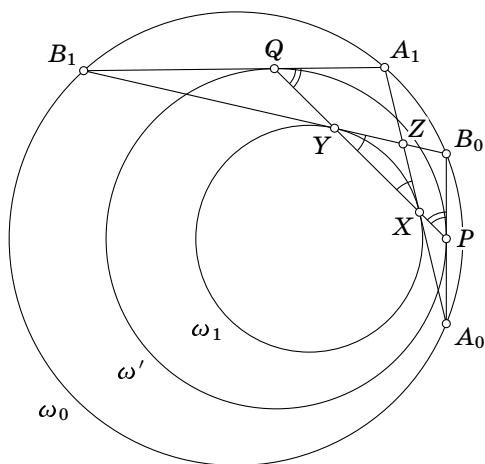


Рис. 2.41

Теперь докажем, что она принадлежит нашему пучку. Для этого достаточно доказать, что окружность  $\omega_0$  принадлежит пучку, образованному окружностями  $\omega_1$  и  $\omega'$ .

Покажем, что отношения степеней точек  $A_0$ ,  $A_1$ ,  $B_0$  и  $B_1$  относительно  $\omega_1$  и  $\omega'$  равны. Легко понять, что эти отношения равны соответственно  $\frac{A_0X^2}{A_0P^2}$ ,  $\frac{A_1X^2}{A_1Q^2}$ ,  $\frac{B_0Y^2}{B_0P^2}$  и  $\frac{B_1Y^2}{B_1Q^2}$ .

В силу подобия треугольников  $A_0XP$  и  $B_1YQ$  отношения  $\frac{A_0X^2}{A_0P^2}$  и  $\frac{B_1Y^2}{B_1Q^2}$  равны. Аналогично в силу подобия треугольников  $B_0YQ$  и  $A_1XQ$  равны отношения  $\frac{A_1X^2}{A_1Q^2}$  и  $\frac{B_0Y^2}{B_0P^2}$ .



Осталось доказать, что  $\frac{A_0X}{A_0P} = \frac{B_0Y}{B_0P}$ . Но по теореме синусов

$$\frac{A_0X}{A_0P} = \frac{\sin \angle A_0PX}{\sin \angle A_0XP} = \frac{\sin \angle B_0PY}{\sin \angle B_0YP} = \frac{B_0Y}{B_0P}.$$

Аналогично показывается, что отрезки  $A_iB_i$  и  $A_{i+1}B_{i+1}$  будут касаться одной и той же окружности нашего пучка. Легко понять, что отрезки  $A_iB_i$  могут касаться только одной такой окружности. Поэтому эта окружность одна и та же для всех отрезков  $A_iB_i$ , и это  $\omega'$ .  $\square$

Теорема Понселе означает, в частности, что если многоугольник вписан в одну окружность и описан около другой, то его можно «вращать» между этими окружностями. При этом каждая диагональ многоугольника касается окружности, соосной с описанной и вписанной (рис. 2.42).

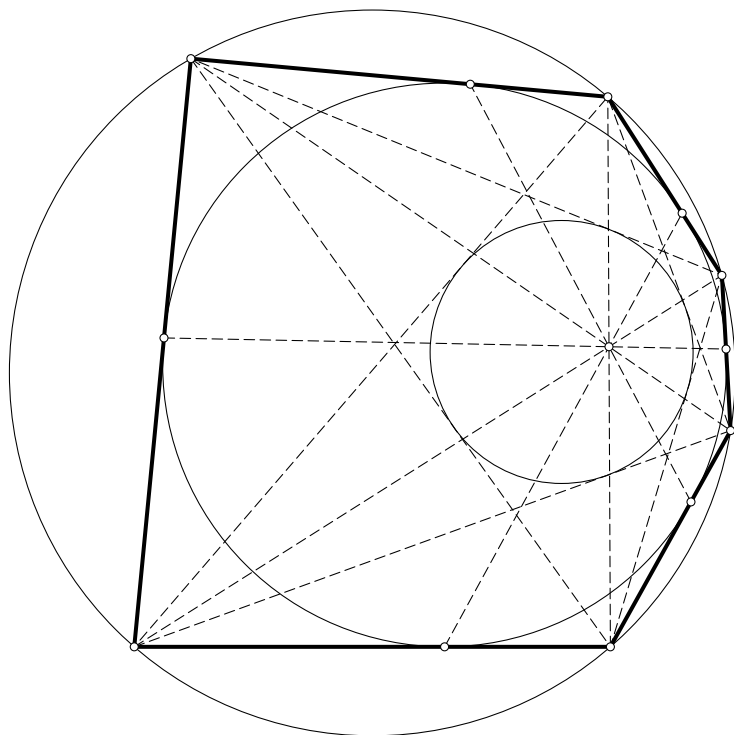


Рис. 2.42

Помимо теоремы Понселе, свойства радикальных осей позволяют доказать также теорему Брианшона, на этот раз в общем виде. Но сначала сформулируем ее.

**Теорема 2.14 (Брианшон).** Пусть прямые  $l_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$ , касаются одной коники,  $A_{ij}$  — точки пересечения прямых  $l_i$  и  $l_j$ . Тогда прямые  $A_{12}A_{45}$ ,  $A_{23}A_{56}$  и  $A_{34}A_{61}$  пересекаются в одной точке.

**Доказательство.** Проективным преобразованием переведем конику в окружность. Будем считать, что мы имеем дело с шестиугольником, описанным вокруг окружности, и нужные нам прямые — это его главные диагонали. Следующие рассуждения легко переносятся на случай, если прямые касаются окружности в другом порядке.

Итак, пусть дан описанный шестиугольник  $ABCDEF$  (рис. 2.43). Надо доказать, что  $AD$ ,  $BE$  и  $CF$  пересекаются в одной точке.

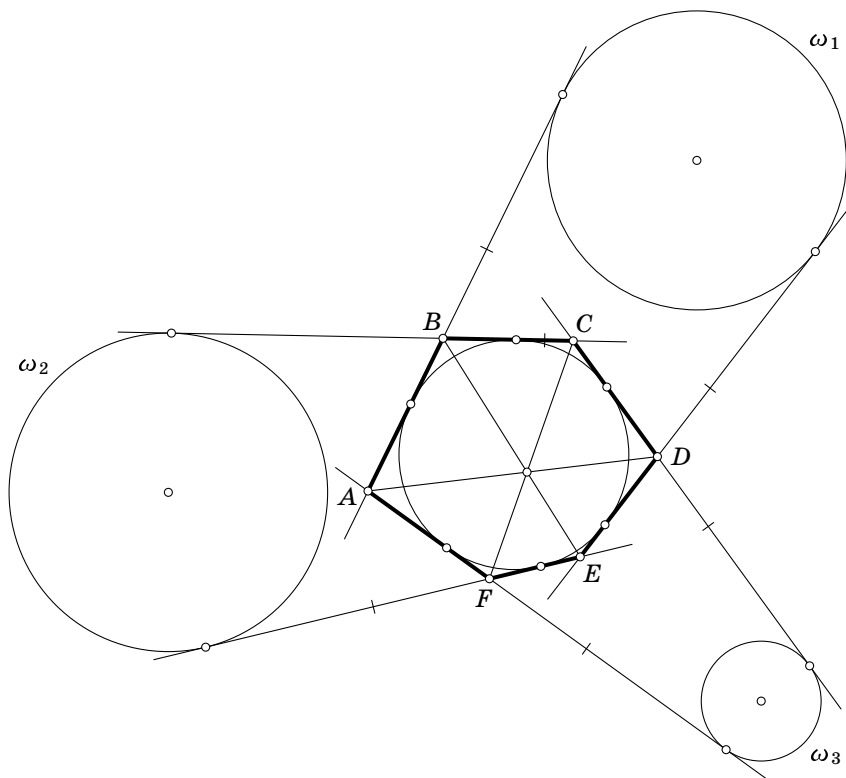


Рис. 2.43

Рассмотрим окружности  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$ , касающиеся пар прямых  $AB$  и  $DE$ ,  $BC$  и  $DE$ ,  $CD$  и  $FA$  соответственно, причем так, что точки касания находятся на расстоянии  $a$  от соответствующих точек касания сторон шестиугольника с окружностью (обозначим их через  $A_1, B_1, \dots, F_1$ ). Тогда степень точки  $A$  относительно окружностей  $\omega_1$  и  $\omega_3$  равна  $-(AA_1 + a)^2$ . Значит, она лежит на радикальной оси этих двух окружностей. То же самое верно и для точки  $D$ . Таким образом,  $AD$  — это радикальная ось окружностей  $\omega_1$  и  $\omega_3$ . Аналогично доказывается, что  $BE$  — радикальная ось окружностей  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , а  $CF$  — окружностей  $\omega_2$  и  $\omega_3$ . Следовательно,  $AD$ ,  $BE$  и  $CF$  пересекаются в одной точке, а именно в радикальном центре окружностей  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$ .  $\square$

## Проективные свойства коник

### § 3.1. Двойное отношение четырех точек кривой. Параметризация.

#### Обратные теоремы Паскаля и Брианшона

Проективная эквивалентность коник означает, что все свойства окружности, о которых говорилось во введении, остаются верными и для коник. В частности, для четырех точек коники  $A, B, C, D$  двойное отношение прямых  $XA, XB, XC, XD$  не зависит от выбора точки  $X$  на конике. Это отношение называется двойным отношением точек  $A, B, C, D$ . Очевидно, что при проективных преобразованиях двойные отношения сохраняются.

Зафиксируем некоторую точку  $P$  коники и не проходящую через нее прямую  $l$ . Каждой точке  $X$  коники поставим в соответствие точку  $X'$  пересечения прямой  $PX$  с  $l$  (точке  $P$  соответствует точка пересечения  $l$  с касательной к конике). Очевидно, это соответствие взаимно однозначно и сохраняет двойные отношения. Если теперь стандартным образом установить соответствие между точками прямой  $l$  и действительными числами, то получим параметризацию коники. Нетрудно убедиться, что при такой параметризации координаты точки  $X$  являются рациональными функциями параметра.

#### **Теорема 3.1 (обратная теорема Паскаля).**

*Пусть даны такие точки  $X_i, i = 1, \dots, 6$ , что точки пересечения прямых  $X_1X_2$  и  $X_4X_5$ ,  $X_2X_3$  и  $X_5X_6$ ,  $X_3X_4$  и  $X_6X_1$  лежат на одной прямой. Тогда существует коника, проходящая через все точки  $X_i$ .*

**Доказательство.** Воспользуемся тем фактом, что через любые пять точек общего по-

ложения проходит единственная коника. Построим такую конику  $\alpha$  для точек  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ . Пусть  $A$ ,  $B$ ,  $C$  — точки пересечения прямых  $X_1X_2$  и  $X_4X_5$ ,  $X_2X_3$  и  $X_5X_6$ ,  $X_3X_4$  и  $X_6X_1$ ,  $Y$  — точка пересечения  $\alpha$  и  $BX_5$ , отличная от  $X_5$ . По теореме Паскаля точка пересечения прямых  $X_3X_4$  и  $X_1Y$  лежит на  $AB$ , т. е. совпадает с  $C$ . Значит,  $Y$  совпадает с  $X_6$ .  $\square$

**Теорема 3.2 (обратная теорема Бриансона).** Пусть даны прямые  $l_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$ ,  $A_{ij}$  — точка пересечения прямых  $l_i$  и  $l_j$ . Если прямые  $A_{12}A_{45}$ ,  $A_{23}A_{56}$  и  $A_{34}A_{61}$  пересекаются в одной точке, то существует коника, касающаяся всех прямых  $l_i$ .

Доказывается эта теорема аналогично предыдущей. Однако надо сначала показать, что существует единственная коника, касающаяся пяти заданных прямых. Мы можем с помощью теоремы Бриансона построить точки касания этих прямых с коникой. Ну а через пять точек проходит только одна коника. Построение точки касания показано на рис. 3.1.

С помощью теоремы Бриансона можно получить новое доказательство теоремы 1.11. Действительно, пусть парабола вписана в треугольник  $ABC$ . Проведем через ортоцентр  $H$  треугольника прямую  $l_1$ , касающуюся параболы, и перпендикулярную ей прямую  $l_2$ . Если доказать, что прямые  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$ ,  $l_1$ ,  $l_2$  и бесконечно удаленная прямая касаются одной коники, то, поскольку существует единственная коника, касающаяся пяти прямых, она будет совпадать с данной параболой. А значит, касательные к параболе, проведенные из ортоцентра, перпендикулярны, следовательно, он лежит на директрисе.

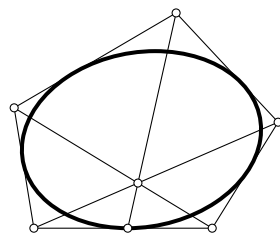


Рис. 3.1

Пусть  $P$  — точка пересечения  $AB$  с  $l_1$ , а  $X$  и  $Y$  — точки бесконечно удаленной прямой, задающие направления, параллельные  $l_2$  и  $AC$  соответственно. Рассмотрим «шестиугольник»  $VRHXYS$ . Его главные диагонали  $VX$ ,  $PY$  и  $HS$ , очевидно, являются высотами треугольника  $VRH$ , а значит, пересекаются в одной точке. Из обратной теоремы Бриансона следует, что шестиугольник  $VRHXYS$  описанный. Ну а как легко видеть, его стороны — это нужные нам прямые.

Воспользовавшись теоремой Паскаля, можно с помощью одной линейки построить произвольное количество точек коники, проходящей через данные пять точек  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$ ,  $X_4$ ,  $X_5$ . Действительно, пусть  $A$  — точка пересечения прямых  $X_1X_2$  и  $X_4X_5$ ,  $l$  — произвольная проходящая через точку  $A$  прямая,  $B$ ,  $C$  — точки пересечения  $l$  с  $X_2X_3$  и  $X_3X_4$ . Тогда точка пересечения прямых  $BX_5$  и  $CX_1$  по обратной теореме Паскаля лежит на конике. Аналогично с помощью теоремы

Брианшона можно построить произвольное количество касательных к конике, касающейся 5 заданных прямых.

**Задача 15.** Докажите, что диагонали четырехугольников, образованных точками пересечения двух эллипсов и их общими касательными, пересекаются в одной точке (рис. 3.2).

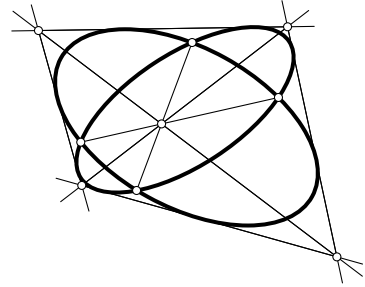


Рис. 3.2

**Задача 16.** В конику вписан шестиугольник  $ABCDEF$ . Докажите, что шесть прямых  $AC$ ,  $CE$ ,  $EA$ ,  $BD$ ,  $DF$  и  $FB$  касаются некоторой коники. Выведите отсюда теорему Понселе для треугольника.

**Задача 17.** Пусть касательная к гиперболе, проведенная в точке  $A$ , пересекает ее асимптоты в точках  $A_1$ ,  $A_2$ , а касательная, проведенная в точке  $B$ , — в точках  $B_1$ ,  $B_2$ . Докажите, что прямые  $A_1B_2$ ,  $A_2B_1$  и  $AB$  пересекаются в одной точке.

**Задача 18.** Треугольники  $ABC$  и  $A'B'C'$  центрально симметричны. Через точки  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  проведены три параллельные прямые. Докажите, что точки их пересечения с  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  соответственно лежат на одной прямой.

**Задача 19.** Докажите, что коника, описанная около треугольника  $ABC$ , является равносторонней гиперболой тогда и только тогда, когда она проходит через ортоцентр треугольника.

**Задача 20.** (Теорема о шестиугольнике.) Пусть коника пересекает стороны  $AB$ ,  $BC$  и  $AC$  треугольника  $ABC$  в точках  $C_1$  и  $C_2$ ,  $A_1$  и  $A_2$ ,  $B_1$  и  $B_2$  соответственно. Через  $A_3$ ,  $B_3$  и  $C_3$  обозначим точки пересечения пар касательных, проведенных в точках  $A_1$  и  $A_2$ ,  $B_1$  и  $B_2$ ,  $C_1$  и  $C_2$  (рис. 3.3). Докажите, что прямые  $AA_3$ ,  $BB_3$  и  $CC_3$  пересекаются в одной точке.

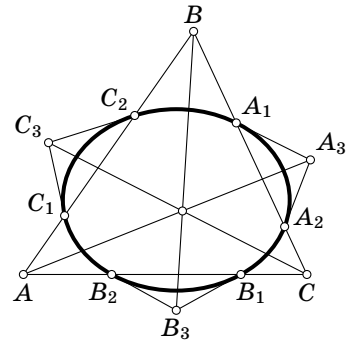


Рис. 3.3

### § 3.2. Полярное соответствие. Принцип двойственности

Пусть даны некоторая коника и точка  $A$ . Рассмотрим произвольное проективное преобразование, переводящее данную конику в окружность. Пусть  $A'$  — образ точки  $A$  при этом преобразовании,  $a'$  — полярная точка  $A'$  относительно окружности,  $a$  — образ прямой  $a'$  при обратном преобразовании. Тогда прямая  $a$  может быть построена следующим

образом. Проведем через точку  $A$  две прямые, пересекающие данную конику в точках  $X_1, X_2$  и  $Y_1, Y_2$ . Пусть  $X$  — точка пересечения касательных к конике в точках  $X_1, X_2$ ,  $Y$  — точка пересечения касательных в точках  $Y_1, Y_2$ . Тогда прямая  $X_1Y_1$  совпадает с  $a$  (рис. 3.4).

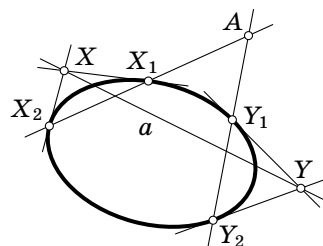


Рис. 3.4

Действительно, при применении описанного построения к точке  $A'$  и окружности получаем прямую  $a'$ , а проективное преобразование сохраняет точки пересечения и касания прямых и коник. Следовательно, прямая  $a$  не зависит от выбранного проективного преобразования. Можно построить  $a$  и по-другому: как прямую, соединяющую точки пересечения  $X_1Y_1$  с  $X_2Y_2$  и  $X_1Y_2$  с  $X_2Y_1$  (рис. 3.5). В частности, если  $A$  — центр эллипса или гиперболы, получим бесконечно удаленную прямую. Отметим, что последнее построение применимо и к вырожденным кривым второго порядка, причем построенная прямая будет проходить через общую точку  $O$  прямых  $l_1, l_2$ , составляющих кривую, и двойное отношение прямых  $(l_1l_2; OAa)$  равно 1 (рис. 3.6).

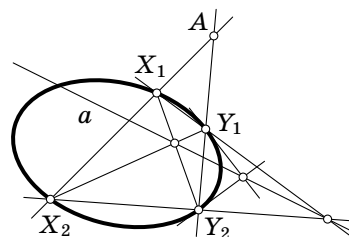


Рис. 3.5

Определенное таким образом соответствие между точками и прямыми называется *полярным соответствием* относительно данной коники. При этом прямая  $a$  называется *полярной* точки  $A$ , а  $A$  — *полюсом* прямой  $a$ . Очевидно, что все сформулированные выше свойства полярного соответствия сохраняются.

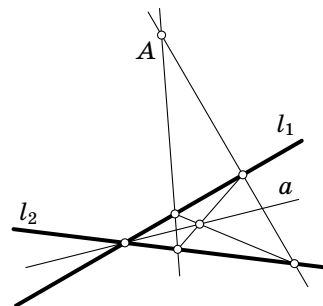


Рис. 3.6

Отметим, что если прямая  $p$  является полярной точки  $P$ , а произвольная проходящая через  $P$  прямая пересекает  $p$  в точке  $Q$  и конику в точках  $A, B$ , то  $(PQ; AB) = 1$ . Для доказательства достаточно рассмотреть случай, когда коника является окружностью, а одна из точек  $P, Q$  бесконечно удаленная (рис. 3.7).

В частности, если коника является эллипсом или гиперболой, то середины всех хорд, параллельных фиксированной прямой, лежат на прямой, проходящей через центр коники (направления, задаваемые этой прямой и прямой, параллельной хордам, называются *сопряженными* относительно коники), а если коника — парабола, то на прямой,

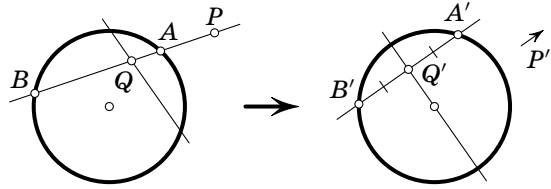


Рис. 3.7

параллельной ее оси (см. задачу 10). Верно и двойственное утверждение: если через некоторую точку проведены касательные к конике  $a$  и  $b$  и две произвольные прямые  $p$  и  $q$ , то полюс прямой  $p$  лежит на  $q$  тогда и только тогда, когда  $(ab; pq) = 1$ .

Принцип двойственности также остается верным. Поэтому, например, обратная теорема Бриансона является следствием обратной теоремы Паскаля. Можно также заключить, что для любых пяти прямых общего положения существует единственная касающаяся их коника.

**Определение.** Двойственным образом гладкой кривой называется множество двойственных образов всех касательных, проведенных к этой кривой.

Пример кривой и ее двойственного образа изображен на рис. 3.8.

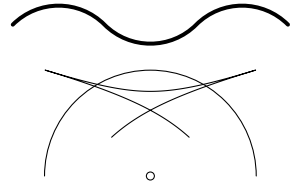


Рис. 3.8

Важным свойством двойственного преобразования является следующая теорема.

**Теорема 3.3.** Пусть  $R(\gamma)$  есть двойственный образ кривой  $\gamma$ . Тогда  $R(R(\gamma)) = \gamma$ .

**Доказательство.** Пусть точка  $X$  движется по кривой  $\gamma$  к точке  $A$ . Тогда, очевидно, пересечение касательных, проведенных в точках  $X$  и  $A$  (обозначим их через  $x$  и  $a$  соответственно), стремится к  $A$ . Пересечение  $x$  и  $a$  обозначим через  $Y$ . Посмотрим, что происходит с образами прямых  $x$  и  $a$  на кривой  $R(\gamma)$ . Очевидно,  $R(x)$  стремится к  $R(a)$ , а значит, отрезок  $R(a)R(x)$  стремится к касательной к  $R(\gamma)$ , проведенной в точке  $R(a)$ . Но  $R(a)R(x)$  — это не что иное, как  $R(Y)$ , следовательно,  $R(Y)$  стремится к касательной к  $R(\gamma)$ , проведенной в точке  $R(a)$ . Тогда к образу касательной, проведенной в точке  $R(a)$ , стремится образ  $R(Y)$ . Но это и есть точка  $Y$ , которая при этом движении стремится к  $A$ . Получается, что образ касательной, проведенной

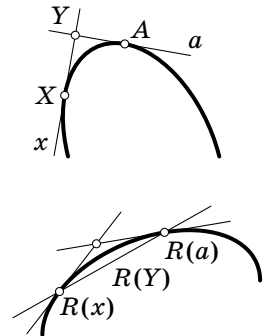


Рис. 3.9

в точке  $R(a)$ , — это сама точка  $A$ . А это и означает, что двойственный образ касательных к  $R(\gamma)$  есть сама кривая  $\gamma$ .  $\square$

Полярное соответствие дает еще один способ получения коник. Рассмотрим окружность  $\alpha$  с центром  $A$  и радиусом  $r$  и другую окружность  $\omega$  с центром  $O$ . Поляры всех точек окружности  $\alpha$  относительно  $\omega$  огибают некоторую кривую, которая называется *полярным образом* окружности  $\alpha$ . Полярный образ можно получить и по-другому: как множество полюсов всех касательных к  $\alpha$ .

**Теорема 3.4.** *Полярный образ одной окружности относительно другой является коникой.*

**Доказательство.** Пусть даны окружность  $\omega$  с центром в точке  $O$  и окружность  $\omega_1$  с центром в точке  $O_1$  (для удобства будем считать, что  $O$  лежит внутри  $\omega_1$ ; см. рис. 3.10). Пусть  $\omega_1$  при инверсии относительно  $\omega$  перейдет в окружность  $\omega_2$  с центром в точке  $O_2$ .

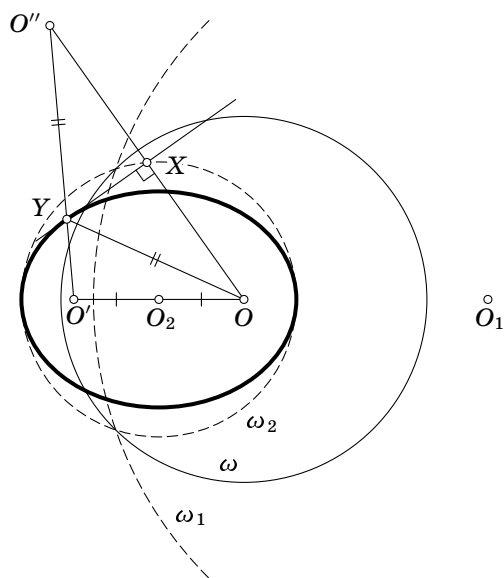


Рис. 3.10

Обозначим прямую, проходящую через точку  $X$  и перпендикулярную  $OX$ , через  $p(X)$ . Она будет полярным образом точки, инверсной точке  $X$  относительно  $\omega$ . Так, при движении точки  $X$  по  $\omega_2$  соответствующая ей прямая пробежит множество поляр всех точек, лежащих на  $\omega_1$ . Таким образом, нам надо доказать, что множество всех таких прямых касается некоторой коники. Рассмотрим точку  $O'$ , симметричную точке  $O$  относительно  $O_2$ , и точку  $O''$ , симметричную точке  $O$  относительно  $X$ . Легко понять, что длина отрезка  $O'O''$  равна диаметру окружности  $\omega_2$ . Пусть  $O'O''$  пересекает  $p(X)$  в точке  $Y$ .



Тогда, в силу того что  $p(X)$  — серединный перпендикуляр к  $OO''$ , длины отрезков  $YO$  и  $YO''$  равны. Кроме того, углы, которые образуют прямые  $YO$  и  $YO'$  с  $p(X)$ , равны. А значит,  $p(X)$  в точке  $Y$  касается эллипса с фокусами в  $O$  и  $O'$  и большой полуосью, равной диаметру окружности  $\omega_2$ . Кроме того, легко понять, что при движении точки  $X$  по  $\omega_2$  точка  $Y$  пробежит весь этот эллипс.

Таким образом, мы просто указали конику, которая является полярным образом нашей окружности.

Если точка  $O$  лежит вне  $\omega_1$ , абсолютно аналогичными рассуждениями можно показать, что полярным образом будет гипербола, а в случае, если  $O$  лежит на  $\omega_1$ , — парабола.  $\square$

В силу проективной эквивалентности коник доказанную теорему можно обобщить.

**Теорема 3.5.** *Полярный образ одной коники относительно другой является коникой.*

Единственное, что, конечно, непонятно, — это почему любые две коники проективным преобразованием можно перевести в две окружности. Это, вообще говоря, неверно (хотя верно в комплексном смысле). Но это возможно, если коники пересекаются не более чем в двух точках. Этого легко достичь, увеличив (или уменьшив) конику, относительно которой делаем полярное преобразование, в несколько раз (с центром в центре этой конике), так, чтобы она пересекала нужную нам конику не более чем в двух точках. Двойственный образ при этом сожмется. Ну а любые две коники, пересекающиеся не более чем в двух точках, проективным преобразованием перевести в две окружности можно.

На самом деле эту теорему можно просто доказать, воспользовавшись только теоремами Паскаля и Брианшона. Зафиксируем пять точек на конике, образ которой мы рассматриваем. Обозначим их через  $X_1, X_2, X_3, X_4$  и  $X_5$ , а конику через  $\alpha$ . Тогда поляры этих пяти точек будут касаться еще некоторой фиксированной коники, которую мы обозначим через  $\alpha_1$ . Пусть точка  $X$  движется по  $\alpha$ . Тогда для точек  $X_1, \dots, X_5$  и  $X$  выполнено следствие теоремы Паскаля. Значит, для поляр этих точек выполнено следствие теоремы Брианшона. Но из обратной теоремы Брианшона следует, что все эти шесть прямых касаются одной коники. Этой коникой может быть только коника  $\alpha_1$ , поскольку пять прямых (поляр к точкам  $X_i, i = 1, \dots, 5$ ) могут касаться только одной коники. Таким образом, поляры всех точек, лежащих на  $\alpha$ , касаются  $\alpha_1$ . Обратными рассуждениями легко показать, что коника  $\alpha_1$  заматается полностью.

Наконец, укажем еще один возможный подход к определению коник и полярных соответствий. Пусть между точками и прямыми проективной плоскости установлено взаимно однозначное соответствие,

обладающее свойством двойственности, т. е. если точка  $A$  принадлежит образу точки  $B$ , то точка  $B$  принадлежит образу точки  $A$ . Тогда множество точек, принадлежащих своим образам, является коникой (возможно, мнимой), причем полярное соответствие относительно этой коники совпадает с заданным.

Теперь покажем, что фокус и соответствующая ему директриса коники полярны. Это уже по сути было доказано для параболы. Докажем это для оставшихся коник.

**Теорема 3.6.** Фокус и соответствующая ему директриса коники полярны (рис. 3.11).

**Доказательство.** Рассмотрим фокус  $F_1$  и его поляр  $l$ . Докажем, что для любых двух точек  $X$  и  $Y$  на конике отношения расстояний до  $F_1$  и  $l$  равны. Пусть  $S$  — это точка пересечения прямых  $XU$  и  $l$ . Пересечение касательных к конике, проведенных в точках  $X$  и  $Y$ , обозначим через  $Z$ . В силу свойств полярного преобразования  $F_1Z$  — это полярная точка  $S$ . В силу следствия из теоремы 1.2 угол  $SF_1Z$  прямой. Кроме того, из теоремы 1.4 следует, что  $F_1Z$  — биссектриса угла  $XF_1Y$ . Следовательно,  $F_1S$  — биссектриса внешнего угла  $XF_1Y$ . Воспользовавшись свойством биссектрисы, получаем, что  $\frac{F_1X}{SX} = \frac{F_1Y}{SY}$ . Ну а поскольку  $SX$  относится к  $SY$  так же, как относятся расстояния от точек  $X$  и  $Y$  до любой прямой, содержащей  $S$  (конечно, отличной от  $XU$ ), получаем  $\frac{F_1X}{d_x} = \frac{F_1Y}{d_y}$ , где  $d_x$  и  $d_y$  — расстояния от точек  $X$  и  $Y$  до  $l$ .  $\square$

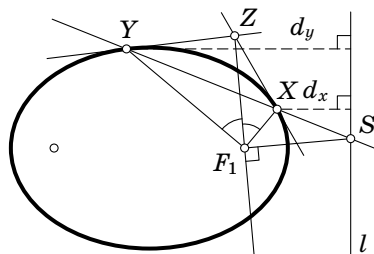


Рис. 3.11

Это утверждение можно также доказать, воспользовавшись конструкцией Данделена, с помощью которой мы доказали, что коника — это проекция окружности (рис. 3.12). В трехмерном (и вообще  $n$ -мерном) пространстве тоже можно делать двойственные преобразования. Они строятся абсолютно так же, как в двумерном. При этом точки переходят в плоскости и наоборот, а прямые переходят в другие прямые.

Полярной плоскостью точки  $S$  относительно сферы  $\Omega$  будет плоскость  $\sigma$ , а полярной плоскостью точки  $F$  будет  $\pi$ . Потому полярной прямой  $SF$  будет прямая  $l$ . Ясно что при этом полюсом прямой  $l$  относительно окружности, образованной точками пересечения сферы  $\Omega$  и плоскости  $\sigma$ , будет точка пересечения прямой  $SF$  и плоскости  $\sigma$ . А значит,  $F$  будет полюсом прямой  $l$  относительно эллипса, образованного пересечением нашего конуса и плоскости  $\pi$  (это будет просто проекция из точки  $S$  плоскости  $\sigma$  на плоскость  $\pi$ ).

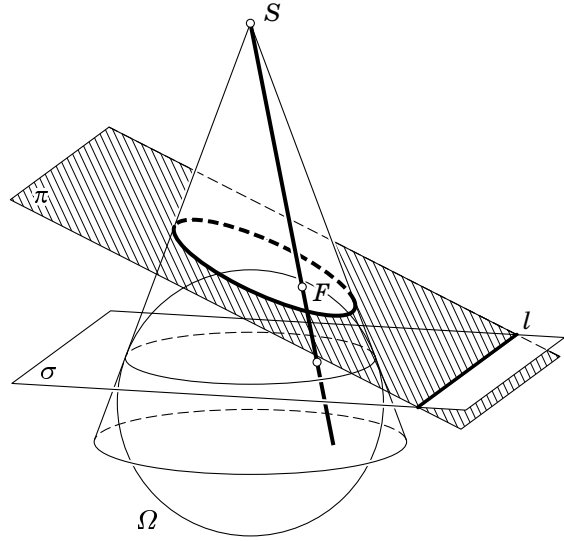


Рис. 3.12

Интересный пример утверждений, переходящих друг в друга при некотором полярном преобразовании, представляют теорема 1.11 и утверждение из задачи 19.

Действительно, пусть  $H$  — ортоцентр треугольника  $ABC$ . При полярном преобразовании относительно окружности  $\omega$  с центром в  $H$  треугольник  $ABC$  перейдет в гомотетичный ему относительно точки  $H$  треугольник  $A'B'C'$ . Если парабола касается сторон треугольника  $ABC$ , то коника, двойственная ей относительно  $\omega$ , будет проходить через точки  $A'$ ,  $B'$  и  $C'$ , а также через точку  $H$ , так как это полюс бесконечно удаленной прямой. В силу задачи 19 эта коника будет являться равносоставленной гиперболой. Точки пересечения этой гиперболы с бесконечно удаленной прямой задают перпендикулярные направления, а значит, их полярны будут перпендикулярны. С другой стороны, полярными точек пересечения этой гиперболы с бесконечно удаленной прямой будут касательные, проведенные из точки  $H$  к нашей параболе (рис. 3.13).

Аналогичными рассуждениями можно, наоборот, вывести утверждение задачи 19 из теоремы 1.11. Следовательно, эти теоремы являются двойственными.

Добавим еще несколько теорем, связанных с чевианными треугольниками вписанных в конику треугольников.

**Теорема 3.7.** *Треугольник  $ABC$  автополярен (т. е. его стороны являются полярными образами соответствующих вершин) относительно коники тогда и только тогда, когда он является чевианным*

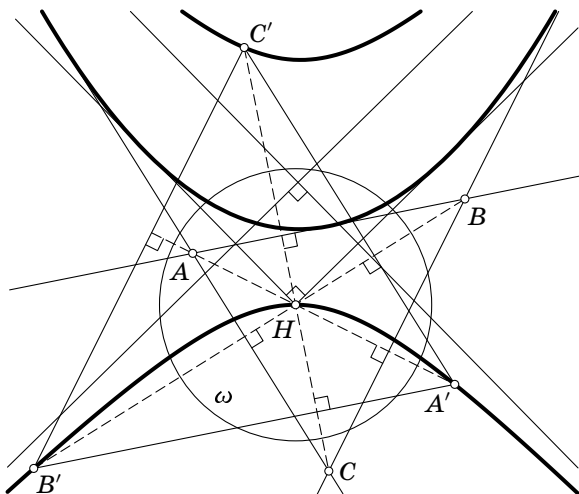


Рис. 3.13

треугольником некоторой точки, лежащей на этой конике, относительно треугольника, вписанного в эту конику.

**Доказательство.** Переведем вершины  $B$  и  $C$  треугольника в бесконечно удаленные точки, задающие перпендикулярные направления. Тогда наша коника, очевидно, перейдет в конику с центром в  $A$  (поскольку центр коники является полюсом бесконечно удаленной прямой). Рассмотрим прямоугольник, вписанный в конику, со сторонами, параллельными направлениям, которые задают точки  $B$  и  $C$  (такой прямоугольник существует в силу автополярности треугольника  $ABC$ ).

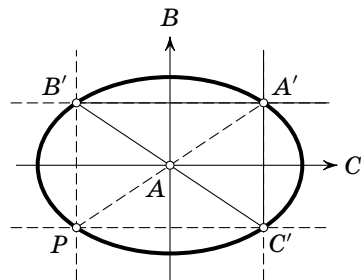


Рис. 3.14

Его вершины можно рассматривать как треугольник и точку на конике, для которой треугольник  $ABC$  автополярен (рис. 3.14).  $\square$

**Теорема 3.8.** Пусть даны треугольник  $ABC$  и точка  $Z$ . Для произвольной проходящей через точку  $Z$  прямой найдем точки  $A', B'$  ее пересечения с  $BC$  и  $AC$ . Тогда геометрическим местом точек пересечения прямых  $AA'$  и  $BB'$  является коника, проходящая через точки  $A, B, C$  и касающаяся прямых  $AZ$  и  $BZ$ .

**Доказательство.** Проведем проективное преобразование, переводящее треугольник  $ABC$  в равнобедренный прямоугольный треугольник ( $AC = BC$ ), а точку  $Z$  — в бесконечно удаленную точку, направление на которую перпендикулярно  $AB$ . Тогда треугольники  $AA'P$

и  $B'BP$ , где  $P$  — точка пересечения  $AB$  и  $A'B'$ , равны и, значит, прямые  $AA'$  и  $BB'$  перпендикулярны, т. е. точка их пересечения лежит на описанной окружности треугольника  $ABC$ . При этом прямые  $BZ$ ,  $AZ$  касаются этой окружности в точках  $A$ ,  $B$ .  $\square$

Пусть теперь  $Y$  — точка пересечения касательных к конике, проведенных в точках  $A$  и  $C$ . Будем рассматривать точки  $A'$  и  $C'$  пересечения прямых, проходящих через  $Y$ , с  $BC$  и  $AB$ . Тогда точка пересечения прямых  $AA'$  и  $CC'$  лежит на конике. Это означает, что существует семейство треугольников  $A'B'C'$ , вершины которых лежат на соответствующих сторонах треугольника  $ABC$ , со следующими свойствами.

1. Для каждого треугольника семейства прямые  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  пересекаются в одной точке. Множество этих точек является коникой, проходящей через  $A$ ,  $B$ ,  $C$ .

2. Все прямые  $A'B'$  проходят через полюс прямой  $AB$  относительно описанной коники. Аналогично все прямые  $A'C'$  проходят через полюс прямой  $AC$ , а все прямые  $B'C'$  — через полюс прямой  $BC$ .

Проективные свойства коник могут оказаться полезными для доказательства утверждений, на первый взгляд с кониками не связанных. Приведем пример такого утверждения.

**Теорема 3.9.** Пусть даны треугольник  $ABC$  и точки  $P$ ,  $Q$ , и пусть прямые  $AP$ ,  $BP$ ,  $CP$  пересекают соответствующие стороны треугольника в точках  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ , а прямые  $AQ$ ,  $BQ$ ,  $CQ$  — в точках  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2$ . Пусть  $C_3$ ,  $C_4$  — точки пересечения прямых  $CC_1$  и  $A_2B_2$ ,  $CC_2$  и  $A_1B_1$  соответственно; точки  $A_3$ ,  $A_4$ ,  $B_3$ ,  $B_4$  определяются аналогично. Тогда прямые  $A_1A_4$ ,  $A_2A_3$ ,  $B_1B_4$ ,  $B_2B_3$ ,  $C_1C_4$ ,  $C_2C_3$  пересекаются в одной точке (рис. 3.15).

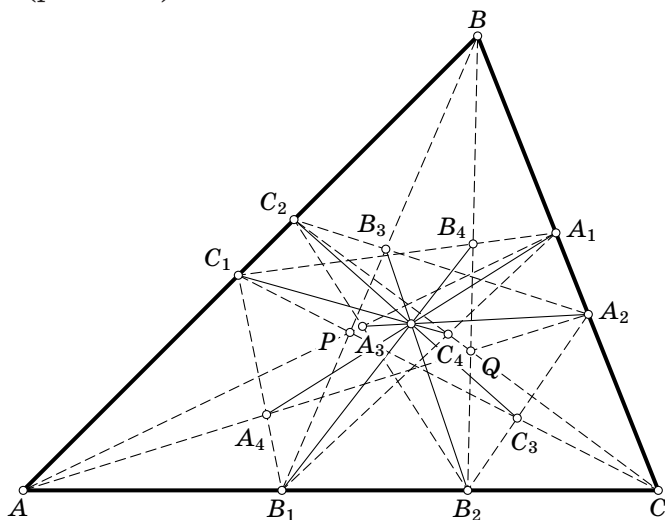


Рис. 3.15

**Доказательство.** Точки  $A, B, C, P, Q$  определяют конику. Без ограничения общности можно считать, что эта коника — окружность, а  $PQ$  — ее диаметр. Так как  $A_1, B_1, C_1$  — точки пересечения противоположных сторон и диагоналей вписанного четырехугольника  $ABCP$ ,  $A_1B_1$  — поляр точки  $C_1$ . Так как  $PQ$  — диаметр, основания высот треугольника  $PQC_1$ , проведенных из  $P$  и  $Q$ , лежат на окружности. Рассмотрев четырехугольник, образованный этими основаниями и точками  $P, Q$ , получаем, что ортоцентр треугольника  $PQC_1$  лежит на полюсе  $C_1$ , т. е. на  $A_1B_1$ . Так как он лежит и на прямой  $QC$ , он совпадает с точкой  $C_4$ . Таким образом, прямая  $C_1C_4$  перпендикулярна диаметру  $PQ$ , т. е. проходит через его полюс. Аналогично остальные пять прямых также проходят через полюс прямой  $PQ$ , а следовательно, он является точкой, о которой говорится в теореме.  $\square$

С помощью двойственного преобразования можно доказать следующую красивую теорему.

**Теорема 3.10 (Фрежье).** Пусть даны коника и точка  $P$  на ней. Тогда все хорды, видимые из точки  $P$  под прямым углом, проходят через одну точку (рис. 3.16).

**Доказательство.** Применим полярное соответствие относительно окружности с центром  $P$ . Так как данная коника проходит через точку  $P$ , ее образом будет парабола. Проходящие через точку  $P$  перпендикулярные прямые перейдут в две бесконечно удаленные точки, соответствующие перпендикулярным направлениям, а их вторые точки пересечения с коникой — в перпендикулярные касательные к параболе. Так как точка пересечения этих касательных лежит на директрисе, соответствующая ей хорда проходит через ее полюс  $P'$ .  $\square$

Очевидно, что точка  $P'$  является пересечением диаметра, симметричного проходящему через  $P$ , и нормали к конике в точке  $P$  (рис. 3.17).

Нетрудно убедиться, что  $P'$  делит диаметр в отношении, равном отношению квадратов осей коники, и, значит, когда точка  $P$  пробегает конику,  $P'$  описывает конику, гомотетичную исходной относительно ее центра (если исходная коника — парабола, то новая получается из нее параллельным переносом) (рис. 3.18).

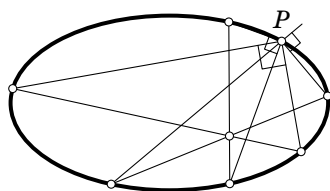


Рис. 3.16.

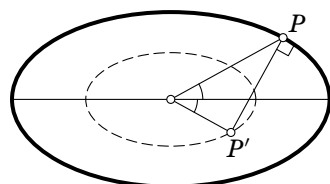


Рис. 3.17.

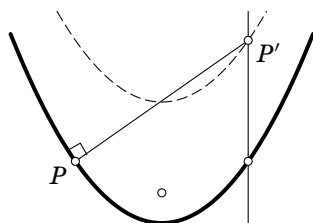


Рис. 3.18

Аналогичными рассуждениями доказывается следующее обобщение теоремы Фрежье.

*Хорды коники, видимые из фиксированной точки  $P$  на ней под углом  $\varphi$  или  $180^\circ - \varphi$ , касаются одной коники (рис. 3.19).*

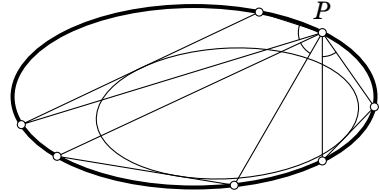


Рис. 3.19

После двойственного преобразования относительно окружности с центром  $P$  искомая огибающая перейдет в конику (гиперболу), из которой парабола видна под углом  $\varphi$  или  $180^\circ - \varphi$ .

**Задача 21.** Пусть  $C$  — центр коники, являющейся полярным образом окружности  $\alpha$  относительно окружности  $\omega$ . Докажите, что полярная точки  $C$  относительно  $\omega$  совпадает с полярной центра окружности  $\omega$  относительно  $\alpha$ .

**Задача 22.** 1. Докажите, что направления, сопряженные относительно равносторонней гиперболы, симметричны относительно ее асимптот.

2. Докажите, что угол между concentрическими равносторонними гиперболами равен удвоенному углу между их асимптотами.

**Задача 23.** Какую кривую огибают стороны ромбов, вписанных в фиксированный эллипс?

### § 3.3. Пучки кривых. Теорема Понселе

**Определение.** Пусть даны две коники с уравнениями вида

$$(1) \quad f(x, y) = 0 \quad \text{и} \quad g(x, y) = 0.$$

Тогда *пучком коник* называется множество кривых с уравнениями

$$(2) \quad af(x, y) + bg(x, y) = 0,$$

где  $a, b$  — произвольные числа.

Очевидно, что пучок может быть задан любыми двумя принадлежащими ему кониками. При этом если две коники, задающие пучок, пересекаются в некоторой точке, то и все коники пучка проходят через эту точку. Если же две коники касаются друг друга, то и все коники пучка касаются друг друга в этой точке.

Частными случаями пучков являются определенные в § 2.4 пучки окружностей. Действительно, если принять линию центров окружностей за ось абсцисс, а радикальную ось за ось ординат, то легко видеть, что уравнения окружностей примут вид

$$x^2 + y^2 + ax + c = 0,$$

где  $c$  — степень начала координат относительно окружностей пучка, а  $a$  — произвольное число. Очевидно, что это частный случай уравнения (2).

Из основной теоремы алгебры следует, что любые две кривые порядков  $m$  и  $n$  пересекаются по  $mn$  точкам (которые могут быть комплексными или совпадающими). В частности, при  $m = n = 2$  получаем, что любые две коники пересекаются в 4 точках. Тогда любая коника соответствующего пучка также проходит через эти точки.

Можно доказать и обратное утверждение: для любой коники, проходящей через 4 точки пересечения коник с уравнениями  $f(x, y) = 0$  и  $g(x, y) = 0$ , найдутся такие числа  $a, b$ , что уравнение коники можно привести к виду  $af(x, y) + bg(x, y) = 0$ . Это утверждение называется *теоремой о пучке коник*.

Нетрудно показать, что гипербола является равносторонней тогда и только тогда, когда в ее уравнении (см. уравнение (1) в § 1.2)  $a_{11} + a_{22} = 0$ . При этом удобно считать равносторонней гиперболой и вырожденную кривую, состоящую из двух перпендикулярных прямых. Тогда из теоремы о пучке коник следует, что если две равносторонние гиперболы пересекаются в четырех точках, то любая коника определяемого этими точками пучка также будет равносторонней гиперболой. Таким образом, мы получаем еще одно доказательство того, что описанная около треугольника коника является равносторонней гиперболой тогда и только тогда, когда она проходит через ортоцентр.

Теорема о пучке коник позволяет определить пучок как множество коник, проходящих через данные 4 точки общего положения  $A, B, C, D$ . При этом для любой точки  $X$ , отличной от  $A, B, C, D$ , существует ровно одна коника пучка, проходящая через  $X$ .

Среди точек, задающих пучок, некоторые могут быть мнимыми. Например, любая окружность пересекает бесконечно удаленную прямую в двух фиксированных комплексных точках, так что гиперболический пучок окружностей задается этими точками и двумя общими точками окружностей, а эллиптический — четырьмя комплексными точками, две из которых конечные и две бесконечно удаленные. Возможно также совпадение некоторых образующих пучок точек. При этом если совпадают две точки, то все коники пучка в двойной точке касаются друг друга, как в параболическом пучке окружностей, если три, то касание в этой точке имеет второй порядок, если четыре, то третий. Например, множество концентрических окружностей — это пучок, образованный двумя парами совпадающих точек.

Если все точки, задающие пучок, различны, то среди входящих в него кривых есть три вырожденных:  $AB \cup CD, AC \cup BD, AD \cup BC$ .

Опишем подробнее различные типы пучков.



1. Пучки, проходящие через четыре различные точки (рис. 3.20).  
Этому типу принадлежат также эллиптический и гиперболический пучки окружностей.

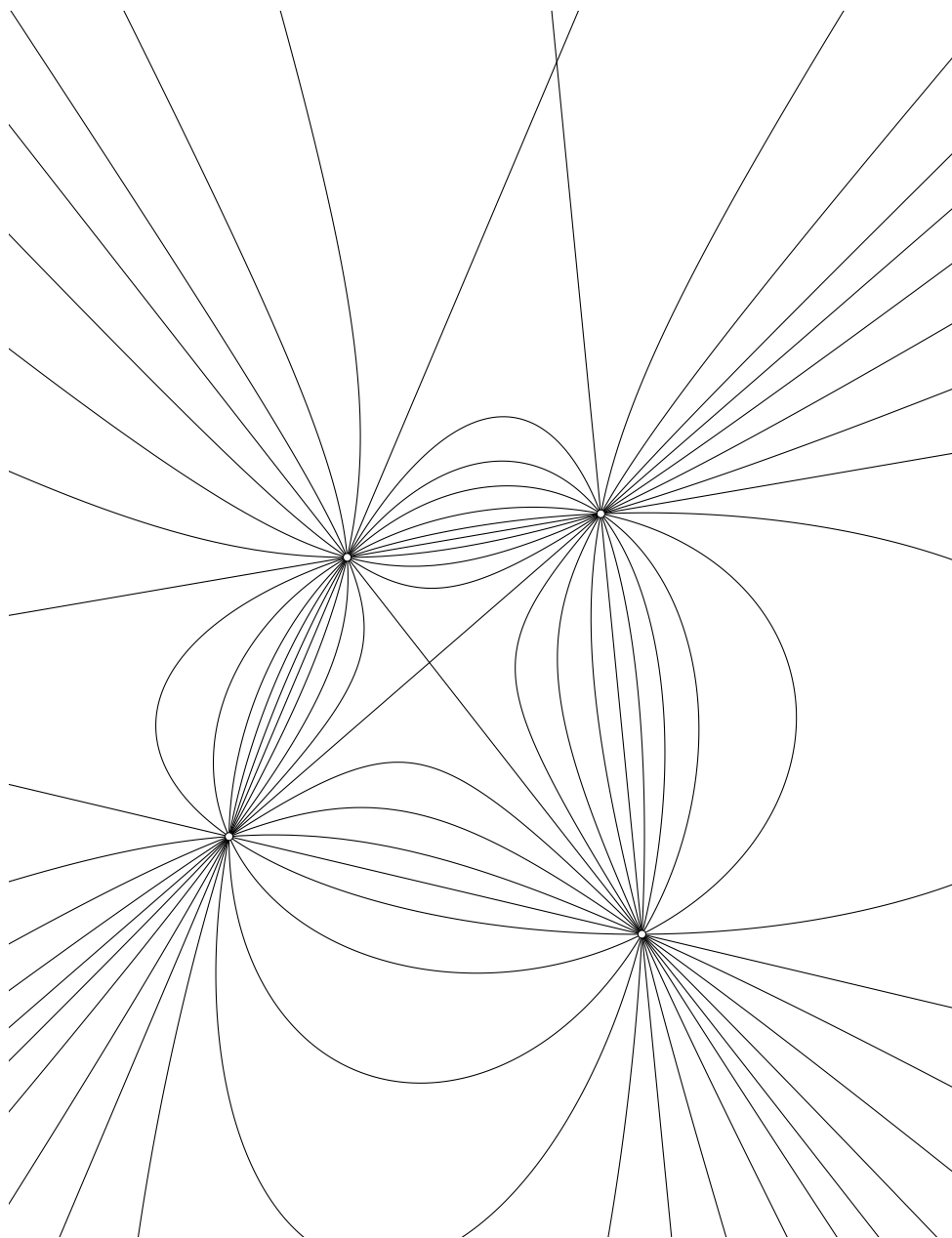


Рис. 3.20

2. Пучки, проходящие через четыре точки, две из которых совпадают, т. е. касающиеся данной прямой в фиксированной точке (рис. 3.21). Параболический пучок окружностей принадлежит этому типу.

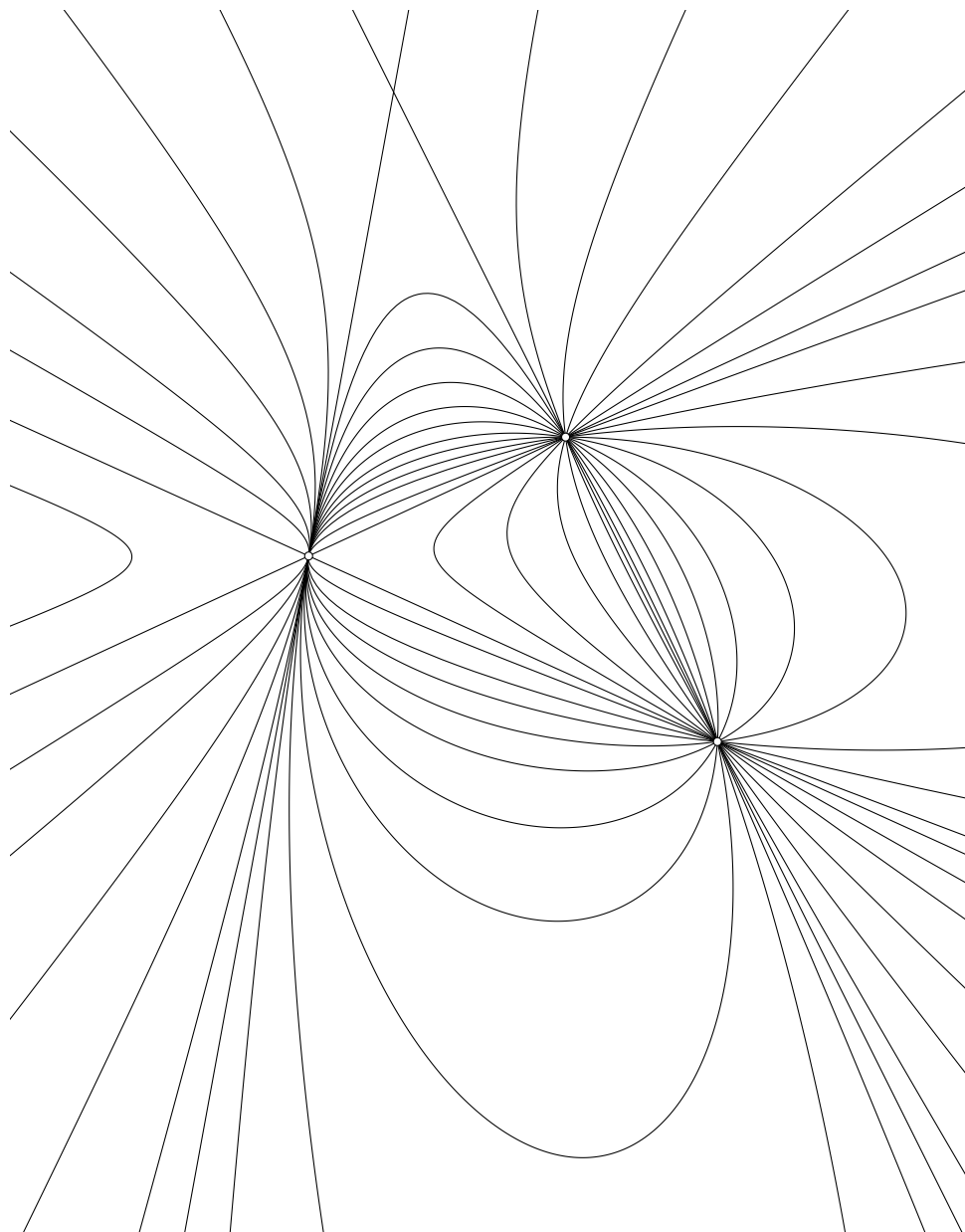


Рис. 3.21

3. Пучок, у которого две пары точек склеиваются. Он будет состоять из коник, касающихся двух данных прямых в двух данных точках (рис. 3.22). К этому типу также принадлежит пучок concentрических окружностей или парабол, уравнение которых имеет вид  $y = ax^2$ .

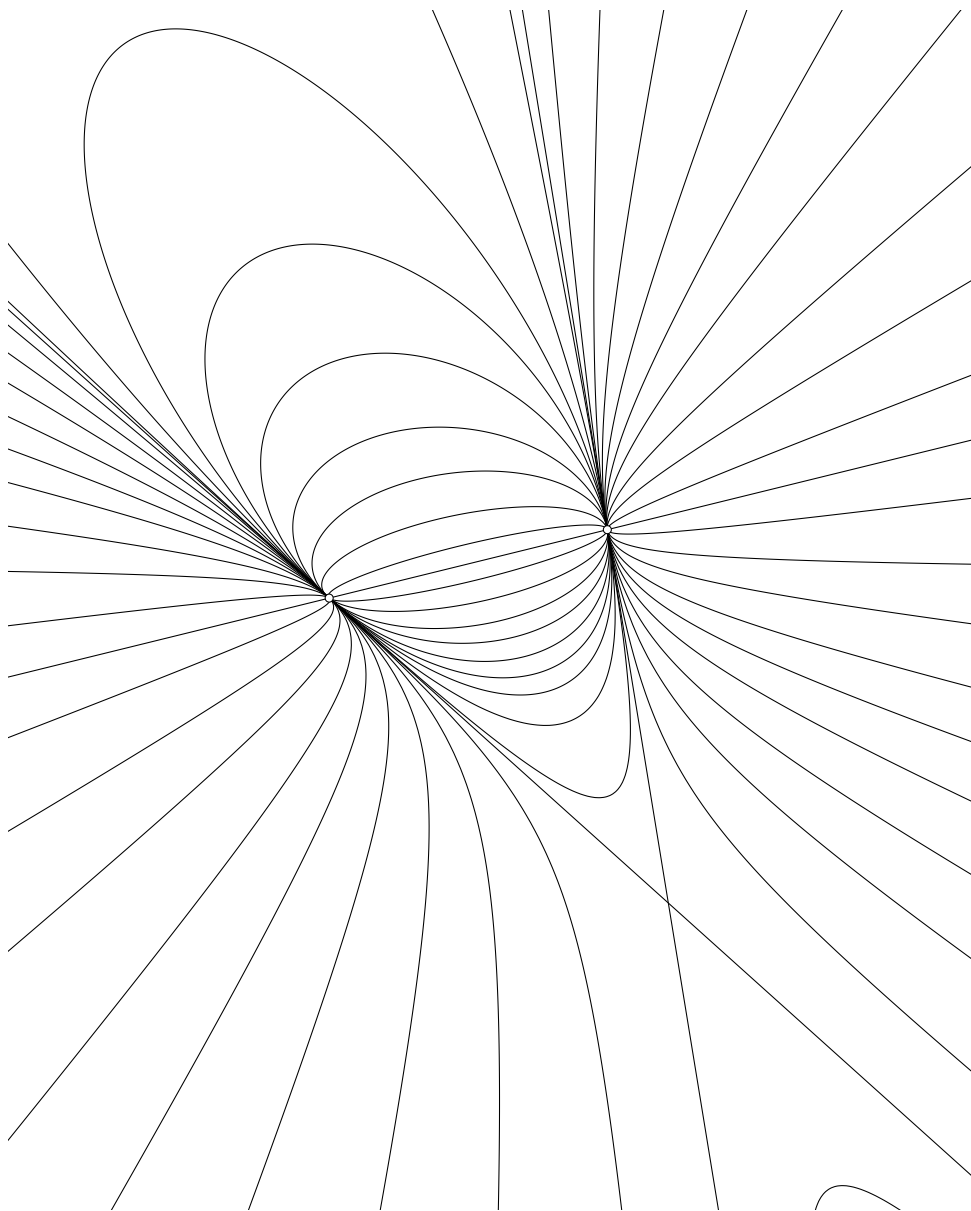


Рис. 3.22

4. Пучок, у которого три точки сливаются в одну (рис. 3.23). Коники этого пучка соприкасаются с некоторой окружностью.

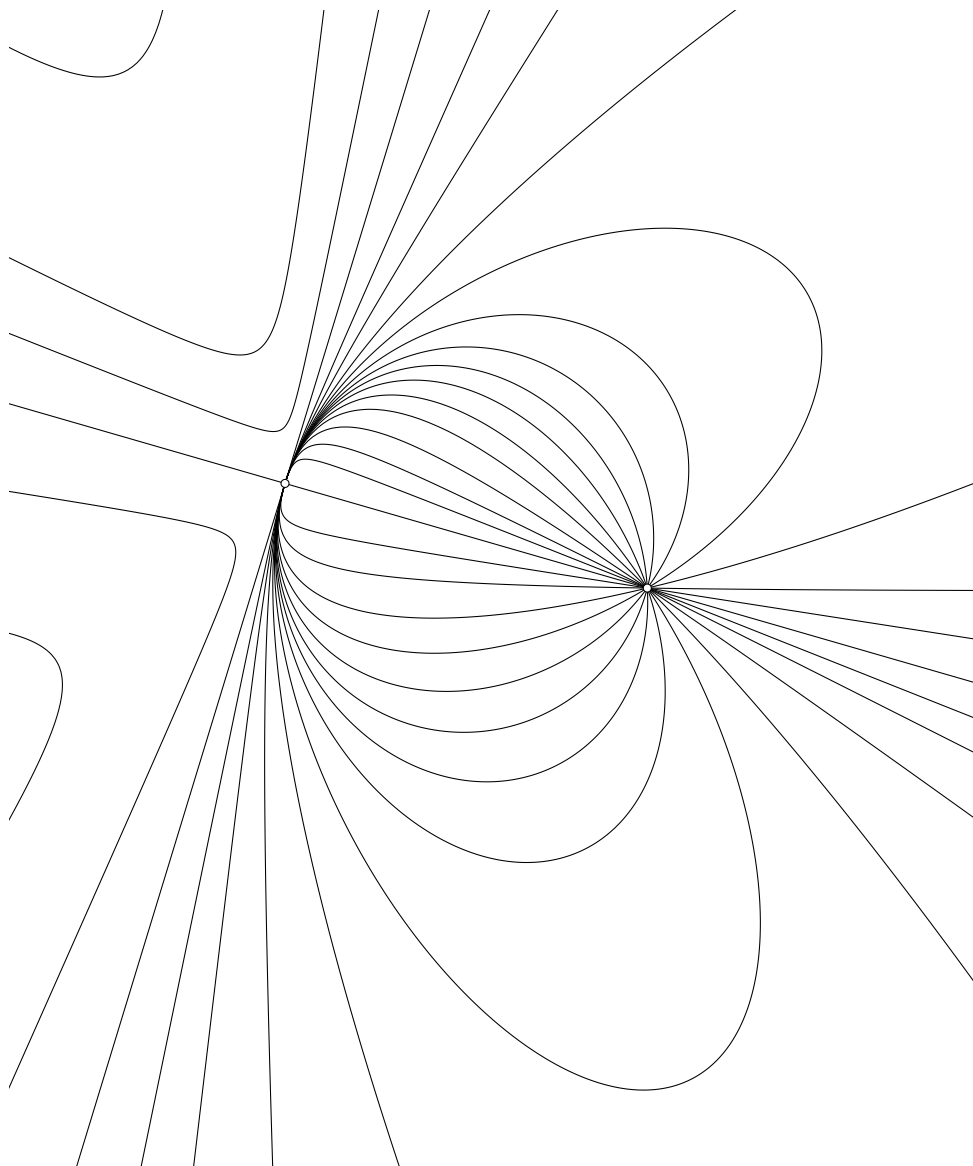


Рис. 3.23

5. Сверхсоприкасающийся пучок, у которого четыре точки, определяющие пучок, совпадают (рис. 3.24). Пример такого пучка — параболы, уравнение которых имеет вид  $y = x^2 + a$ .

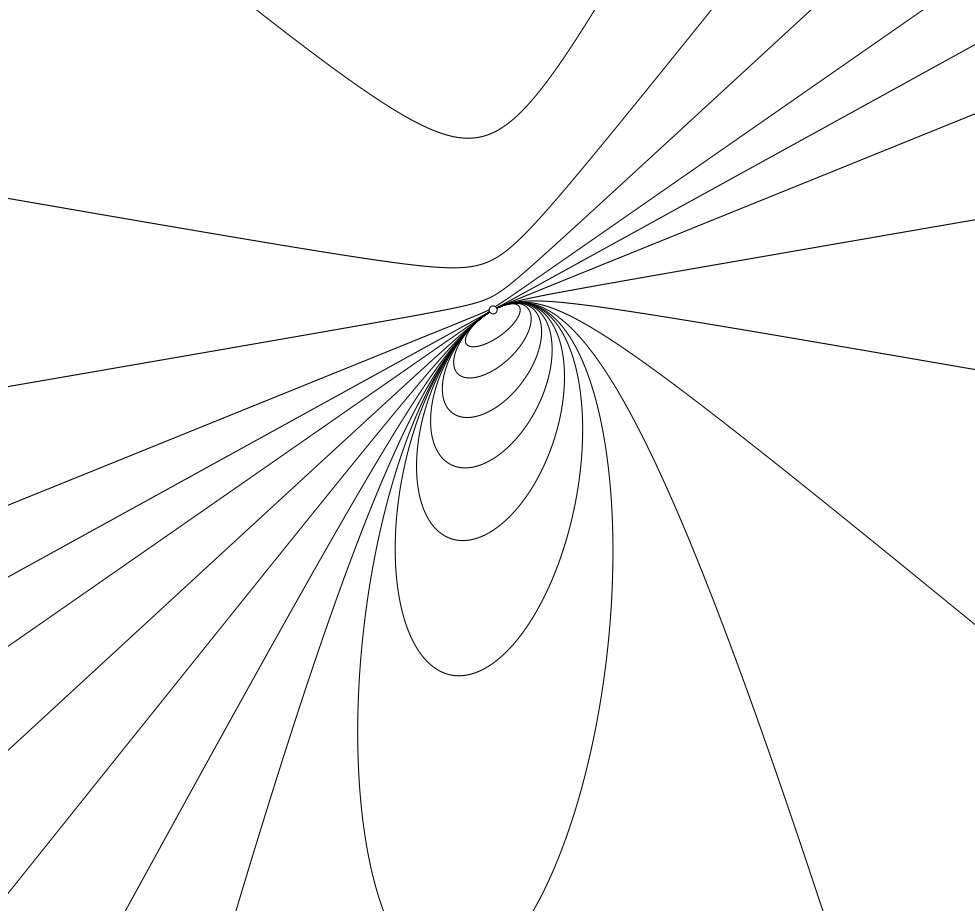


Рис. 3.24

Помимо пучков, заданных четырьмя точками, можно рассматривать *двойственные пучки*, т. е. множества коник, касающихся четырех данных прямых (рис. 3.25–3.27). Двойственные пучки также классифицируются в зависимости от того, есть ли среди определяющих пучок прямых совпадающие. Если совпадают две прямые, то все коники пучка касаются их, а значит, и друг друга, в одной точке; если три, то коники пучка соприкасаются; если все четыре, то сверхсоприкасаются. Отметим, что дважды касающийся и сверхсоприкасающийся пучки являются самодвойственными, т. е. переходят сами в себя при полярном соответствии относительно любой входящей в пучок коники. Пользуясь принципом двойственности, можно для каждого утверждения об обычных пучках сформулировать соответствующее утверждение о двойственных и наоборот.

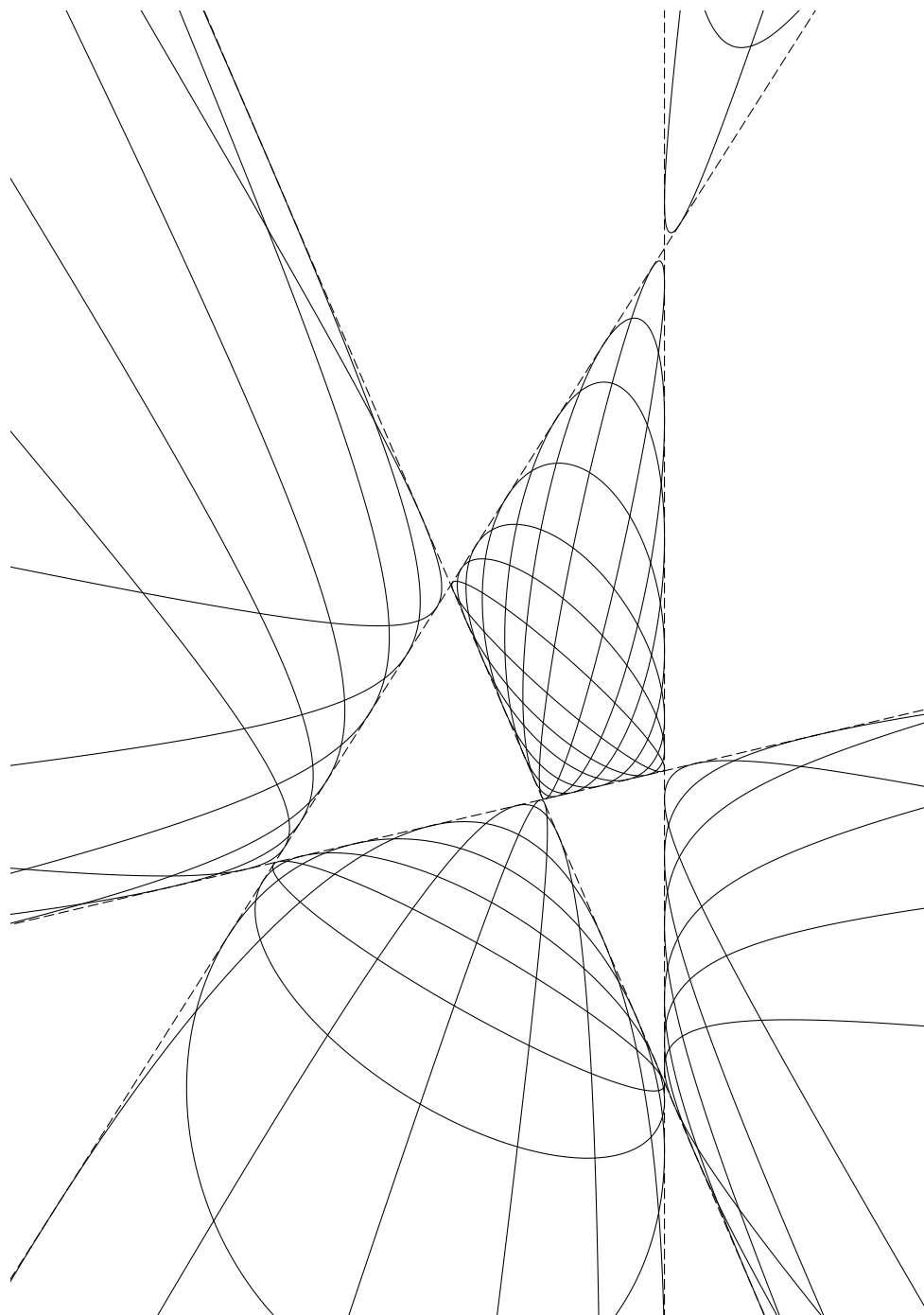


Рис. 3.25

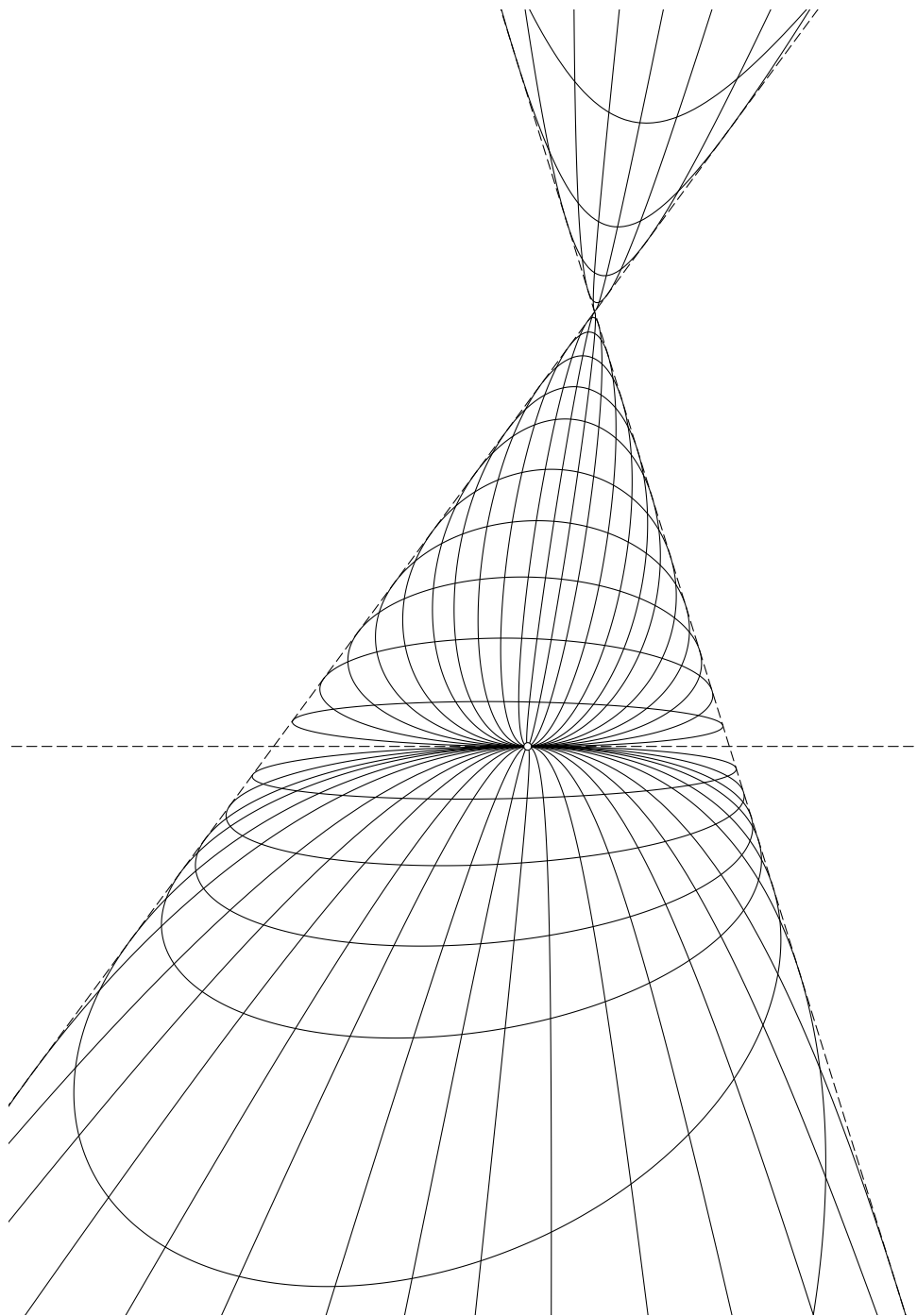


Рис. 3.26

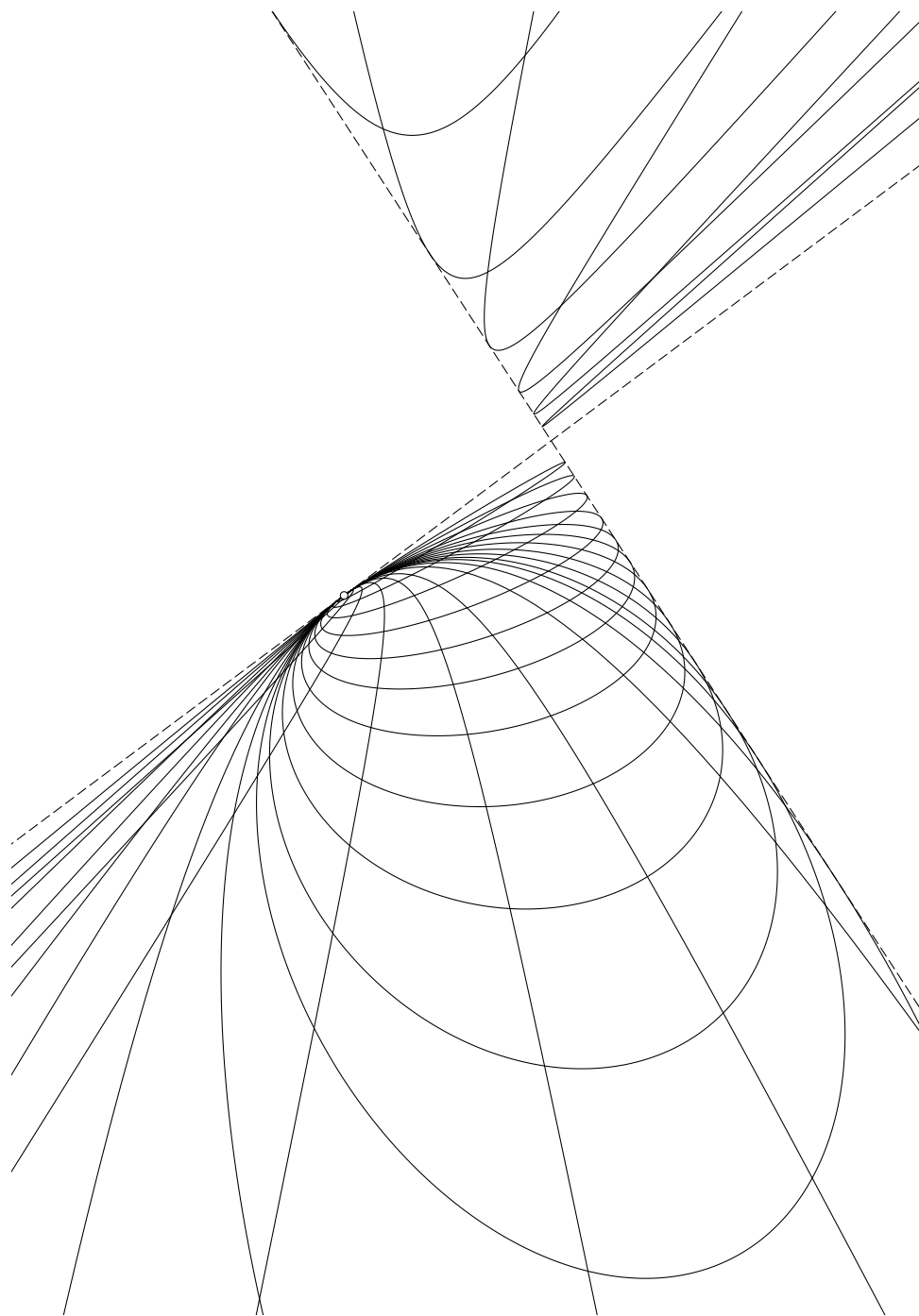


Рис. 3.27



С помощью теоремы о пучке коник можно доказать следующий красивый факт.

**Теорема 3.11 (о четырех кониках).** Пусть даны три коники  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ , и пусть  $P_1, Q_1, P'_1, Q'_1$  — точки пересечения коник  $\alpha_2$  и  $\alpha_3$ ;  $P_2, Q_2, P'_2, Q'_2$  — точки пересечения коник  $\alpha_1$  и  $\alpha_3$ ;  $P_3, Q_3, P'_3, Q'_3$  — точки пересечения коник  $\alpha_2$  и  $\alpha_1$ . Тогда если точки  $P_1, Q_1, P_2, Q_2, P_3, Q_3$  лежат на одной конике, то прямые  $P'_1Q'_1, P'_2Q'_2, P'_3Q'_3$  пересекаются в одной точке (рис. 3.28).

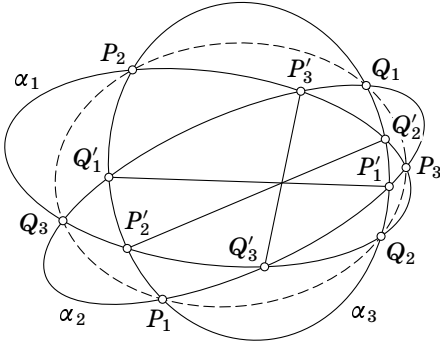


Рис. 3.28

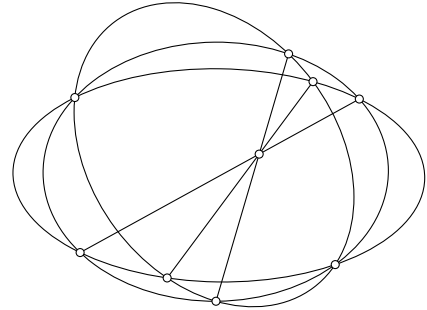


Рис. 3.29

**Доказательство.** Докажем сначала следующее вспомогательное утверждение.

**Теорема 3.12 (о трех кониках).** Пусть три коники имеют две общие точки. Тогда их общие хорды, проходящие через остальные точки пересечения каждой пары, пересекаются в одной точке (рис. 3.29).

Для доказательства достаточно перевести общие точки коник в точки пересечения бесконечно удаленной прямой с окружностями. Тогда все три коники перейдут в окружности и утверждение теоремы будет следовать из существования радикального центра.

Пусть теперь  $\alpha_0$  — коника, проходящая через точки  $P_i, Q_i, F_i(x, y) = 0$  — уравнение коники  $\alpha_i$ . Так как вырожденная коника, состоящая из прямых  $P_2P_3$  и  $Q_2Q_3$ , принадлежит одному пучку с  $\alpha_0, \alpha_1$ , можно считать, что ее уравнение имеет вид  $F_0 = F_1$ . Аналогично уравнениями коник, состоящих из прямых  $P_1Q_1, P_3Q_3$  и  $P_1Q_1, P_2Q_2$ , будут соответственно уравнения  $F_0 = F_2$  и  $F_0 = F_3$ . Следовательно, на всей прямой  $P_3Q_3$  выполняется равенство  $F_1 = F_2$ . Так как оно выполнено и для точек  $P'_3, Q'_3$ , оно является уравнением вырожденной коники, состоящей из прямых  $P_3Q_3$  и  $P'_3Q'_3$ . Соответственно, уравнением коники, состоящей из прямых  $P_2Q_2$  и  $P'_2Q'_2$ , будет уравнение  $F_1 = F_3$ , а из прямых  $P_1Q_1$  и  $P'_1Q'_1$  — уравнение  $F_2 = F_3$ . Таким образом, эти три коники принадлежат одному пучку. Три точки, задающие этот пучок, находятся

из теоремы о трех кониках, примененной к тройкам  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ ;  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_3$ ;  $\alpha_0, \alpha_2, \alpha_3$ : это точки пересечения троек прямых  $P_1Q_1, P_2Q_2, P'_3Q'_3$ ;  $P_1Q_1, P_3Q_3, P'_2Q'_2$ ;  $P_2Q_2, P_3Q_3, P'_1Q'_1$ . Значит, четвертая точка принадлежит всем прямым  $P'_iQ'_i$ . Аналогичными рассуждениями доказывается обратное утверждение: если каждая из четырех троек прямых  $P_1Q_1, P_2Q_2$  и  $P'_3Q'_3$ ;  $P_1Q_1, P_3Q_3$  и  $P'_2Q'_2$ ;  $P_2Q_2, P_3Q_3$  и  $P'_1Q'_1$ ;  $P'_1Q'_1, P'_2Q'_2$  и  $P'_3Q'_3$  пересекается в одной точке, то точки  $P_1, Q_1, P_2, Q_2, P_3, Q_3$  (а также  $P_1, Q_1, P'_2, Q'_2, P'_3, Q'_3$  и две аналогичные шестерки) лежат на одной конике.  $\square$

Воспользовавшись принципом двойственности, получаем следующие утверждения.

**Теорема 3.13 (двойственная к теореме о трех кониках).** Пусть три коники касаются двух заданных прямых. Тогда точки пересечения общих касательных, отличных от заданных прямых, к каждой паре из них лежат на одной прямой (рис. 3.30).

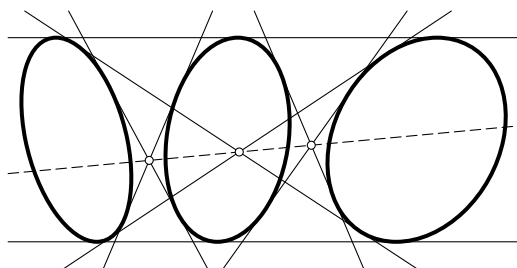


Рис. 3.30

**Теорема 3.14 (двойственная к теореме о четырех кониках).** Если две из общих касательных к каждой паре из данных трех коник касаются одной и той же коники, то точки пересечения двух других касательных к каждой паре лежат на одной прямой (рис. 3.31).

Приведем некоторые важные свойства пучков.

**Теорема 3.15.** Пусть  $A, B, C, D$  — четыре различные точки,  $X, Y, Z$  — точки пересечения прямых  $AB$  и  $CD$ ,  $AC$  и  $BD$ ,  $AD$  и  $BC$ ,  $P$  — точка, отличная от  $X, Y, Z$ . Тогда поляры точки  $P$  относительно всех коник пучка, заданного точками  $A, B, C, D$ , проходят через одну точку.

Отметим интересный частный случай. Если точки  $A, B, C, D$  образуют ортоцентрическую четверку (т. е. каждая точка является ортоцентром треугольника, образованного остальными), то полученная точка изогонально сопряжена точке  $P$  относительно треугольника  $XYZ$ .

Действительно, поляра точки  $P$  относительно вырожденной кривой, являющейся объединением прямых  $AB$  и  $CD$ , — это прямая, сим-

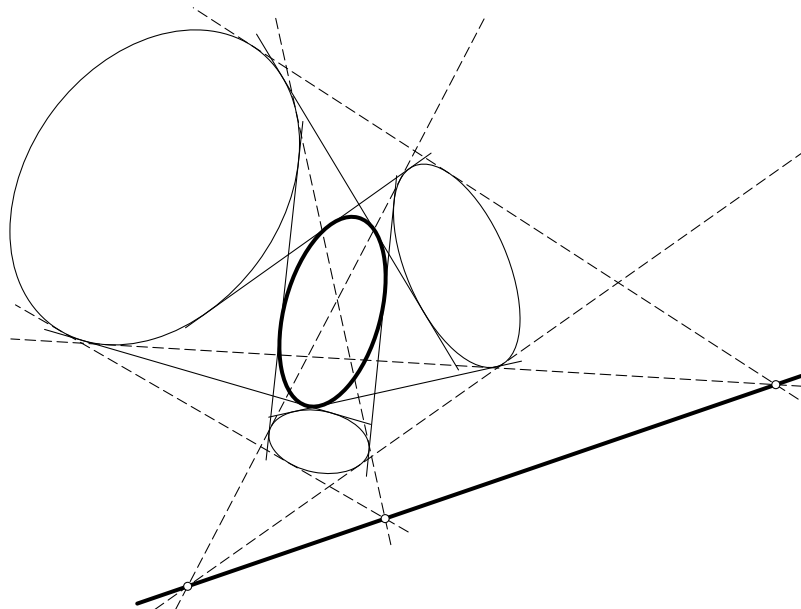


Рис. 3.31

метричная  $XP$  относительно  $AB$ . Так как  $AB$  и  $CD$  — биссектрисы угла  $YXZ$ , эта прямая проходит через изогонально сопряженную точке  $P$  точку  $P'$ . Аналогично через  $P'$  проходит полярная точка  $P$  относительно другой вырожденной кривой, а значит, и относительно любой кривой пучка.

Точно так же можно показать, что если одна из точек  $A, B, C, D$  является центром тяжести треугольника, образованного остальными, то описанное преобразование будет изотомическим сопряжением относительно  $XYZ$ .

Из всего вышесказанного следует, что *изотомическое и изогональное сопряжения проективно эквивалентны*.

Вместо теоремы 3.15 мы докажем двойственное ей утверждение.

**Теорема 3.16.** Пусть даны четыре прямые  $l_i, i = 1, \dots, 4$ , и пусть  $X_{ij}$  — точка пересечения прямых  $l_i$  и  $l_j$ . Тогда геометрическим местом полюсов любой прямой, отличной от  $X_{12}X_{34}, X_{13}X_{24}, X_{14}X_{23}$ , относительно коника пучка, заданного прямыми  $l_i$ , будет прямая (рис. 3.32).

**Доказательство.** Применим проективное преобразование, переводящее исходную прямую в бесконечно удаленную. Из условия следует, что в этом случае прямые  $l_i$  образуют четырехугольник  $ABCD$ , отличный от параллелограмма. Докажем, что центры вписанных в него коник лежат на так называемой *прямой Гаусса*, проходящей через середины диагоналей четырехугольника.

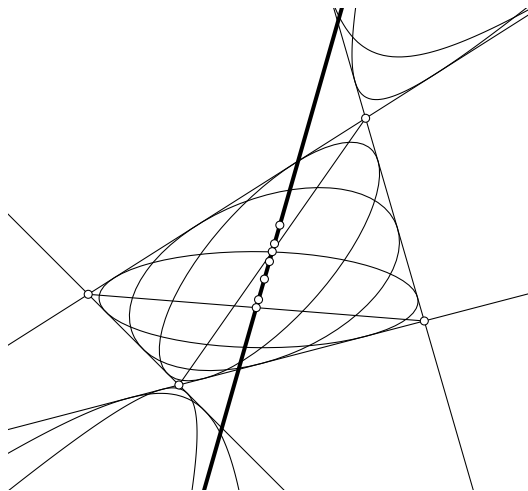


Рис. 3.32

Отметим, что прямая Гаусса является геометрическим местом точек  $P$ , для которых  $S_{PAB} + S_{PCD} = S_{PBC} + S_{PDA}$  (площади считаются положительными или отрицательными в зависимости от ориентации соответствующего треугольника). Действительно, площадь каждого из четырех треугольников есть линейная функция от координат точки  $P$ , следовательно, множеством точек, удовлетворяющих указанному соотношению, является прямая. Очевидно, что середины диагоналей принадлежат этой прямой.

Пусть теперь в четырехугольник  $ABCD$  вписана коника с фокусами  $F_1, F_2$ . Так как ее центром является середина отрезка  $F_1F_2$ , утверждение теоремы равносильно тому, что  $S_{F_1AB} + S_{F_1CD} + S_{F_2AB} + S_{F_2CD} = S_{F_1BC} + S_{F_1DA} + S_{F_2BC} + S_{F_2DA}$ .

Пусть  $F'_1$  — точка, симметричная точке  $F_1$  относительно  $AB$ . Тогда

$$S_{F_1AB} + S_{F_2AB} = S_{F'_1AF_2B} = \frac{1}{2}AF'_1 \cdot AF_2 \sin \angle F'_1AF_2 + BF'_1 \cdot BF_2 \sin \angle F'_1BF_2.$$

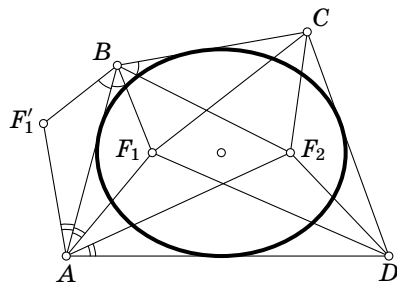


Рис. 3.33

Но точки  $F_1, F_2$  изогонально сопряжены относительно  $ABCD$ , следовательно,  $\angle F'_1AF_2 = \angle F_1AB + \angle F_2AB = \angle A$ ,  $\angle F'_1BF_2 = \angle B$  и

$$S_{F'_1AF_2B} = \frac{1}{2}(AF_1 \cdot AF_2 \sin \angle A + BF_1 \cdot BF_2 \sin \angle B).$$

Из этого и аналогичных равенств следует, что как левая, так и правая части искомого соотношения равны

$$\frac{1}{2}(AF_1 \cdot AF_2 \sin \angle A + BF_1 \cdot BF_2 \sin \angle B + CF_1 \cdot CF_2 \sin \angle C + DF_1 \cdot DF_2 \sin \angle D).$$

Частным случаем теоремы 3.16 является *теорема Монжа*, утверждающая, что если в четырехугольник можно вписать окружность, то ее центр лежит на прямой Гаусса.

Напомним, что фокусы таких коник изогонально сопряжены в многоугольнике. Педальные окружности этих фокусов относительно многоугольника существуют и совпадают. Их центры — это середины отрезка, соединяющего фокусы. Поэтому центры всех таких окружностей лежат на прямой Гаусса.

Теорема 3.15 имеет такое красивое следствие.

**Следствие.** Пусть дан треугольник  $ABC$  и две пары изогонально (изотомически) сопряженных точек  $X, X'$  и  $Y, Y'$ . Тогда точки пересечения  $XY$  с  $X'Y'$  и  $XY'$  с  $X'Y$  тоже изогонально (изотомически) сопряжены (рис. 3.34).

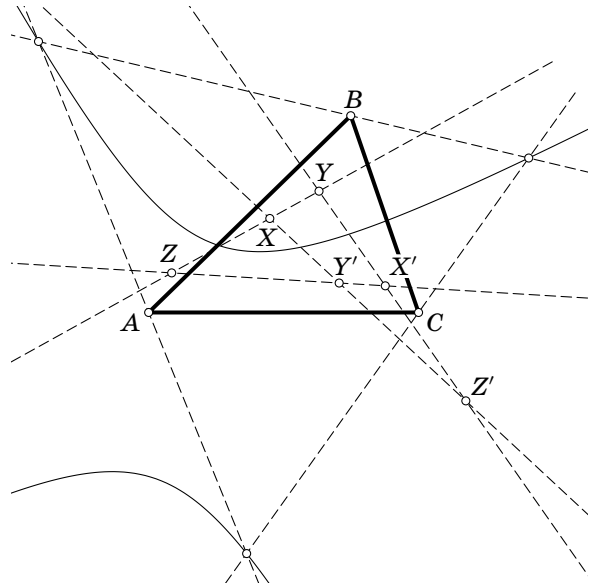


Рис. 3.34

**Доказательство.** Рассмотрим пучок коник, порождающий нужное сопряжение. Выберем из него конику, относительно которой поляра точки  $X$  совпадает с прямой  $X'Y'$ . Тогда поляра точки  $Y'$  проходит через  $X$ , т. е. совпадает с  $XU$ , а полюсом прямой  $XU'$  является точка пересечения прямых  $XU$  и  $X'Y'$ . Следовательно, точка, сопряженная к этой точке, лежит на  $XU'$ . Аналогично она лежит на  $X'Y$ .  $\square$

**Теорема 3.17.** *Полюсы фиксированной прямой относительно всех коник пучка, заданного точками  $A, B, C, D$ , образуют конику.*

**Доказательство.** Переведем данную прямую в бесконечно удаленную. Тогда ее полюсами будут центры коник пучка. Из обратной теоремы Паскаля следует, что середины  $K, L, M, N$  сторон четырехугольника  $ABCD$  принадлежат множеству центров. Поэтому достаточно доказать, что для центра  $O$  любой коники пучка двойное отношение прямых  $OK, OL, OM, ON$  будет одним и тем же. Это двойное отношение равно отношению полюсов этих прямых, которые являются точками пересечения бесконечной прямой со сторонами четырехугольника  $ABCD$  и, значит, не зависят от выбора коники.  $\square$

Заметим, что центром вырожденной кривой второго порядка является точка пересечения образующих ее прямых. Следовательно, коника, о которой говорится в теореме 3.17, всегда проходит через точки пересечения прямых  $AB$  и  $CD, AC$  и  $BD, AD$  и  $BC$ .

Аналогично теореме 3.15 теорема 3.17 имеет важный частный случай.

**Следствие.** *Пусть дан треугольник  $ABC$  и не проходящая через его вершины прямая  $l$ . Тогда образом прямой  $l$  при изогональном (изотомическом) сопряжении будет коника, проходящая через  $A, B, C$ .*

Это следствие позволяет получить еще одно доказательство утверждения задачи 19. Коники, проходящие через вершины треугольника, при изогональном сопряжении переходят в прямые. Бесконечно удаленные точки этих коник переходят в точки на описанной окружности, а точки, задающие перпендикулярное направление, — в диаметрально противоположные (это легко проверить). Значит, эти прямые будут проходить через центр описанной окружности треугольника, который при изогональном сопряжении переходит в ортоцентр треугольника, т. е. коника должна содержать ортоцентр треугольника. Обратное утверждение доказывается аналогично.

Теорема 3.15 имеет еще одно красивое доказательство в предположении, что рассматриваемый нами пучок состоит из окружностей.

Заметим, что радикальные оси точки  $P$  и окружностей из пучка  $\mathcal{W}$  пересекаются в одной точке, которую мы назовем  $Q$ . Это очевидно, поскольку на радикальной оси пучка  $\mathcal{W}$  степени точек относительно всех окружностей равны. А значит, искомой точкой  $P$  будет точка на радикальной оси, степень которой относительно какой-нибудь

окружности из нашего пучка равна квадрату расстояния до  $P$ . Поляра точки  $P$  относительно любой окружности параллельна радикальной оси точки  $P$  и этой окружности и проходит в два раза дальше от  $P$  (рис. 3.35). Таким образом, все поляры точки  $P$  относительно окружностей из пучка  $\mathcal{W}$  проходят через точку, симметричную точке  $P$  относительно  $Q$ .

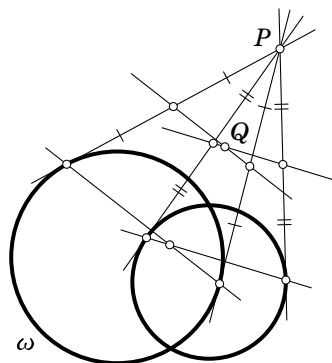


Рис. 3.35

**Задача 24.** Докажите, что равносторонняя гипербола автополярна относительно окружности, касающейся ее в вершинах.

**Задача 25.** Внутри выпуклого четырехугольника взята точка  $T$ , равноудаленная от его противоположных сторон. Докажите, что точка  $T$  лежит на прямой, соединяющей середины диагоналей четырехугольника, тогда и только тогда, когда четырехугольник является либо вписанным, либо описанным, либо трапецией.

**Задача 26.** Внутри угла с вершиной  $O$  расположены точки  $A$  и  $B$ . Бильярдный шар может попасть из  $A$  в  $B$ , отразившись либо от одной стороны угла в точке  $X$ , либо от другой в точке  $Y$ . Точки  $C$ ,  $Z$  — середины отрезков  $AB$  и  $XY$ .

1. Докажите, что если угол  $O$  прямой, то точки  $C$ ,  $Z$ ,  $O$  лежат на одной прямой.

2. Докажите, что если угол  $O$  не прямой, то прямая  $CZ$  проходит через  $O$  тогда и только тогда, когда ломаные  $AXB$  и  $A'YB$  имеют одинаковую длину.

**Задача 27.** Через две точки некоторой коники проходят две окружности, одна из которых пересекает конику также в точках  $X_1$ ,  $Y_1$ , вторая — в точках  $X_2$ ,  $Y_2$ . Докажите, что прямые  $X_1Y_1$  и  $X_2Y_2$  параллельны.

**Задача 28.** Докажите, что для любого четырехугольника середины его сторон и диагоналей, а также точки пересечения диагоналей и противоположных сторон лежат на одной конике. Какой будет эта коника, если вершины четырехугольника образуют ортоцентрическую четверку?

**Задача 29.** Докажите, что центры описанных около четырехугольника  $ABCD$  коник образуют равностороннюю гиперболу тогда и только тогда, когда четырехугольник  $ABCD$  вписанный.

**Задача 30.** Даны три окружности, каждая из которых лежит вне двух других. Докажите, что общие внутренние касательные к каждой паре окружностей образуют шестиугольник, главные диагонали которого пересекаются в одной точке.

### Теорема Понселе

Рассмотрим теперь пучок, заданный точками  $A, B, C, D$ , и прямую  $l$ , не проходящую через эти точки. Если некоторая коника пучка пересекает прямую  $l$  в точке  $P$ , то она пересекает ее и в другой точке  $P'$  (возможно, совпадающей с  $P$ ). Будем называть преобразование  $P \rightarrow P'$  *инволюцией*, порождаемой пучком на  $l$ . Применяя к шестиугольнику  $ABCDPP'$  теорему Паскаля, получаем способ построения точки  $P'$ , показанный на рис. 3.36.

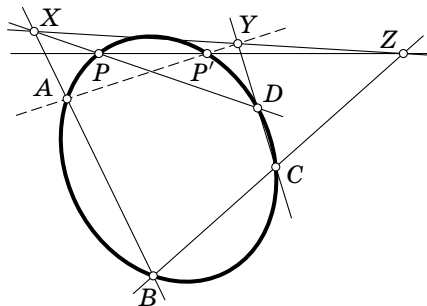


Рис. 3.36

Поскольку это построение может быть представлено как композиция центральных проекций, инволюция сохраняет двойные отношения. Отсюда, в частности, следует, что прямая  $l$  касается не более чем двух коник пучка. Кроме того, инволюция однозначно определяется двумя парами соответствующих точек.

Отметим также, что если не все четыре точки, определяющие пучок, действительные, то свойство инволюции можно доказать и не прибегая к комплексной плоскости, а именно переведя пучок проективным преобразованием в окружности. Пусть тогда  $P$  — это точка пересечения этой прямой и радикальной оси пучка. Тогда инволюцией на прямой будет просто инверсия с центром в точке  $P$ .

С помощью инволюции мы докажем теорему Понселе в общем случае, для пучка коник.

**Теорема 3.18 (Понселе).** Пусть коники  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$  принадлежат пучку  $\mathcal{F}$ . Из произвольной точки  $A_0$  на  $\alpha_0$  проведем касательную к  $\alpha_1$  и найдем вторую точку  $A_1$  ее пересечения с  $\alpha_0$ . Из точки  $A_1$  проведем касательную к  $\alpha_2$  и найдем вторую точку  $A_2$  ее пересечения с  $\alpha_0$  и т. д. Если для некоторой точки  $A_0$  точка  $A_n$  совпадает с  $A_0$ , то это будет выполняться и для любой другой точки коники  $\alpha_0$ .

**Доказательство.** Доказывать теорему будем индукцией по  $n$ . Прежде всего докажем следующее утверждение, представляющее самостоятельный интерес.



**Лемма 3.1. 1.** Пусть точки  $A, B, C$  лежат на конике  $\alpha_0$ , прямая  $AB$  касается коники  $\alpha_1$  в точке  $K$ , а прямая  $AC$  касается коники  $\alpha_2$  в точке  $L$ . Тогда существует такая точка  $D$  на  $\alpha_0$ , что  $\alpha_1$  касается прямой  $CD$ , а  $\alpha_2$  — прямой  $BD$  в точках их пересечения с  $KL$ . Кроме того, существует коника из пучка  $\mathcal{F}$ , касающаяся прямых  $AD$  и  $BC$  в точках их пересечения с  $KL$ .

**2.** Пусть точки  $A, B, C, D$  лежат на конике  $\alpha_0$ , а коника  $\alpha_1$  касается  $AB$  в точке  $K$  и  $CD$  в точке  $M$ . Тогда существует коника из пучка  $\mathcal{F}$ , касающаяся прямых  $AC$  и  $BD$  в точках их пересечения с  $KM$  (рис. 3.37).

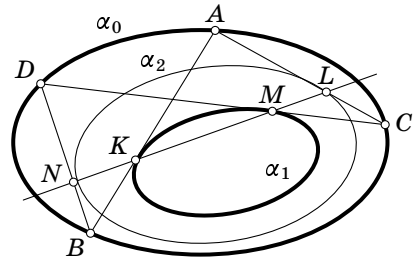


Рис. 3.37

**Доказательство. 1.** Пусть  $M$  — вторая точка пересечения  $\alpha_1$  с  $KL$ ,  $\mathcal{G}$  — пучок, содержащий  $\alpha_1$  и вырожденную кривую, состоящую из прямых  $CM$  и  $AB$ . На прямой  $AC$  пучки  $\mathcal{F}$  и  $\mathcal{G}$  порождают одну и ту же инволюцию, задаваемую парой точек  $A, C$  и точками пересечения  $AC$  с  $\alpha_1$  (не обязательно действительными). Следовательно, точка  $L$  является двойной точкой инволюции, порожденной пучком  $\mathcal{G}$ , т. е.  $\mathcal{G}$  содержит двойную прямую  $KL$ . Это значит, что все коники из  $\mathcal{G}$ , в том числе  $\alpha_1$ , касаются  $CM$  в точке  $M$ . Обозначив через  $D$  вторую точку пересечения  $CM$  с  $\alpha_0$  и применив приведенное рассуждение к точкам  $B, C, D$ , получим, что  $\alpha_2$  касается прямой  $BD$  в точке ее пересечения с  $KL$ . Далее найдем точку пересечения прямых  $AD$  и  $KL$  и возьмем проходящую через нее конику из  $\mathcal{F}$ . То же самое рассуждение показывает, что эта коника касается прямой  $AD$ .

То, что она касается также и  $BC$ , и утверждение 2 доказываются аналогично.  $\square$

**Следствие.** Пусть прямая  $AB$  касается коники  $\alpha_1$  в точке  $X$ , а прямая  $AC$  касается коники  $\alpha_2$  в точке  $Y$ . Тогда существуют ровно две коники из пучка  $\mathcal{F}$ , касающиеся  $BC$  в точках  $Z_1, Z_2$ , причем точки  $X, Y, Z_1$  лежат на одной прямой, а прямые  $AZ_2, BY, CX$  пересекаются в одной точке.

Докажем теперь теорему Понселе для  $n = 3$ . Пусть прямые  $A_0A_1, A_1A_2, A_2A_0$  касаются коник  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  в точках  $X_1, X_2, X_3$ , не лежа-

щих на одной прямой, а прямая  $B_0B_1$  касается коники  $\alpha_1$  в точке  $Y_1$ . По лемме 3.1 существуют коника  $\alpha'$  из  $\mathcal{F}$ , касающаяся прямых  $A_0B_0$  и  $A_1B_1$  в точках  $Z_0, Z_1$  их пересечения с  $X_1Y_1$ , и такая точка  $B_2$  на  $\alpha_0$ , что  $\alpha_2$  касается  $B_1B_2$ , а  $\alpha' - B_2A_2$  в точках  $Y_2, Z_2$  их пересечения с  $Z_1X_2$ . Кроме того, существует коника  $\alpha''$ , касающаяся прямых  $A_2A_0$  и  $B_2B_0$  в точках  $K, Y_3$  их пересечения с  $Z_2Z_0$ . Применяя теорему Дезарга к треугольникам  $A_0A_1A_2$  и  $Z_0Z_1Z_2$ , убеждаемся, что точки  $X_1, X_2, K$  не лежат на одной прямой. Следовательно,  $K = X_3$  и  $\alpha'' = \alpha_3$ .

Рассмотрим теперь случай произвольного  $n$ . По точкам  $A_0, A_1, A_2$  построим конику  $Q'$ , касающуюся прямых  $A_0A_2$  и  $B_0B_2$ . Так как стороны многоугольника  $A_0A_2 \dots A_{n-1}$  касаются коник  $\alpha', \alpha_3, \dots, \alpha_n$ , можно осуществить индуктивный переход от  $n - 1$  к  $n$ .  $\square$

### Коник с общим фокусом и директрисой

Рассмотрим семейство коник с фиксированным фокусом  $F$  и соответствующей ему директрисой  $l$ . Обозначим его через  $\mathcal{Q}$ .

В силу теоремы 3.15 полярные преобразования относительно этих коник одинаково действуют на прямые, проходящие через  $F$ . А именно, прямая  $a$  переходит в точку пересечения перпендикуляра к  $a$  в точке  $F$  с прямой  $l$ .

Сделаем проективное преобразование, переводящее какую-нибудь из наших коник в окружность, причем так, что точка  $F$  перейдет в ее центр (обозначим получившуюся точку через  $F'$ ). Тогда директриса перейдет в полярю центра, т. е. в бесконечно удаленную прямую. Куда перейдут остальные коники при таком преобразовании?

Они перейдут в пучок окружностей с центром в точке  $F'$ !

Действительно, они перейдут в коники, у которых полярю бесконечно удаленной прямой — это точка  $F'$ . Но для любой коники полюс бесконечно удаленной прямой — это ее центр, а значит, центр  $F'$  будет центром всех таких коник. Кроме того, полюсом любой прямой, проходящей через  $F'$ , должна быть точка на бесконечно удаленной прямой, задающая направление, перпендикулярное этой прямой (так как для окружности это именно так, а двойственное преобразование на прямых, проходящих через  $F'$ , для всех коник одинаковое). Но это, очевидно, возможно, только если все коники — окружности.

Заметим, что концентрические окружности после двойственного полярного преобразования относительно одной из этих окружностей переходят друг в друга. Это свойство должно сохраниться и после двойственного преобразования! Таким образом, мы доказали следующую теорему.

**Теорема 3.19.** *После полярного преобразования относительно одной коники из семейства  $\mathcal{Q}$  (семейство с фиксированным фокусом*

и директрисой) семейство  $\mathcal{Q}$  остается на месте, т. е. коники из этого семейства переходят в коники тоже из этого семейства.

Зная, что этот пучок проективно эквивалентен пучку концентрических окружностей, можно сказать, как это преобразование действует на сами коники.

**Теорема 3.20.** Пусть  $R$  — это полярное преобразование относительно какой-нибудь коники из  $\mathcal{Q}$ . Пусть точка  $X$ , лежащая на конике  $\alpha$  (из  $\mathcal{Q}$ ), при этом преобразовании перейдет в прямую  $R(X)$ , касающуюся  $R(\alpha)$  в точке  $Y$ . Тогда точки  $X$ ,  $Y$  и  $F$  лежат на одной прямой (рис. 3.38).

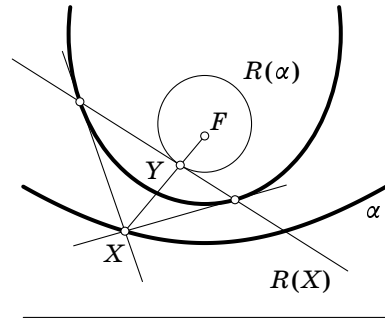


Рис. 3.38

Интересно, что при таком преобразовании эксцентриситет ведет себя следующим образом.

**Теорема 3.21.** Пусть коники  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  двойственны относительно коники  $\alpha$  (все они из пучка  $\mathcal{Q}$ ). Тогда  $\varepsilon_1\varepsilon_2 = \varepsilon^2$ , где  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  — эксцентриситеты коник  $\alpha$ ,  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  соответственно.

**Доказательство.** Обозначим через  $F_l$  проекцию точки  $F$  на прямую  $l$ . Точки, в которых отрезок  $FF_l$  пересекает коники  $\alpha$ ,  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , обозначим через  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  соответственно. Нам надо доказать, что

$$\frac{FY \cdot FZ}{F_l Y \cdot F_l Z} = \frac{FX^2}{F_l X^2}.$$

Поделив правую часть на левую и перегруппировав члены, получим, что надо доказать следующее равенство:

$$\frac{FY \cdot F_l X}{FX \cdot F_l Y} \cdot \frac{FZ \cdot F_l X}{FX \cdot F_l Z} = 1.$$

Заметим, что левая часть равна  $(XY; F_l F) \cdot (XZ; F_l F)$ , поэтому она не меняется при проективных преобразованиях.

Осталось показать, что это равенство выполнено, когда коники суть концентрические окружности.

Итак, сделаем проективное преобразование, переводящее  $\alpha$ ,  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  в три концентрические окружности  $\alpha'$ ,  $\alpha'_1$  и  $\alpha'_2$  с центром  $F'$

(проективный образ точки  $F$ ). Точки  $X, Y, Z$  и  $F_l$  перейдут в точки  $X', Y', Z'$  и  $F'_l$ , лежащие на одной прямой (на которой, кроме того, лежит  $F'$ ), причем  $F'_l$  перейдет в бесконечно удаленную точку.

По определению полярного преобразования относительно окружности  $F'Y' \cdot F'Z' = F'X'^2$ . Поэтому

$$\frac{F'Y' \cdot F'_l X'}{F'X' \cdot F'_l Y'} \cdot \frac{F'Z' \cdot F'_l X'}{F'X' \cdot F'_l Z'} = \frac{F'Y' \cdot \infty}{F'X' \cdot \infty} \cdot \frac{F'Z' \cdot \infty}{F'X' \cdot \infty} = \frac{F'Y'}{F'X'} \cdot \frac{F'Z'}{F'X'} = 1. \quad \square$$

Отметим также, что коники, фигурирующие в обобщенной теореме Фрежье, получаются из  $\mathcal{Q}$  двойственным преобразованием. А значит, они образуют пучок третьего типа, и проективным преобразованием их можно перевести в концентрические окружности.

**Задача 31.** Докажите, что отличные от  $F$  фокусы двух коник из пучка  $\mathcal{Q}$ , двойственных относительно параболы, симметричны относительно  $l$ .

## ГЛАВА 4

# Евклидовы свойства кривых второго порядка

### § 4.1. Особые свойства равносторонней гиперболы

Напомним, что гипербола называется равносторонней, если ее асимптоты перпендикулярны. В прошлой главе мы привели несколько доказательств того факта, что описанная около треугольника коника является равносторонней гиперболой тогда и только тогда, когда она проходит через ортоцентр треугольника. В этом параграфе будет доказан ряд других интересных свойств.

**Теорема 4.1.** *Центры всех равносторонних гипербол, проходящих через вершины треугольника  $ABC$ , лежат на окружности Эйлера этого треугольника.*

**Доказательство.** Пусть  $D$  — четвертая (отличная от  $A$ ,  $B$  и  $C$ ) точка пересечения гиперболы и описанной окружности треугольника  $ABC$ , а  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ ,  $D'$  — ортоцентры треугольников  $BCD$ ,  $CDA$ ,  $DAB$ ,  $ABC$  соответственно (рис. 4.1).

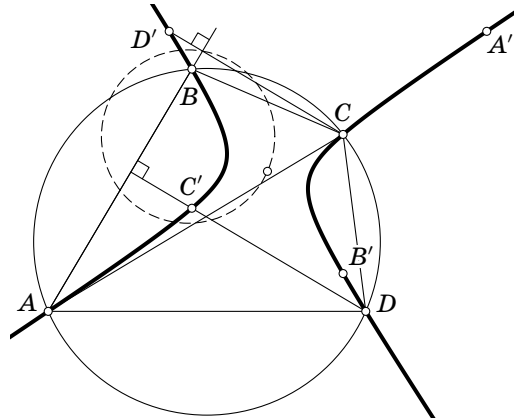


Рис. 4.1

Так как  $CD' = 2R |\cos \angle BCA| = 2R |\cos \angle BDA| = DC'$ ,  $CDC'D'$  — параллелограмм, т. е.  $C'D' \parallel CD$  и  $C'D' = CD$ .

Следовательно, четырехугольники  $ABCD$  и  $A'B'C'D'$  центрально симметричны. Их центр симметрии является центром гиперболы, на которой в силу основного свойства равносторонней гиперболы лежат все 8 точек. При этом он совпадает с серединой отрезка  $DD'$  и, значит, лежит на окружности Эйлера треугольника  $ABC$  (а также треугольников  $BCD$ ,  $CDA$  и  $DAB$ ).  $\square$

Отметим, что из теоремы 4.1 вытекает следующий факт. Если прямые  $a$  и  $b$  вращаются вокруг точек  $A$  и  $B$  соответственно с равными по модулю, но разными по направлению скоростями, то точка их пересечения рисует равностороннюю гиперболу, причем точки  $A$  и  $B$  будут симметричными относительно центра гиперболы. Действительно, если точки  $A$  и  $B$  симметричны относительно центра, а  $X, Y$  — произвольные точки гиперболы, то ее центр лежит на окружности Эйлера треугольника  $AXY$ . Пусть  $M$  — середина отрезка  $XY$ . Тогда  $\angle A = \angle M = \angle O = \angle B$  (рис. 4.2). Последнее верно в силу того, что окружность Эйлера треугольника  $AXY$  при гомотетии с центром  $A$  и коэффициентом 2 переходит в описанную окружность треугольника  $BXY$ .

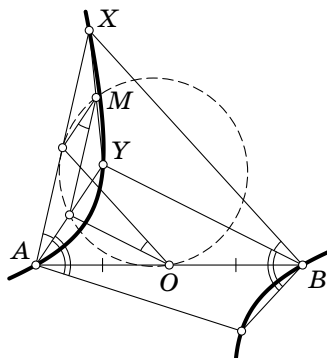


Рис. 4.2

Далее рассмотрим треугольник  $ABC$  и точку  $P$ . Окружности, симметричные описанным окружностям треугольников  $ABP$ ,  $BSP$ ,  $CAP$  относительно  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$ , пересекаются в одной точке. Это будет точка  $P'$ , симметричная точке  $P$  относительно центра гиперболы  $ABCP$ . Действительно, из предыдущего утверждения следует, что описанные окружности треугольников  $ABP$  и  $ABP'$  имеют равные радиусы, т. е. симметричны относительно  $AB$ .

**Теорема 4.2.** Пусть дан треугольник  $ABC$  и точка  $P$ , отличная от его ортоцентра. Тогда центры вписанной и невписанных окружностей чевианного треугольника точки  $P$  относительно треугольника  $ABC$  лежат на равносторонней гиперболе, проходящей через  $A, B, C, P$ .

**Доказательство.** Это свойство является частным случаем следующего факта.

**Лемма 4.1.** Пусть даны два треугольника  $A_1B_1C_1$  и  $A_2B_2C_2$ , и пусть  $A', B', C'$  — точки пересечения  $B_1C_1$  и  $B_2C_2$ ,  $C_1A_1$  и  $C_2A_2$ ,  $A_1B_1$  и  $A_2B_2$  соответственно. Если треугольник  $A'B'C'$  перспективен как треугольнику  $A_1B_1C_1$ , так и треугольнику  $A_2B_2C_2$  (с центрами пер-

спективы  $D_1$  и  $D_2$ ), то точки  $A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2$  лежат на одной конике (рис. 4.3).

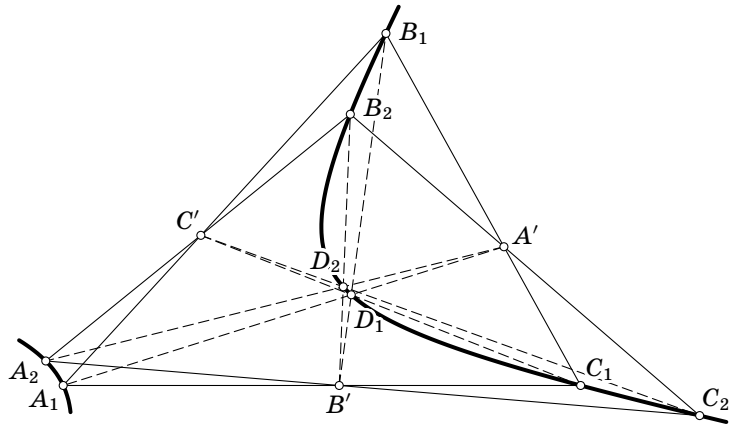


Рис. 4.3

**Доказательство.** Рассмотрим проективное преобразование, переводящее четырехугольник  $A_1B_1C_1D_1$  в квадрат. Так как точки  $A', C'$  при этом преобразовании перейдут в бесконечно удаленные точки, соответствующие перпендикулярным направлениям, четырехугольник  $A_2B_2C_2D_2$  перейдет в прямоугольник со сторонами, параллельными сторонам квадрата. Кроме того, центром как квадрата, так и прямоугольника будет образ точки  $B'$ . Очевидно, что коника, проходящая через вершины квадрата и одну вершину прямоугольника, проходит и через три остальных вершины.  $\square$

Пусть теперь  $A'B'C'$  — чевианный треугольник точки  $P$ ,  $I'$  — центр вписанной в него окружности,  $I'_a, I'_b, I'_c$  — центры внеписанных окружностей. Тогда треугольники  $ABC$  и  $I'_aI'_bI'_c$  удовлетворяют условиям леммы. Следовательно, точки  $A, B, C, P, I'_a, I'_b, I'_c, I'$  лежат на одной конике. Поскольку  $I$  — ортоцентр треугольника  $I'_aI'_bI'_c$ , эта коника является равносторонней гиперболой.  $\square$

**Теорема 4.3.** Пусть точки  $A, B, C, D$  лежат на равносторонней гиперболы. Тогда чевианная окружность точки  $D$  относительно треугольника  $ABC$  проходит через центр гиперболы (рис. 4.4).

**Доказательство.** По теореме 4.2 центры внеписанных окружностей чевианного треугольника  $I'_a, I'_b, I'_c$  лежат на гиперболы. Так как чевианная окружность является окружностью девяти точек треугольника  $I'_aI'_bI'_c$ , она проходит через центр гиперболы.  $\square$

**Теорема 4.4.** Пусть точки  $A, B, C, D$  лежат на равносторонней гиперболы. Тогда педальная окружность точки  $D$  относительно треугольника  $ABC$  проходит через центр гиперболы.

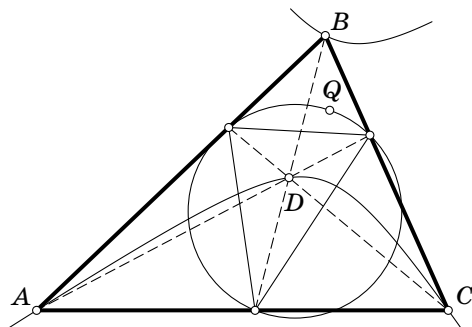


Рис. 4.4

**Доказательство.** Пусть  $A'B'C'$  — педальный треугольник точки  $D$ , а  $B_1$  и  $C_1$  — середины отрезков  $BD$  и  $CD$  (рис. 4.5).

Чтобы доказать, что окружность, описанная вокруг треугольника  $A'B'C'$ , тоже проходит через центр гиперболы  $Q$ , достаточно убедиться в равенстве углов  $A'C'B'$  и  $A'QB'$ .

Заметим, что  $\angle DC'A' = \angle DBA'$ , поскольку четырехугольник  $C'BA'D$  вписанный. Отрезок  $B_1C_1$  — средняя линия треугольника  $DBC$ , а значит,  $\angle DB_1C_1 = \angle DBA'$ . Поскольку точки  $D$  и  $A'$  симметричны относительно  $B_1C_1$ , углы  $DB_1C_1$  и  $A'B_1C_1$  равны. Теперь воспользуемся тем, что точка  $Q$ , как центр равносторонней гиперболы, лежит на окружности Эйлера треугольника  $BCD$ . Следовательно,  $\angle A'B_1C_1 = \angle A'QC_1$ . Таким образом,

$$\angle DC'A' = \angle DBA' = \angle DB_1C_1 = \angle A'B_1C_1 = \angle A'QC_1.$$

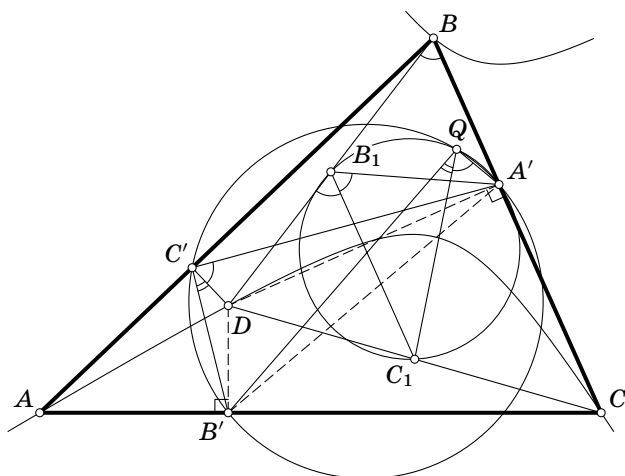


Рис. 4.5



Аналогично  $\angle DC'B' = B'QC_1$ . Следовательно,

$$\angle A'C'B' = \angle A'C'D + \angle DC'B' = \angle A'QC_1 + \angle C_1QB' = \angle A'QB'. \quad \square$$

**Теорема 4.5 (Емельяновы).** Пусть  $A_1, B_1, C_1$  – основания биссектрис треугольника  $ABC$ ,  $A_2, B_2, C_2$  – основания его высот,  $C^*, B^*, A^*$  – точки пересечения прямых  $A_1B_1$  и  $A_2B_2$ ,  $C_1A_1$  и  $C_2A_2$ ,  $B_1C_1$  и  $B_2C_2$  (в дальнейшем такие точки будем называть полюсами),  $A', B'$  – точки пересечения произвольной прямой, проходящей через  $C^*$ , с  $BC$  и  $AC$  соответственно. Справедливы следующие утверждения.

1. Прямые  $A'B^*, B'A^*$  и  $AB$  пересекаются в одной точке (назовем ее  $C'$ ).
2. Прямые  $AA', BB'$  и  $CC'$  пересекаются в одной точке.
3. Окружность, описанная около треугольника  $A'B'C'$ , проходит через точку Фейербаха треугольника  $ABC$  (рис. 4.6).

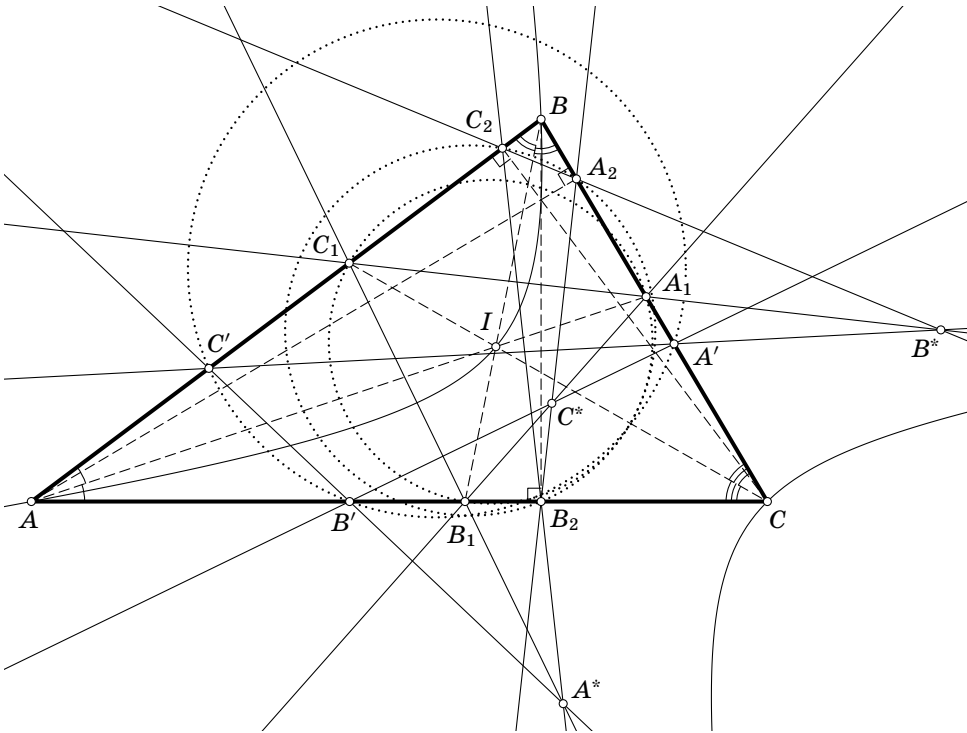


Рис. 4.6

**Доказательство.** Пункты 1, 2 следуют из теоремы 3.8. Докажем п. 3. Так как множество центров перспективы треугольников из семейства Фейербаха лежит на равносторонней гиперболе (она называется *гиперболой Фейербаха*), их чевианные окружности проходят че-

рез центр гиперболы. Через этот центр проходят также их pedalные окружности. Но pedalные окружности точек  $I$  и  $H$  имеют единственную общую точку — точку Фейербаха. Следовательно, она и является центром гиперболы.  $\square$

Можно сформулировать следующее обобщение теоремы.

Если семейство чевианных треугольников, удовлетворяющее пп. 1 и 2 теоремы 3.9, содержит ортотреугольник, то их чевианные окружности имеют общую точку.

Так как через центр гиперболы проходят не только чевианные, но и pedalные окружности ее точек, а pedalные окружности совпадают для любых двух изогонально сопряженных точек, pedalные окружности точек, изогонально сопряженных точкам гиперболы Фейербаха, проходят через точку Фейербаха. Но изогональным образом коники, проходящей через вершины треугольника, будет прямая. В данном случае эта прямая проходит через центр  $O$  описанной окружности треугольника  $ABC$ , изогонально сопряженный ортоцентру, и сопряженную самой себе точку  $I$ . Таким образом, доказано следующее утверждение.

*Если точка лежит на прямой  $OI$ , то ее pedalная окружность проходит через точку Фейербаха.*

Это утверждение также можно обобщить.

Пусть  $l$  — проходящая через точку  $O$  прямая. Тогда pedalные окружности всех точек прямой  $l$  имеют общую точку.

Вновь рассмотрим проходящую через точку  $O$  прямую  $l$ . Каждой ее точке  $P$  поставим в соответствие другую точку  $P'$ , обладающую тем свойством, что точки, изогонально сопряженные  $P$  и  $P'$ , симметричны относительно центра проходящей через них и вершины треугольника равносторонней гиперболы. Из доказанных в § 3.3 свойств изогонального сопряжения вытекает, что преобразование  $P \rightarrow P'$  сохраняет двойные отношения. Поскольку это преобразование оставляет неподвижными точки пересечения прямой  $l$  с описанной окружностью, а  $O$  и бесконечно удаленную точку меняет местами, оно совпадает с преобразованием, которое порождает на  $l$  инверсия относительно описанной окружности. Тем самым доказана следующая теорема.

**Теорема 4.6.** *Две точки инверсны относительно описанной окружности данного треугольника тогда и только тогда, когда изогонально сопряженные им точки симметричны относительно центра соответствующей равносторонней гиперболы.*

В заключение приведем еще два интересных факта. Очевидно, что на прямой  $OI$  лежат два центра гомотетии описанной и вписанной окружностей треугольника. Изогонально сопряженные к ним точки Жергонна и Нагеля лежат на гиперболе Фейербаха, т. е. верно следующее утверждение.

Пусть  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  — биссектрисы треугольника  $ABC$ ,  $AA_2$ ,  $BB_2$ ,  $CC_2$  — его высоты,  $A_3$ ,  $B_3$ ,  $C_3$  — точки касания сторон  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  с вписанной окружностью,  $A_4$ ,  $B_4$ ,  $C_4$  — точки их касания с соответствующими внеписанными окружностями. Тогда прямые  $A_1B_1$ ,  $A_2B_2$ ,  $A_3B_3$ ,  $A_4B_4$  пересекаются в одной точке.

Теперь рассмотрим прямую, проходящую через точку  $O$  и точку Лемуана  $L$ . На этой прямой лежат две точки Аполлония, pedalные треугольники которых правильные. Изогональным образом этой прямой будет гипербола Кипера, проходящая через центр тяжести  $M$  и точки Торричелли  $T_1$ ,  $T_2$ . При этом точки  $T_1$ ,  $T_2$ , очевидно, обладают следующим свойством: окружности, симметричные окружностям  $ABT_1$ ,  $BCT_1$ ,  $CAT_1$ , проходят через  $T_2$ . Следовательно, середина отрезка  $T_1T_2$  является центром гиперболы Кипера и, значит, лежит на окружности 9 точек.

Кроме того, так как прямые  $T_1T'_1$  и  $T_2T'_2$  параллельны прямой Эйлера, а прямая  $T_1T_2$ , как и  $T'_1T'_2$ , проходит через  $L$ , мы заключаем, что прямые  $T_1T'_2$  и  $T'_1T_2$  проходят через  $M$  и центры двух правильных pedalных треугольников лежат на прямой  $LM$ .

**Задача 32.** Дан четырехугольник  $ABCD$ . Найдите геометрическое место таких точек  $P$ , что радиусы окружностей, описанных около треугольников  $ABP$ ,  $BSP$ ,  $CDP$  и  $DAP$ , равны.

**Задача 33.** На равносторонней гиперболы взята произвольная точка  $P$ . Обозначим через  $Q$  точку, симметричную точке  $P$  относительно центра этой гиперболы. Окружность с центром  $P$  и радиусом  $PQ$  пересекает гиперболу еще в трех точках  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Докажите, что треугольник  $ABC$  правильный.

**Задача 34.** Пусть  $P$  — это центр равносторонней гиперболы, проходящей через вершины вписанного четырехугольника  $ABCD$ . Докажите, что  $P$  лежит на прямой, соединяющей центр описанной окружности и центр тяжести четырехугольника  $ABCD$ .

**Задача 35.** Докажите, что точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  лежат на одной конике тогда и только тогда, когда существует коника, относительно которой оба треугольника  $ABC$  и  $A'B'C'$  автополярны.

**Задача 36.** Треугольник  $ABC$  автополярен относительно коники с центром  $O$ . Докажите, что эта коника гомотетична конике, проходящей через середины отрезков  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$ ,  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$ .

## § 4.2. Вписанные коники

Рассмотрим конику, вписанную в треугольник  $ABC$ . Пусть  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  — точки ее касания со сторонами  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$ . Проведя проективное преобразование, переводящее конику в окружность, убеждаемся, что прямые  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  пересекаются в одной точке. Эта точка

называется *перспектором* коники. Так как существует единственное проективное преобразование, оставляющее вершины треугольника на месте и переводящее данную точку  $P$  в точку Жергонна (перспектор вписанной окружности), существует единственная коника с перспектором  $P$ .

Следующее утверждение описывает связь между перспектором и центром коники.

**Теорема 4.7.** Пусть  $P$  — перспектор коники,  $Q$  — ее центр,  $M$  — центр тяжести треугольника. Тогда  $M$  лежит на отрезке  $P'Q$ , где  $P'$  — точка, изотомически сопряженная точке  $P$ , и  $P'M = 2MQ$ .

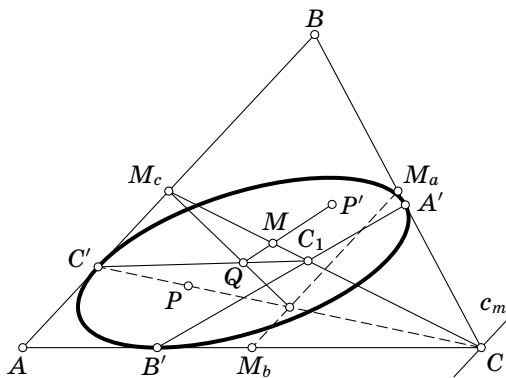


Рис. 4.7

**Доказательство.** Прежде всего отметим, что если коника вписана в треугольник  $ABC$ , то полюс медианы  $CM_c$  лежит на прямой  $c_m$ , проходящей через  $C$  и параллельной  $AB$ . Действительно, двойное отношение прямых  $c_m, CM_c, CA, CB$  равно 1.

Пусть теперь коника с центром  $Q$  касается сторон треугольника в точках  $A', B', C'$ ;  $C_1$  — точка пересечения прямых  $C'Q$  и  $A'B'$ . Так как  $Q$  — центр коники, полюсом прямой  $C'Q$  будет бесконечно удаленная точка прямой  $AB$ , а полюсом прямой  $A'B'$  является точка  $C$ . Таким образом, полярной точки  $C_1$  будет прямая  $c_m$ , и, значит, точка  $C_1$  лежит на медиане  $CM_c$ .

По теореме 3.9 точка пересечения прямых  $CC'$  и  $M_cQ$  лежит на средней линии  $M_aM_b$ , т. е. точка  $Q$  изотомически сопряжена относительно треугольника  $M_aM_bM_c$  образу перспектора  $P$  при гомотетии с центром  $M$  и коэффициентом  $-\frac{1}{2}$ . Отсюда сразу следует утверждение теоремы.  $\square$

Из теоремы 4.7 следует, что для любой точки существует единственная вписанная коника с центром в этой точке. В частности, если центр коники совпадает с  $M$ , то перспектором тоже будет точка

$M$  и коника будет вписанным эллипсом Штейнера, т. е. прообразом вписанной окружности при аффинном преобразовании, переводящем треугольник в правильный. Отметим, что эллипс Штейнера имеет наибольшую площадь из всех вписанных в данный треугольник эллипсов. Это следует из того, что среди всех треугольников, описанных около данной окружности, правильный имеет минимальную площадь, а аффинные преобразования сохраняют отношения площадей.

**Теорема 4.8.** *Центр вписанной коники с перспектором  $P$  есть полюс прямой  $PM$  относительно коники, проходящей через точки  $A, B, C, M, P$  (рис. 4.8).*

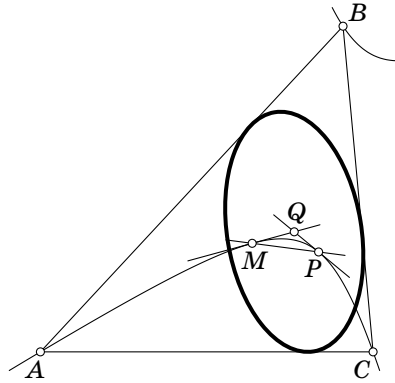


Рис. 4.8

**Доказательство.** Достаточно воспользоваться предыдущей теоремой и теоремой 3.9.  $\square$

В заключение рассмотрим пучок коник, касающихся четырех данных прямых. Пусть  $U, U'$  и  $V, V'$  — фокусы двух коник из этого пучка. Тогда точки в каждой паре фокусов изогонально сопряжены относительно треугольника, образованного любыми тремя из данных прямых. Как было доказано в § 3.3, отсюда следует, что точки пересечения  $UV$  с  $U'V'$  и  $U'V$  с  $UV'$  тоже изогонально сопряжены относительно всех этих четырех треугольников и, значит, являются фокусами некоторой коники пучка. Из того, что проекции фокуса на данные прямые лежат на одной окружности, нетрудно вывести, что геометрическим местом фокусов будет кривая третьего порядка — кубика. Сопоставив друг другу фокусы каждой коники пучка, мы зададим на этой кубике инволюцию. Мы убедились, что для любых двух пар соответствующих точек кубики  $U, U'$  и  $V, V'$  точка пересечения прямых  $UV$  и  $U'V'$  также лежит на кубике. Как предельный случай этого утверждения получаем, что касательные к кубике в соответствующих точках  $U, U'$  пересекаются на кубике, а точка их пересечения соответствует третьей точке пересечения кубики с прямой  $UU'$  (рис. 4.9).

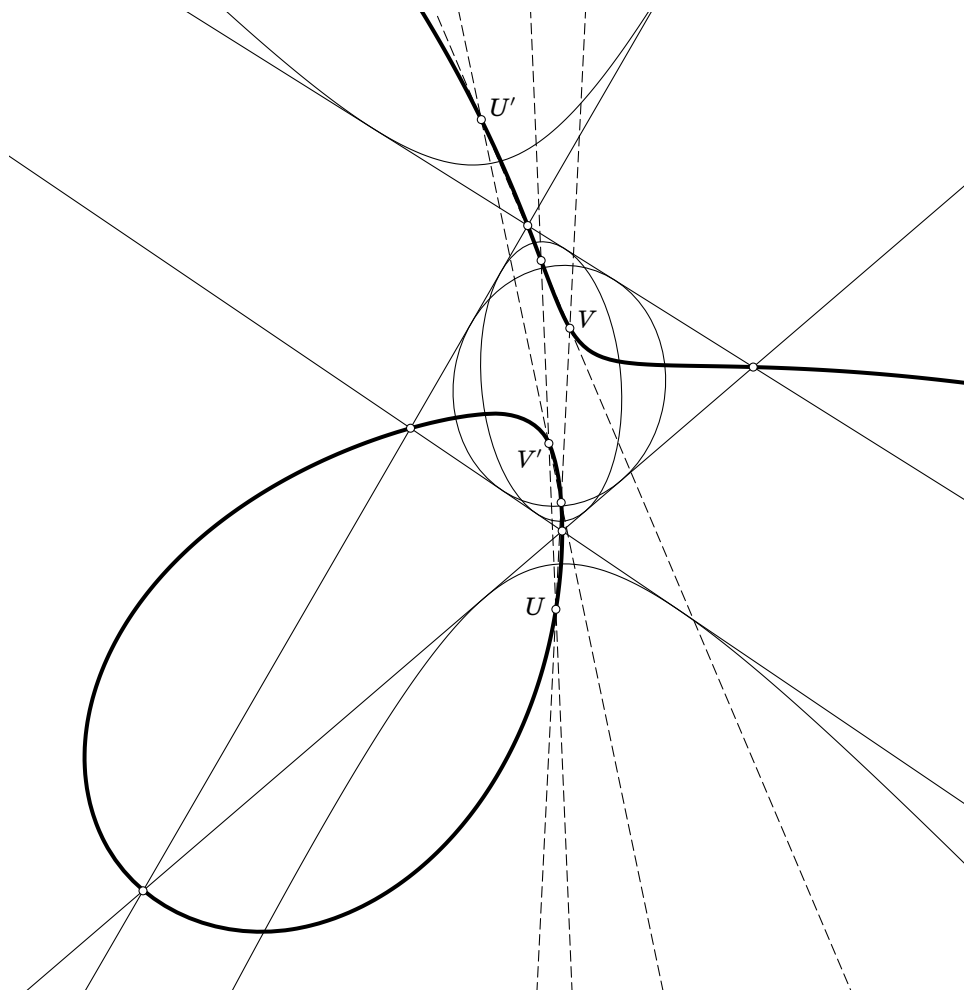


Рис. 4.9

Пусть в треугольник вписана парабола. Тогда, применив теорему 4.7, получаем, что точка, изотомически сопряженная перспектору параболы, является бесконечно удаленной. Если треугольник правильный, то изотомическое сопряжение совпадает с изогональным и образом бесконечно удаленной прямой будет описанная окружность треугольника. В общем случае получаем прообраз этой окружности при аффинном преобразовании, переводящем треугольник в правильный, т. е. *описанный эллипс Штейнера*, касательные к которому в вершинах треугольника параллельны его противоположным сторонам. Отметим, что этот эллипс имеет наименьшую площадь среди всех описанных около данного треугольника. Итак, доказана такая теорема.

**Теорема 4.9.** *Геометрическим местом перспекторов вписанных в данный треугольник парабол является описанный эллипс Штейнера.*

**Задача 37.** Парабола касается сторон треугольника в точках  $A'$ ,  $B'$  и  $C'$ . Докажите, что точка пересечения прямой, проходящей через точку  $C'$  и параллельной оси параболы, с прямой  $A'B'$  лежит на медиане  $CM_c$ .

**Задача 38.** Докажите, что описанный и вписанный эллипсы Штейнера гомотетичны. Найдите центр и коэффициент гомотетии.

**Задача 39.** Докажите, что множеством центров коник, проходящих через вершины треугольника и его центр тяжести, является вписанный эллипс Штейнера.

**Задача 40.** Пусть точки  $P, P'$  изогонально сопряжены относительно треугольника  $ABC$ ,  $A', B', C'$  — точки пересечения сторон треугольника и прямых, соединяющих точку  $P$  с соответствующими центрами внеписанных окружностей. Докажите, что прямые  $AA', BB', CC'$  и  $PP'$  пересекаются в одной точке.

**Задача 41.** Дан треугольник и центр вписанной в него коники. Определите, является ли коника эллипсом или гиперболой.

### Парабола, касающаяся четырех прямых

Поскольку для любых пяти прямых (общего положения) существует единственная касающаяся их коника, для любых четырех прямых общего положения (эта конструкция называется *полным четырехсторонником*), никакие две из которых не параллельны, существует единственная касающаяся их парабола. В качестве пятой прямой в данном случае выступает бесконечно удаленная прямая.

Ну а теперь, воспользовавшись теоремами 1.10 и 1.11, для четырех треугольников, образуемых этими прямыми, получаем следующие две теоремы.

**Теорема 4.10 (Микель).** *Пусть дан полный четырехсторонник. Тогда описанные окружности четырех треугольников, которые образуют его прямые, пересекаются в одной точке.*

Получающаяся таким образом точка называется *точкой Микеля* полного четырехсторонника (рис. 4.10).

**Доказательство.** Рассмотрим параболу, касающуюся сторон нашего четырехсторонника. Тогда по теореме 1.10 описанные окружности соответствующи-

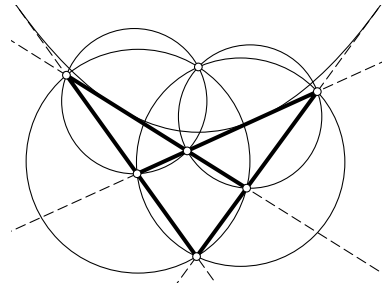


Рис. 4.10

щих треугольников будут проходить через фокус параболы. А значит, фокус параболы и будет этой самой точкой.  $\square$

**Теорема 4.11.** Пусть дан полный четырехсторонник. Тогда ортоцентры четырех треугольников, которые образуют его прямые, лежат на одной прямой. Эта прямая перпендикулярна прямой Гаусса этого четырехсторонника.

Эта прямая называется *прямой Обера* полного четырехсторонника (рис. 4.11).

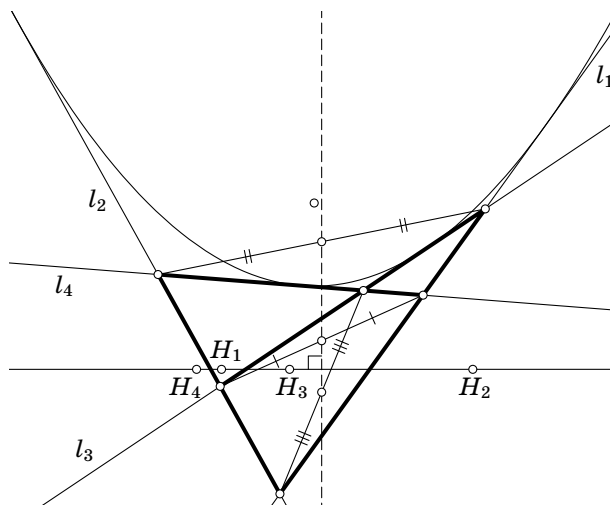


Рис. 4.11

**Доказательство.** Аналогично доказательству предыдущей теоремы рассмотрим параболу, касающуюся сторон четырехсторонника. По теореме 1.11 ортоцентры соответствующих треугольников лежат на директрисе этой параболы.

Докажем теперь вторую часть теоремы. Воспользовавшись следствием из леммы 1.2 и результатом задачи 10, легко показать, что проекция середины диагонали четырехсторонника на директрису попадает в центр тяжести проекций точек касания четырехсторонника с параболой, т. е. эти три точки при проекции на директрису попадают в одну и ту же точку. Значит, они лежат на одной прямой (тем самым мы еще раз доказали существование прямой Гаусса), которая к тому же перпендикулярна директрисе (параллельна оси параболы).  $\square$

Эти две теоремы легко доказать и не прибегая к рассмотрению парабол. Первая несложно доказывается прямым подсчетом углов, а вторая — с использованием радикальных осей. Однако доказать следующую теорему достаточно коротко и просто, не прибегая к вписанной параболы, не получается.



**Теорема 4.12 (Емельянов).** *Окружность Эйлера треугольника, образованного диагоналями полного четырехсторонника, проходит через точку Микеля этого четырехсторонника (рис. 4.12).*

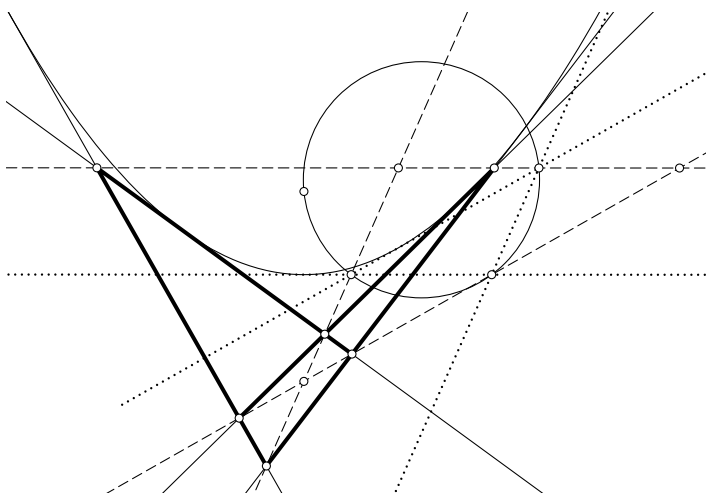


Рис. 4.12

Для доказательства нужно будет воспользоваться леммой, двойственной к лемме 4.1.

**Лемма 4.2 (двойственная к лемме 4.1).** *Если у двух полных четырехсторонников совпадают диагонали, то существует коника, касающаяся всех сторон этих четырехсторонников (очевидно, такая коника единственная).*

**Доказательство теоремы 4.12.** Рассмотрим средние линии треугольника, образованного диагоналями четырехсторонника, и бесконечную прямую. Эти четыре прямые образуют четырехсторонник, диагонали которого представляют собой не что иное, как стороны этого треугольника. А значит, в силу леммы 4.2 существует коника, которая касается сторон четырехсторонника, бесконечно удаленной прямой и средних линий нашего треугольника. Поскольку она касается бесконечно удаленной прямой, это парабола, и точка Микеля нашего четырехсторонника — фокус этой параболы. Окружность Эйлера — это описанная окружность срединного треугольника, стороны которого, как мы показали, касаются нашей параболы, а значит, она проходит через фокус параболы, т. е. через точку Микеля нашего четырехсторонника.

Аналогично показывается, что *центр описанной окружности треугольника, образованного диагоналями полного четырехсторонника, лежит на прямой Обера.*

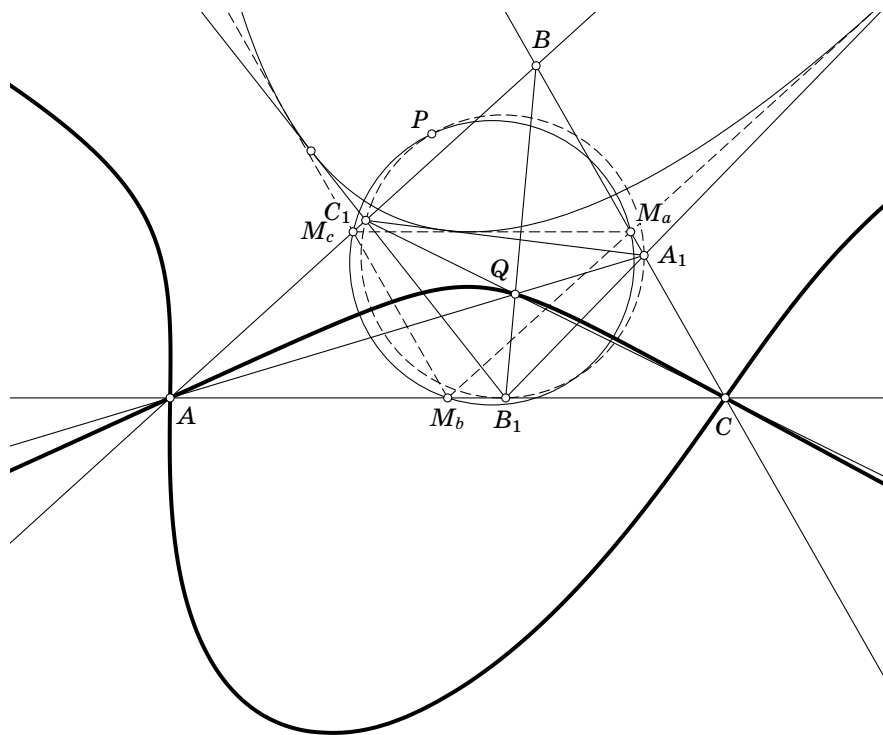


Рис. 4.13

Действительно, центр описанной окружности — это ортоцентр срединного треугольника, стороны которого, как было показано, касаются той же параболы, что и стороны четырехсторонника. А значит, его ортоцентр лежит на директрисе параболы, которая, как было показано, совпадает с прямой Обера нашего четырехсторонника.  $\square$

Заметим, что с каждой точкой  $P$  на окружности Эйлера треугольника  $ABC$  можно связать параболу с фокусом в этой точке и директрисой — прямой, проходящей через точки, симметричные точке  $P$  относительно средних линий треугольника  $ABC$ . Рассмотрим любую прямую, касающуюся этой параболы. Пусть она пересекает стороны  $AB$  и  $AC$  треугольника в точках  $C_1$  и  $B_1$ . Пусть прямые  $CC_1$  и  $BB_1$  пересекаются в точке  $Q$ . Пусть  $AQ$  пересекает  $BC$  в точке  $A_1$ . Тогда, воспользовавшись леммой 4.2, легко показать, что  $A_1B_1$ ,  $A_1C_1$  и трилинейная поляра точки  $Q$  касаются этой параболы, а значит, точка  $P$  — это точка Микеля четырехсторонника, образованного сторонами чевианного треугольника точки  $Q$  и ее трилинейной полярой относительно треугольника  $ABC$ . Поэтому описанная окружность треугольника  $A_1B_1C_1$  проходит через  $P$ .

Так, рассмотрев множество всех касательных к нашей параболе, мы получим множество всех таких точек  $Q$ , что  $P$  будет точкой Микеля сторон чевианного треугольника точки  $Q$  и ее трилинейной полары. Это множество (на самом деле это будет кривая четвертого порядка, изображенная на рис. 4.13) в объединении с равносторонней гиперболой, описанной вокруг треугольника  $ABC$  и имеющей центр в точке  $P$ , даст все множество таких точек, что их чевианная окружность проходит через точку  $P$ .

Опять же с помощью этой конструкции можно просто доказать еще одну достаточно сложную теорему.

**Теорема 4.13 (Дроз-Фарни).** Пусть прямая  $l_1$ , проходящая через точку  $H$ , являющуюся ортоцентром треугольника  $ABC$ , пересекает его стороны в точках  $A_1, B_1$  и  $C_1$ . Другая прямая  $l_2$ , перпендикулярная  $l_1$  и тоже проходящая через точку  $H$ , пересекает стороны треугольника в точках  $A_2, B_2$  и  $C_2$ . Тогда середины отрезков  $A_1A_2, B_1B_2$  и  $C_1C_2$  лежат на одной прямой.

**Доказательство.** Рассмотрим параболу, касающуюся сторон треугольника и прямой  $l_1$ . В силу теорем 1.11 и 1.7 касательная к этой параболе, проведенная из точки  $H$  и отличная от  $l_1$ , перпендикулярна  $l_1$ , а значит, она совпадает с  $l_2$ . В силу теоремы 1.10 описанные окружности треугольников  $A_1A_2H, B_1B_2H$  и  $C_1C_2H$  проходят через фокус этой параболы  $F$ , а значит, центры этих окружностей лежат на серединном перпендикуляре к  $FH$ . Поскольку все эти треугольники прямоугольные, центры их описанных окружностей — это середины гипотенуз, т. е. отрезков  $A_1A_2, B_1B_2$  и  $C_1C_2$  (рис. 4.14)<sup>1</sup>. □

Если точка  $P$  движется по описанной окружности треугольника, то серединные перпендикуляры к  $PH$  будут касаться коники, вписанной в треугольник, с фокусами в точках  $H$  и  $O$  (это следует из конструкции, описанной в теореме 3.4).

Таким образом, мы попутно доказали, что все эти прямые будут огибать вписанную в треугольник конику с фокусами в точках  $O$  и  $H$ .

Стоит отметить, что эта теорема легко получается из задачи 18. В качестве центрально симметричного треугольника стоит выбрать треугольник, вершины которого симметричны центру описанной окружности относительно сторон треугольника. С каждой получа-

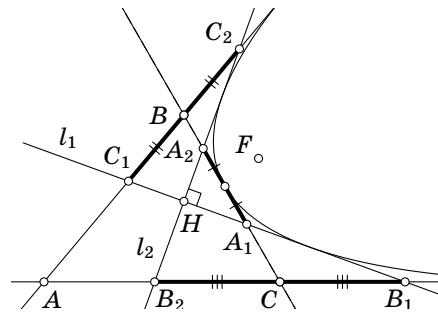


Рис. 4.14

1. Последняя часть доказательства является частным случаем задачи 7.

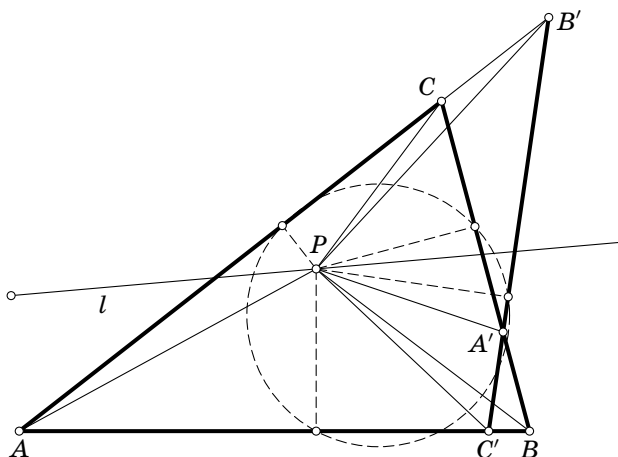


Рис. 4.15

ющейся в этой задаче прямой можно связать две проходящие через ортоцентр перпендикулярные прямые, которые порождают прямую из теоремы Дроз-Фарни. Существование таких двух прямых легко доказать прямым подсчетом углов.

В 2009 г. К. Похоата и Н. Белухов независимо получили следующее обобщение теоремы Дроз-Фарни.

**Теорема.** Пусть дан треугольник  $ABC$ , точка  $P$  и проходящая через  $P$  прямая  $l$ . Прямые, симметричные  $AP$ ,  $BP$ ,  $CP$  относительно  $l$ , пересекают соответственно  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  в точках  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ . Тогда  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  лежат на одной прямой.

Теорема Дроз-Фарни получается, если  $P$  является ортоцентром треугольника, а  $l$  — биссектрисой угла между проходящими через ортоцентр перпендикулярными прямыми. Действительно, медианы прямоугольных треугольников, образованных этими прямыми и сторонами  $ABC$ , симметричны относительно  $l$  их высотам, совпадающим с высотами  $ABC$ .

Для доказательства теоремы отметим следующий факт.

Пусть  $X_aX_bX_c$  — педальный треугольник точки  $X$  относительно треугольника  $ABC$ . Тогда  $\angle X_aX_cX_b = \angle AXB - \angle ACB$ .

Это равенство легко получить, рассмотрев вписанные четырехугольники  $AA_cXX_b$  и  $BX_cXX_a$ .

Рассмотрев теперь педальные треугольники точки  $P$  относительно треугольников  $ABC$  и  $A'B'C'$ , получим, что проекции  $P$  на прямые  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  и  $A'B'$  лежат на одной окружности. Это означает, что  $P$  является фокусом коники, касающейся этих четырех прямых. Но существует ровно одна коника с фокусом  $P$ , вписанная в треугольник  $ABC$ . Следовательно, прямая  $A'B'$  касается этой коники. Аналогично

касаются ее прямые  $A'C'$  и  $B'C'$ , что возможно, только если все эти три прямые совпадают.

Интересный частный случай возникает, когда  $P$  — центр вписанной окружности. Тогда полученная прямая касается этой окружности.

§ 4.3. Нормали к конике. Окружность Иохимстала

**Определение.** Пусть даны коника и точка  $P$  на ней. *Нормалью* к конике в точке  $P$  называется прямая, проходящая через точку  $P$  и перпендикулярная касательной к конике в точке  $P$ .

Через произвольную не лежащую на конике точку можно провести четыре (возможно, комплексные) нормали к конике. Оказывается, для оснований этих нормалей верен следующий факт.

**Теорема 4.14.** Пусть  $P_1, P_2, P_3, P_4$  — четыре точки коники  $\alpha$  с центром  $O$ , нормали в которых проходят через точку  $Q$ . Тогда точки  $P_1, P_2, P_3, P_4, O, Q$  лежат на равносторонней гиперболе, асимптоты которой параллельны осям коники.

**Доказательство.** Возьмем произвольную окружность  $\omega$  с центром  $Q$  и рассмотрим геометрическое место центров коник пучка, порожденного этой окружностью и коникой  $\alpha$ . По теореме 3.17 это будет коника, а поскольку этот пучок содержит окружность, это будет равносторонняя гиперболa (см. задачу 29). Обозначим ее за  $\gamma$  (рис. 4.16). Бесконечно удаленными точками гиперболы  $\gamma$  будут неподвижные точки инволюции, порожденной рассматриваемым пучком на бесконечно удаленной прямой, т. е. точки, принадлежащие осям коники  $\alpha$ . Любая точка  $X$ , лежащая на  $\gamma$ , является центром коники из этого пучка, ее полярной относительно этой коники будет бесконечно удаленная прямая, а значит, по теореме 3.15 полярны точки  $X$

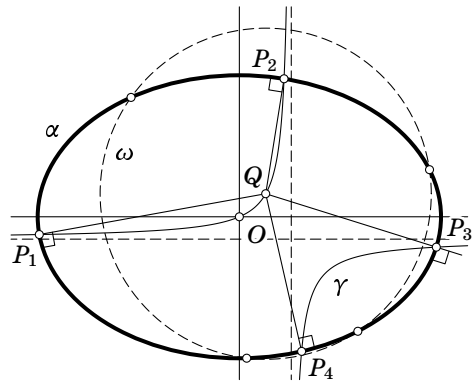


Рис. 4.16

относительно всех коник пучка будут параллельны. Поскольку прямая  $QX$  перпендикулярна поляре точки  $X$  относительно окружности  $\omega$ , она будет также перпендикулярна поляре точки  $X$  относительно коники  $\alpha$ . Поэтому если точка  $P$  принадлежит пересечению  $\alpha$  и  $\gamma$ , то касательная в ней к конике  $\alpha$  будет перпендикулярна  $QP$ , а значит,  $QP$  будет нормалью к  $\alpha$ .

Кроме того, легко восстановить касательную к  $\gamma$  в точке  $O$ . Направление, сопряженное относительно  $\alpha$  направлению касательной, должно быть перпендикулярно  $QO$ . Следовательно, гипербола  $\gamma$  не зависит от радиуса окружности  $\omega$ , так как ее можно определить как конику, проходящую через точку  $Q$ , две точки бесконечно удаленной прямой, через которые проходят оси коники  $\alpha$ , и точку  $O$  и касающуюся в точке  $O$  соответствующей прямой. Отсюда следует, что других точек  $P$ , обладающих тем свойством, что  $PQ$  — нормаль к  $\alpha$ , нет. Потому любая такая точка получается вышеописанными рассуждениями, если за  $\omega$  принять окружность с центром  $Q$  и радиусом  $QP$ .  $\square$

Построенная гипербола называется *гиперболой Аполлония* коники  $\alpha$  относительно точки  $Q$ . Середины сторон четырехугольника, вершины которого — точки пересечения  $\omega$  и  $\alpha$ , лежат на  $\gamma$  и образуют параллелограмм, центр которого совпадает с центром гиперболы  $\gamma$  и центром тяжести этого четырехугольника. Значит, центр тяжести пересечения является центром гиперболы  $\gamma$  и не зависит от радиуса окружности.

**Теорема 4.15.** Точки  $P_1, P_2, P_3$  и точка, симметричная  $P_4$  относительно центра коники, лежат на одной окружности.

*Доказательство.* Рассмотрим случай, когда данная коника является эллипсом. Пусть  $P'$  — точка, симметричная точке  $P_4$  относительно  $O$  (рис. 4.17). Утверждение теоремы равносильно тому, что коникой центров пучка, определяемого точками  $P_1, P_2, P_3, P'$ , будет равносторонняя гипербола. Рассмотрим сжатие к малой оси эллипса, переводящее его в окружность. Так как аффинное преобразование центры коник переведет в центры, рассматриваемое геометрическое место перейдет тоже в конику, причем в равностороннюю гиперболу, поскольку новый пучок будет содержать окружность (образ исходного эллипса). Эта гипербола содержит образы точки  $O$  (т. е. саму точку  $O$ ) и середин отрезков  $P'P_1, P'P_2, P'P_3$ , которые при гомотетии относительно образа точки  $P'$  с коэффициентом 2 перейдут в образы точек  $P_4, P_1, P_2$  и  $P_3$ . Но поскольку существует только одна равносторонняя гипербола, проходящая через образы точек  $P_4, P_1, P_2$  и  $P_3$ , это будет образ соот-

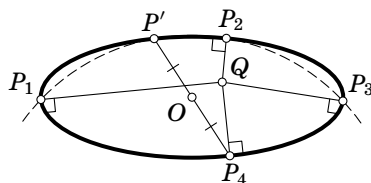


Рис. 4.17

ветствующей гиперболы Аполлония (которая при этом сжатии перейдет в равностороннюю гиперболу, так как ее асимптоты сонаправлены с осями эллипса), т. е. коника центров пучка, определяемого точками  $P_1, P_2, P_3, P'$ , будет гомотетична гиперболе Аполлония, проходящей через точки  $P_1, P_2, P_3, P_4$ , а значит, будет равносторонней гиперболой.  $\square$

Эта окружность называется *окружностью Иоахимстала*.

Если воспользоваться комплексным аффинным преобразованием, теорему 4.15 можно доказать и для гипербол. В случае, когда коника является параболой, одно из четырех оснований нормалей, проходящих через данную точку, уходит в бесконечность. Соответственно теорема 4.15 приобретает следующий вид. *Три основания нормалей к параболы, проведенных из данной точки, и ее вершина лежат на одной окружности* (рис. 4.18).

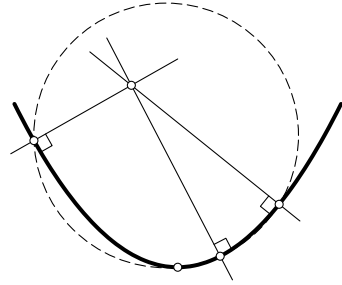


Рис. 4.18

#### § 4.4. Теорема Понселе для софокусных эллипсов

Если взять окружность с центром в одном из фокусов софокусных коник и применить сначала полярное соответствие, а затем инверсию относительно нее, то софокусные коники перейдут в концентрические окружности. Значит, и полярные окружности образовывали пучок. Следовательно, софокусные коники образуют двойственный пучок.

Мы будем рассматривать два таких софокусных эллипса, что существует многоугольник, вписанный в больший из них и описанный вокруг меньшего (рис. 4.19). По теореме Понселе таких многоугольников существует бесконечно много (если существует хотя бы один). Оказывается, они обладают рядом интересных свойств.

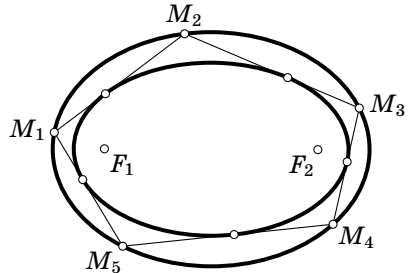


Рис. 4.19

В § 1.4 мы доказали такой факт. Пусть нить накинули на эллипс  $\alpha$ . Тогда карандаш, привязанный к нити, при вращении будет вырисовывать эллипс, софокусный с  $\alpha$ .

Важным следствием этого факта является следующая теорема.

**Теорема 4.16.** *Среди всех выпуклых  $n$ -угольников, вписанных в данный эллипс  $\alpha$ , наибольший периметр имеет  $n$ -угольник, описанный вокруг некоторого софокусного с  $\alpha$  эллипса  $\alpha_n$ .*

**Доказательство.** Пусть  $M_1M_2\dots M_n$  — многоугольник с максимальным периметром. Докажем, что для каждого  $i = 1, 2, \dots, n$  биссектриса внешнего угла  $M_{i-1}M_iM_{i+1}$  должна являться касательной к  $\alpha$  в точке  $M_i$ .

Пусть это не так. Обозначим через  $\alpha'$  эллипс с фокусами в  $M_{i-1}$  и  $M_{i+1}$ , проходящий через точку  $M_i$  (рис. 4.20). Тогда касательная к  $\alpha'$ , она же биссектриса внешнего угла  $M_{i-1}M_iM_{i+1}$ , пересекает  $\alpha$  еще в какой-то точке  $M_x$ . Но сумма  $M_{i-1}M_x + M_{i+1}M_x$  будет больше, чем  $M_{i-1}M_i + M_{i+1}M_i$ , поскольку  $M_x$  лежит вне эллипса  $\alpha'$ . Таким образом, мы получим выпуклый  $n$ -угольник  $M_1M_2\dots M_{i-1}M_xM_{i+1}\dots M_n$ , периметр которого больше периметра многоугольника  $M_1M_2\dots M_n$ . Но это противоречит выбору нашего многоугольника.

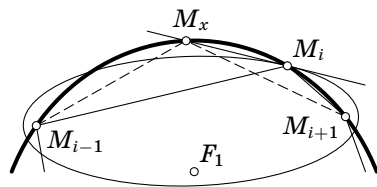


Рис. 4.20

Покажем теперь, что в  $n$ -угольник  $M_1M_2\dots M_n$  можно вписать эллипс.

Пусть  $F_1$  и  $F_2$  — фокусы эллипса  $\alpha$ . Рассмотрим эллипс  $K_n$  с фокусами в этих точках, касающийся прямой  $M_1M_2$ . Вторая касательная к  $\alpha_n$ , проведенная из точки  $M_2$ , должна образовывать с  $M_2F_1$  угол, равный  $\angle F_1M_2M_1$ . Но такой прямой является прямая  $M_2M_3$ , поскольку у углов  $M_3M_2M_1$  и  $F_1M_2F_2$  совпадают внешние биссектрисы (касательная к  $\alpha$  в точке  $M_2$ ). Аналогично, рассматривая вершину  $M_3$ , мы получаем, что  $\alpha_n$  касается  $M_3M_4$ , и т. д.

По теореме Понселе многоугольник  $M_1M_2\dots M_n$  можно вращать между  $\alpha$  и  $\alpha_n$ . Покажем, что при этом периметр многоугольника не меняется.

Действительно, этот периметр легко подсчитать. Пусть  $Q_i$  — это точки касания  $\alpha_n$  со сторонами  $M_iM_{i+1}$ . По теореме 1.6 для произвольной точки  $M$  на  $\alpha$  величина  $MX + MY + \sphericalcap XY$ , где  $MX$  и  $MY$  — это касательные к  $\alpha_n$ , не зависит от  $M$ . Поэтому  $C = Q_{i-1}M_i + M_iQ_i + \sphericalcap Q_iQ_{i-1}$  не зависит от  $M_i$ . Посчитав суммарную длину таких петель для каждой точки  $M_i$ , мы получим  $Cn$ . Так мы посчитаем каждую сторону многоугольника по одному разу, а дуги эллипса  $n - 1$  раз (меньшая из дуг  $Q_iQ_{i+1}$  принадлежит всем петлям, кроме петли соответствующей точки  $M_{i+1}$ ). Таким образом, периметр  $n$ -угольника  $M_1M_2\dots M_n$  равен разности между  $Cn$  и периметром эллипса  $\alpha_n$ , взятым  $n - 1$  раз. А значит, он не меняется при вращении.  $\square$

Выпуклый  $n$ -угольник Понселе, вписанный в один эллипс и описанный около другого, софокусного, обладает еще одним экстремальным свойством, в некотором смысле «двойственным» доказанному в теореме 4.16.



**Теорема 4.17.** *Выпуклый  $n$ -угольник, описанный около данного эллипса  $\alpha$ , имеет наименьший периметр среди всех таких  $n$ -угольников тогда и только тогда, когда все его вершины лежат на эллипсе, софокусном с  $\alpha$ .*

**Доказательство.** Зафиксируем точки касания  $M_{i-1}, M_{i+1}$  сторон многоугольника с эллипсом. Пусть  $T$  — точка пересечения касательных в этих точках (рис. 4.21). Пусть для определенности дуга  $M_{i-1}M_{i+1}$  меньше половины эллипса. Будем искать точку  $M_i$  на ней, для которой длина ломаной  $M_{i-1}XYM_{i+1}$ , где  $X, Y$  — точки пересечения касательной, проведенной в точке  $M_i$ , с  $TM_{i-1}$  и  $TM_{i+1}$ , минимальна. Пусть  $X', Y'$  — точки касания окружности, вписанной в треугольник  $TXY$ , с его сторонами  $TU, TX$ . Тогда  $M_{i-1}XYM_{i+1} = M_{i-1}Y' + X'M_{i+1}$ , т. е. минимум достигается, когда вписанная окружность имеет максимально возможный радиус. Это значит, что вписанная окружность и эллипс касаются прямой  $XU$  с разных сторон в одной и той же точке. Следовательно, по теореме 3.16 центр эллипса  $O$  лежит на прямой  $IT'$ , где  $I$  — центр окружности, вписанной в треугольник  $TXY$ ,  $T'$  — середина отрезка  $XU$ .

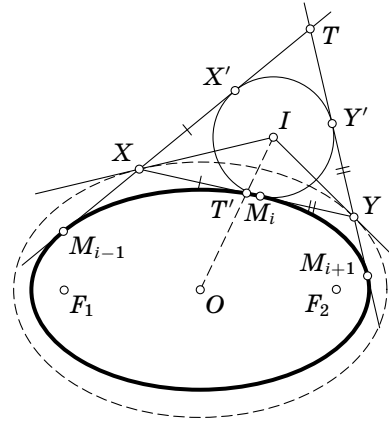


Рис. 4.21

Пусть  $F_1, F_2$  — фокусы данного эллипса. Так как эллипс вписан в треугольник  $TXY$ , прямые  $F_1X$  и  $F_2X$  образуют равные углы с прямой  $IX$ , а прямые  $F_1Y$  и  $F_2Y$  — с  $IY$ . Кроме того, прямая, соединяющая середины отрезков  $F_1F_2$  и  $XU$ , проходит через точку  $I$ . Воспользуемся результатом задачи 26. Поскольку угол  $XIU$  тупой, длины ломаных  $F_1XF_2$  и  $F_1YF_2$  равны, т. е. точки  $X$  и  $Y$  лежат на эллипсе, софокусном с  $K$ . Отсюда, очевидно, следует утверждение теоремы.

Случай, когда дуга  $M_{i-1}M_{i+1}$  составляет больше половины эллипса, разбирается аналогично, с заменой вписанной окружности треугольника  $TXY$  на вневписанную. Наконец, если точки  $M_{i-1}, M_{i+1}$  диаметрально противоположны, то искомое утверждение может быть получено предельным переходом или выведено из того факта, что сумма длин сторон описанного около эллипса параллелограмма не может быть меньше суммы длин его осей. Этот факт, в свою очередь, можно доказать простым вычислением.  $\square$

**Задача 42.** Эллипс и окружность касаются друг друга внешним образом, а их общие касательные параллельны. Докажите, что расстояние между их центрами равно сумме полуосей эллипса.

## § 4.5. Теорема Сонда. Гиперболы Кипера и Гринберга—Мякишева

В 1894 г. французский математик Сонда открыл следующую теорему (определения см. ниже).

**Теорема 4.18 (Сонда).** Пусть два треугольника (не гомотетичных) перспективны и ортологичны,  $P$  — центр их перспективы,  $Q$  — один из центров ортологичности. Тогда прямая  $PQ$  перпендикулярна оси перспективы.

**Следствие.** Пусть  $P$  — центр перспективы двух треугольников,  $Q_1, Q_2$  — их центры ортологичности. Тогда точки  $P, Q_1, Q_2$  лежат на одной прямой (ось ортологичности).

Публикуя эту теорему, Сонда заметил, что ему известно только аналитическое доказательство. Геометрическое доказательство теоремы Сонда нашел в 1896 г. петербургский математик Соллертинский. Однако его доказательство, довольно сложное, не привлекло широкого внимания и было надолго забыто. Только в 2006 г. французский математик Франсуа Ридо обнаружил это доказательство и сумел упростить его. Одновременно другое доказательство нашел ульяновский школьник Александр Красильников. Ниже приводится доказательство теоремы Сонда, соединяющее идеи Ридо и Красильникова.

Треугольники  $A_1B_1C_1$  и  $A_2B_2C_2$  называются *перспективными*, если прямые  $A_1A_2, B_1B_2,$  и  $C_1C_2$  пересекаются в одной точке, которая называется *центром перспективы*.

Напомним, что для перспективных треугольников выполняется **теорема Дезарга**: треугольники  $A_1B_1C_1$  и  $A_2B_2C_2$  перспективны тогда и только тогда, когда точки пересечения их соответствующих сторон ( $A_1B_1$  и  $A_2B_2, B_1C_1$  и  $B_2C_2, C_1A_1$  и  $C_2A_2$ ) лежат на одной прямой. Эта прямая называется *осью перспективы*.

Треугольник  $A_2B_2C_2$  называется *ортологичным* треугольнику  $A_1B_1C_1$ , если перпендикуляры, опущенные из  $A_1$  на  $B_2C_2$ , из  $B_1$  на  $A_2C_2$  и из  $C_1$  на  $A_2B_2$ , пересекаются в одной точке, которая называется *центром ортологичности*.

Применив теорему Чевы или теорему Карно, нетрудно убедиться, что ортологичность является симметричным свойством: если треугольник  $A_2B_2C_2$  ортологичен треугольнику  $A_1B_1C_1$ , то и  $A_1B_1C_1$  ортологичен  $A_2B_2C_2$ . (Центры ортологичности могут при этом не совпадать.)

Доказательство теоремы Сонда начнем со следующего простого утверждения.

**Лемма 4.3.** Пусть на трех прямых  $a, b, c$ , проходящих через одну точку, взяты точки  $A_1, A_2, A_3; B_1, B_2, B_3; C_1, C_2, C_3$ . Тогда попарные оси перспективы треугольников  $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, A_3B_3C_3$  пересекаются в одной точке.

Пользуясь леммой 4.3, можно свести общий случай теоремы Сонда к случаю двух треугольников с общей вершиной, заменив треугольник  $A_2B_2C_2$  гомотетичным ему относительно центра перспективы  $P$  треугольником  $A'B'C_1$ . Действительно, при этом центр перспективы и один из центров ортогологичности не изменятся, а ось перспективы перейдет в параллельную.

**Лемма 4.4 (Соллертинский<sup>2</sup>).** Пусть дано проективное преобразование  $f$  и точки  $A, B = f(A)$ . Тогда геометрическое место точек пересечения прямых  $l$  и  $f(l)$ , где  $l$  проходит через  $A$ , — это коника, проходящая через точки  $A$  и  $B$ . При этом, если  $f(AB) = AB$ , коника распадается на две прямые, одна из которых совпадает с  $AB$ .

**Доказательство.** Пусть  $X, Y, Z$  — три точки искомого ГМТ. Рассмотрим конику, проходящую через точки  $A, B, X, Y, Z$ . Пусть  $U$  — произвольная точка этой коники. Так как двойные отношения четверок прямых  $AX, AY, AZ, AU$  и  $BX, BY, BZ, BU$  равны, получаем, что  $f(AU) = BU$ , т. е.  $U$  принадлежит искомого ГМТ.  $\square$

**Утверждение 1.** Если два треугольника ортогологичны и центры ортогологичности совпадают, то треугольники перспективны.

**Доказательство.** Зафиксировав один из треугольников  $ABC$  и общий центр ортогологичности  $Q$ , будем подвергать второй треугольник  $A'B'C'$  гомотетии с центром  $Q$ . При этом точки  $A', B', C'$  будут двигаться по трем проходящим через  $Q$  прямым, а прямые  $A'B', B'C'$  и  $C'A'$  сохранять свои направления. Следовательно, два треугольника все время будут ортогологичны с общим центром  $Q$ , а соответствие между прямыми  $AA'$  и  $BB'$  будет проективным. По лемме Соллертинского точка пересечения прямых  $AA'$  и  $BB'$  будет описывать конику, проходящую через  $A$  и  $B$ . Нетрудно убедиться, что на этой конике лежат также точки  $C, Q$  и ортоцентр  $H$  треугольника  $ABC$ . Поскольку через пять точек, никакие четыре из которых не лежат на одной прямой, проходит единственная коника, точка пересечения прямых  $AA'$  и  $CC'$  описывает эту же конику, т. е. прямые  $AA', BB'$  и  $CC'$  пересекаются в одной точке.  $\square$

**Примечание.** Из приведенного рассуждения следует, что коники  $ABCPQ$  и  $A'B'C'PQ$ , где  $P$  — центр перспективы треугольников, являются равносторонними гиперболами.

**Лемма 4.5 (F. Rideau).** Пусть треугольники  $ABC$  и  $A'B'C'$  ортогологичны,  $Q$  — точка пересечения перпендикуляров из  $A, B, C$  на стороны  $A'B'C'$ ,  $Q'$  — точка пересечения перпендикуляров из  $A', B', C'$  на стороны  $ABC$ . Тогда четырехугольники  $ABCQ$  и  $A'B'C'Q'$  аффинно эквивалентны.

2. На самом деле эта лемма была известна значительно раньше, но для удобства будем называть ее леммой Соллертинского.

Для доказательства достаточно убедиться в равенстве отношений площадей треугольников  $S_{ABQ}/S_{ACQ} = S_{A'B'Q'}/S_{A'C'Q'}$ .

**Утверждение 2.** Пусть треугольники  $ABC$  и  $A'B'C$  ортоголичны с центрами  $Q, Q'$ ;  $T$  — точка пересечения  $AB$  и  $A'B'$ . Тогда  $QQ' \perp CT$ .

**Доказательство.** Будем равномерно двигать прямые  $AB$  и  $A'B'$  параллельно самим себе так, чтобы через точку  $C$  они прошли одновременно. Тогда точка их пересечения будет двигаться по прямой  $CT$ . Из леммы Ридо следует, что в момент прохождения  $AB$  через  $Q$  прямая  $A'B'$  проходит через  $Q'$ . Пусть  $T'$  — соответствующая точка пересечения. Тогда  $CQ \perp Q'T'$  и  $CQ' \perp QT'$ , т. е.  $T'$  — ортоцентр треугольника  $CQQ'$ , откуда сразу следует утверждение задачи.  $\square$

**Утверждение 3.** Пусть треугольники  $ABC$  и  $A'B'C$  ортоголичны с центрами  $Q, Q'$ ;  $P$  — точка пересечения  $AA'$  и  $BB'$ . Тогда  $QQ'$  проходит через  $P$ .

**Доказательство.** Достаточно заметить, что треугольники  $ABQ$  и  $A'B'Q'$  ортоголичны с общим центром ортоголичности  $C$  и, следовательно, перспективны.  $\square$

Теорема Сонда сразу следует из утверждений 2, 3. Действительно, точка  $P$  является центром перспективы треугольников  $ABC$  и  $A'B'C$ , т. е. по утверждению 3 все три центра лежат на одной прямой. При этом по утверждению 2 эта прямая перпендикулярна прямой  $CT$ , являющейся осью перспективы треугольников.

**Задача 43.** Пусть треугольники  $ABC$  и  $A'B'C'$  перспективны с центром  $P$  и ортоголичны с центрами  $Q, Q'$ . Докажите, что коники  $ABCPQ, A'B'C'PQ'$  — равносторонние гиперболы с параллельными асимптотами.

**Задача 44.** Пусть треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  перспективны с центром  $P$  и ортоголичны с центрами  $Q, Q'$ .  $A_2$  — точка пересечения прямых  $AQ'$  и  $A_1Q$ ,  $B_2, C_2$  определяются аналогично. Докажите, что треугольник  $A_2B_2C_2$  перспективно-ортоголичен каждому из треугольников  $ABC, A_1B_1C_1$ .

**Задача 45.** Докажите, что оси перспективы и ортоголичности для всех трех пар треугольников предыдущей задачи совпадают.

Заметим также, что из теоремы Сонда легко выводится ее аналог для тетраэдров. Однако утверждение 1 в трехмерном случае выглядит иначе: если тетраэдры  $ABCD$  и  $A'B'C'D'$  ортоголичны, причем центры ортоголичности совпадают, то прямые  $AA', BB', CC', DD'$  гиперболы, т. е. любая прямая, пересекающая три из них, пересекает и четвертую (или параллельна ей).

Лемма Соллертинского оказывается эффективной и при решении других задач. Например, докажем с ее помощью следующее

**Утверждение 4.** Пусть на сторонах произвольного треугольника  $ABC$  построены как на основаниях во внешнюю (внутреннюю)

сторону подобные равнобедренные треугольники  $ABC'$ ,  $BCA'$ ,  $CAB'$ . Тогда прямые  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  пересекаются в одной точке. Геометрическим местом таких точек является равносторонняя гипербола, изогонально сопряженная прямой  $OL$ .

**Доказательство.** Очевидно, что при изменении углов равнобедренных треугольников точки  $A'$ ,  $B'$  движутся по серединным перпендикулярам к отрезкам  $BC$  и  $AC$ . При этом, поскольку прямые  $AB'$  и  $BA'$  вращаются с одинаковыми скоростями, соответствие, которое таким образом устанавливается между этими серединными перпендикулярами, является проективным. Следовательно, проективным является и соответствие между прямыми  $AA'$  и  $BB'$ . Применяя лемму Соллертинского, получаем, что точка  $X$  пересечения этих прямых описывает конику, проходящую через  $A$  и  $B$ . При этом, если угол при основании равнобедренных треугольников стремится к нулю, то  $X$  стремится к центру тяжести  $M$  треугольника  $ABC$ , а если угол стремится к  $\pi/2$ , то  $X$  стремится к ортоцентру  $H$ . Кроме того, если отложить во внутреннюю сторону равнобедренные треугольники с углом при основании, равным углу  $C$ , то  $X$  совпадет с  $C$ . Поэтому полученная коника совпадает с гиперболой  $ABCMH$ , которая является равносторонней, так как проходит через вершины и ортоцентр треугольника. Аналогично, точка пересечения прямых  $AA'$  и  $CC'$  описывает эту же гиперболу и, значит, совпадает с  $X$ .  $\square$

Построенная гипербола называется *гиперболой Кипера*. Опишем подробнее некоторые ее свойства.

Будем обозначать через  $X(\varphi)$ ,  $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$ , точку гиперболы Кипера, которая получается, когда угол при основании равнобедренных треугольников равен  $\varphi$ . При этом  $\varphi$  будем считать положительным, если треугольники строятся во внешнюю сторону, и отрицательным, если во внутреннюю. Как было отмечено выше,  $X(0) = M$ ,  $X(\pm\pi/2) = H$ . Приведем еще несколько примеров точек гиперболы Кипера.

$X(\pm\pi/3) = T_{1,2}$  — точки Торричелли. Отметим, что изогонально сопряженные точкам Торричелли точки Аполлония инверсны относительно описанной окружности треугольника  $ABC$ . Значит, точки Торричелли являются противоположными точками гиперболы, т. е. ее центр совпадает с серединой отрезка  $T_1T_2$ , которая, следовательно, лежит на окружности девяти точек.

$X(\pm\pi/6) = N_{1,2}$ . Эти точки называются *точками Наполеона*.

Известны следующие свойства точек Торричелли и Наполеона:

- прямые  $T_1T_2$  и  $N_1N_2$  пересекаются в точке Лемуана  $L$ ;
- прямые  $T_1N_1$  и  $T_2N_2$  пересекаются в точке  $O$ ;
- прямые  $T_1N_2$  и  $N_1T_2$  пересекаются в центре окружности девяти точек  $O_9$ .

Используя эти свойства, можно доказать

**Утверждение 5.** Для любого  $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$

- прямая  $X(\varphi)X(-\varphi)$  проходит через  $L$ ;
- прямая  $X(\varphi)X(\pi/2 - \varphi)$  проходит через  $O$ ;
- прямая  $X(\varphi)X(\pi/2 + \varphi)$  проходит через  $O_9$ .

(Если точки совпадают, то соответствующая прямая касается гиперболы; аргумент  $X$  определяется по модулю  $\pi$ .)

**Доказательство.** Все три части утверждения доказываются одинаково, поэтому ограничимся доказательством первой. Если проектировать гиперболу Кипера из точки  $C$  на серединный перпендикуляр к  $AB$ , то точки  $X(\varphi)$  и  $X(-\varphi)$  перейдут в точки, симметричные относительно  $AB$ . Поэтому отображение гиперболы на себя, переводящее  $X(\varphi)$  в  $X(-\varphi)$ , сохраняет двойные отношения. Также сохраняет двойные отношения отображение, переводящее точку  $X$  во вторую точку пересечения гиперболы с прямой  $XL$ . Поскольку два этих отображения совпадают в точках  $T_{1,2}$ ,  $N_{1,2}$ , они совпадают на всей гиперболе.  $\square$

Как частный случай утверждения 5 получаем, что касательные к гиперболе Кипера в точках  $M$  и  $N$  пересекаются в точке  $L$ . Это означает, что  $L$  – центр коники, касающейся сторон треугольника в основаниях его высот.

Первые две части утверждения 5 можно обобщить следующим образом.

**Утверждение 6.** Рассмотрим такие пары точек  $X(\varphi_1)$ ,  $X(\varphi_2)$ , что  $\varphi_1 + \varphi_2 = \text{const}$ . Все прямые  $X(\varphi_1)X(\varphi_2)$  проходят через одну точку, лежащую на прямой  $OL$ .

**Доказательство.** Обозначим сумму  $\varphi_1 + \varphi_2$  через  $2\varphi_0$ . Рассуждая так же, как при доказательстве утверждения 6, получаем, что четырехугольник  $X(\varphi_1)X(\varphi_0)X(\varphi_2)X(\pi/2 + \varphi_0)$  – гармонический, т. е. прямая  $X(\varphi_1)X(\varphi_2)$  проходит через полюс прямой  $X(\varphi_0)X(\pi/2 + \varphi_0)$ . Но последняя прямая при любом  $\varphi_0$  проходит через точку  $O_9$ . Следовательно, все прямые  $X(\varphi_1)X(\varphi_2)$  проходят через некоторую точку полярны  $O_9$ , которая по утверждению 5 совпадает с прямой  $OL$ .  $\square$

Поскольку гипербола Кипера является изогональным образом прямой  $OL$ , полученная в утверждении 6 точка будет точкой  $X'(\varphi_3)$ , изогонально сопряженной некоторой точке  $X'(\varphi_3)$  гиперболы. Чтобы установить связь между  $\varphi_3$  и  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ , воспользуемся теоремой о двух парах изогонально сопряженных точек.

Пусть  $X(\varphi_1)$ ,  $X(\varphi_2)$  – точки гиперболы Кипера,  $X'(\varphi_1)$ ,  $X'(\varphi_2)$  – изогонально сопряженные им точки прямой  $OL$ . По теореме о двух парах изогонально сопряженных точек прямые  $X(\varphi_1)X'(\varphi_2)$  и  $X'(\varphi_1)X(\varphi_2)$  пересекаются на гиперболе Кипера. По утверждению 6 параметр, соответствующий этой точке, с одной стороны, равен  $f(\varphi_1) - \varphi_2$ , а с другой, равен  $f(\varphi_2) - \varphi_1$ , где  $f$  – некоторая, пока неиз-

вестная функция. Отсюда получаем  $f(\varphi_1) + \varphi_1 = f(\varphi_2) + \varphi_2 = \text{const}$ , и, подставив, например,  $\varphi_2 = 0$ , получаем  $f(\varphi) = -\varphi$ .

Результат можно сформулировать следующим образом.

**Теорема 4.19.** *Три точки  $X(\alpha)$ ,  $X(\beta)$ ,  $X'(\gamma)$  лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ .*

Интересный частный случай получается, если в качестве  $X(\alpha)$ ,  $X(\beta)$  взять две бесконечно удаленные точки гиперболы. Тогда точка  $X(\gamma)$  изогонально сопряжена бесконечно удаленной точке прямой  $OL$ , т. е. является точкой пересечения гиперболы Кипера и описанной окружности, отличной от вершин треугольника. Таким образом, сумма параметров, соответствующих этой точке и бесконечно удаленным, кратна  $\pi$ .

Наконец, заметим, что фигурирующий в определении гиперболы Кипера треугольник  $A'B'C'$  не только перспективен треугольнику  $ABC$ , но и ортологичен ему, причем одним из центров ортологичности всегда будет точка  $O$ . Оказывается, геометрическим местом вторых центров ортологичности также будет гипербола Кипера, причем этому утверждению можно придать совершенно элементарную формулировку.

**Утверждение 7.** *Пусть на сторонах  $AC$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  построены как на основаниях подобные равнобедренные треугольники  $AB'C$  и  $CA'B$  с углами  $\varphi$  при основании. Перпендикуляр, проведенный из  $C$  к отрезку  $A'B'$ , пересекает серединный перпендикуляр к отрезку  $AB$  в точке  $C_1$ . Тогда  $\angle AC_1B = 2\varphi$ .*

Действительно, утверждение 7 означает, что центром ортологичности треугольников является точка  $X(\pi/2 - \varphi)$ .

**Доказательство.** Пусть  $A''$ ,  $B''$  — образы точек  $A'$ ,  $B'$  при гомотетии с центром  $C$  и коэффициентом 2. Тогда  $\angle CAB'' = \angle CBA'' = \pi/2$  и  $A''B'' \parallel A'B'$ . Пусть  $C_2$  — точка пересечения  $CC_1$  и  $A''B''$ . Так как четырехугольник  $CC_2BA''$  вписан в окружность с диаметром  $CA''$ , получаем, что  $\angle BC_2A'' = \angle BCA'' = \varphi$ . Аналогично  $\angle AC_2B'' = \varphi$ . Значит,  $C_2C_1$  — биссектриса угла  $AC_2B$ , и точка ее пересечения с серединным перпендикуляром к  $AB$  лежит на описанной около треугольника  $ABC_2$  окружности. Следовательно,  $\angle AC_1B = 2\varphi$ .  $\square$

В 2004 г. Д. Гринберг и А. Мякишев обнаружили следующее обобщение гиперболы Кипера.

**Утверждение 8.** *Пусть  $A_1B_1C_1$  — чевианный треугольник точки  $P$  относительно треугольника  $ABC$ . На отрезках  $AC_1$ ,  $C_1B$ ,  $BA_1$ ,  $A_1C$ ,  $CB_1$ ,  $B_1A$  построим как на основаниях подобные и одинаково ориентированные равнобедренные треугольники  $AC_aC_1$ ,  $C_1C_bB$ ,  $BA_bA_1$ ,  $A_1A_cC$ ,  $CB_cB_1$ ,  $B_1B_aA$ . Тогда треугольник, образованный прямыми  $A_bA_c$ ,  $B_cB_a$ ,  $C_aC_b$ , перспективен треугольнику  $ABC$ , причем если точка  $P$  фиксирована, а угол  $\varphi$  при основании равнобедренных*

треугольников меняется, то центр перспективы движется по гиперболе, описанной около треугольника  $ABC$ .

Авторами этого утверждения было предложено только вычислительное доказательство. Приведем недавно найденное геометрическое доказательство.

Прежде всего отметим, что перспективность треугольников следует из теоремы Дезарга. Действительно, отношение расстояний от точек  $C_a$  и  $C_b$  до прямой  $AB$  равно отношению отрезков  $AC_1/BC_1$ , т. е. не зависит от угла  $\varphi$ . Поэтому точка  $C_2$  пересечения прямых  $AB$  и  $C_aC_b$  также не зависит от  $\varphi$ . Определив аналогично точки  $A_2$ ,  $B_2$  и применив теоремы Чевы и Менелая, заметим, что  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2$  лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда прямые  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  пересекаются в одной точке. Поэтому для доказательства утверждения 8 достаточно показать, что точка пересечения прямых  $AA'$  и  $BB'$ , где  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  — вершины треугольника, образованного прямыми  $A_bA_c$ ,  $B_cB_a$ ,  $C_aC_b$ , описывает конику.

Найдем сначала траекторию точки  $A'$ . Эта точка является пересечением прямых  $BB_1$  и  $CC_1$ , проходящих через фиксированные точки  $B_2$  и  $C_2$  соответственно. Кроме того, эти прямые проходят через точки  $B_a$ ,  $C_a$ , движущиеся по серединным перпендикулярам к отрезкам  $AB_1$  и  $AC_1$ . Очевидно, что полученное в результате соответствие между этими перпендикулярами является проективным, значит, по лемме Соллертинского точка  $A'$  движется по конике  $\alpha$ , проходящей через  $B_2$  и  $C_2$ . Эта коника также проходит через  $A$ , так как при  $\varphi = 0$  точки  $A$  и  $A'$  совпадают. Аналогично получаем, что траекторией точки  $B'$  будет коника  $\beta$ , проходящая через  $A_2$ ,  $C_2$  и  $B$ .

Заметим, что соответствие между  $A'$  и  $B_a$  является проекцией коники  $\alpha$  из лежащей на этой конике точки  $C_2$  на серединный перпендикуляр к  $AB_1$ . Значит, это соответствие сохраняет двойные отношения. Аналогично сохраняет двойные отношения соответствие между  $B'$  и  $A_b$ . Следовательно, соответствие между  $A'$  и  $B'$  является проективным отображением коники  $\alpha$  на конику  $\beta$ . Поскольку  $A$  лежит на  $\alpha$ , а  $B$  на  $\beta$ , соответствие между прямыми  $AA'$  и  $BB'$  также будет проективным. Снова применив лемму Соллертинского, получаем, что точка пересечения этих прямых движется по конике, проходящей через  $A$  и  $B$ . Аналогично получаем, что эта коника проходит через  $C$ . Нетрудно видеть, что при малых значениях  $\varphi$  точка пересечения лежит внутри треугольника  $ABC$ , т. е. коника всегда будет гиперболой.

Зависимость гиперболы Гринберга—Мякишева от точки  $P$  носит достаточно сложный характер. Поэтому укажем только один интересный частный случай.

**Утверждение 9.** Если  $P$  — ортоцентр треугольника, то гиперболы Кипера и Гринберга—Мякишева совпадают.



Для доказательства достаточно найти две отличные от вершин треугольника общие точки гипербол. Покажем, что  $Y(\pi/4) = X(-\pi/4)$ ,  $Y(-\pi/4) = X(\pi/4)$ , где  $Y(\varphi)$  — точка гиперболы Гринберга—Мякишева, соответствующая углу  $\varphi$ .

Пусть  $AA_1$ ,  $BB_1$  — высоты треугольника  $ABC$ ;  $AB_aB_1$ ,  $B_1B_cC$ ,  $CA_cA_1$ ,  $A_1A_bB$  — равнобедренные прямоугольные треугольники, построенные во внешнюю сторону треугольника  $ABC$ ;  $AC_0B$  — равнобедренный прямоугольный треугольник, построенный во внутреннюю сторону. Тогда надо доказать, что прямые  $B_aB_c$ ,  $A_bA_c$  и  $CC_0$  пересекаются в одной точке.

Так как точки  $A_1$  и  $C_0$  лежат на окружности с диаметром  $AB$ ,  $\angle CA_1C_0 = \angle BAC_0 = \pi/4$ , т. е. точки  $A_b$ ,  $A_1$  и  $C_0$  лежат на одной прямой, и  $C_0A_b \parallel CA_c$ . Аналогично  $C_0B_a \parallel CB_c$ . Нетрудно также видеть, что  $C_0A_b/C_0B_a = \sin B/\sin A = CA_1/CB_1 = CA_c/CB_c$ . Следовательно, треугольники  $CA_cB_c$  и  $C_0A_bB_a$  гомотетичны, откуда и вытекает требуемое утверждение. Второе равенство доказывается аналогично.

#### § 4.6. «Новая» теорема замыкания

Теоремами замыкания называют ряд теорем, которые в общем виде могут быть сформулированы следующим образом.

Дана некоторая кривая (как правило, коника). Взяв на кривой точку  $X_0$ , по некоторому правилу построим новую точку  $X_1$ . По  $X_1$  аналогично построим  $X_2$  и т. д. Если для некоторой точки  $X_0$   $X_n = X_0$ , это выполняется и для любой начальной точки.

Примерами теорем замыкания являются теорема Понселе или призм Штейнера. Сформулируем еще одну теорему такого типа.

**Теорема 4.20.** Пусть дана окружность, точка  $P$  внутри нее и угол  $\varphi$ . Для произвольной точки окружности  $X_0$  найдем такую точку  $X_1$ , что угол (ориентированный)  $PX_0X_1$  равен  $\varphi$ . По  $X_1$  аналогично построим  $X_2$  и т. д. Если  $X_n = X_0$  для некоторой точки  $X_0$ , то это выполняется и для любой начальной точки.

Отметим, что условию, связывающему точки  $X_i$  и  $X_{i+1}$ , можно придать симметричную форму. Действительно, пусть  $\angle PXY = \varphi$ ,  $X'$  — вторая точка пересечения прямой  $PX$  с окружностью (рис. 4.22). Тогда при повороте вокруг центра окружности  $O$  на угол  $2\varphi$  точка  $X'$  переходит в  $Y$ . Пусть  $Y'$  — образ при этом повороте точки  $X$ . Тогда прямая  $YY'$  проходит через образ  $Q$  точки  $P$ , а  $\angle XYQ = \angle XYY' = \varphi$ , т. е. для того, чтобы по точке  $Y$  получить точку  $X$ , надо заменить  $P$  на  $Q$  и поменять знак угла  $\varphi$ . Отметим также, что если  $Z$  — точка пересечения прямых  $PX$  и  $QY$ , то  $\angle PZQ = 2\varphi = \angle POQ$ , т. е.  $Z$  лежит на окружности  $OPQ$ . Поэтому условие, связывающее  $X$  и  $Y$ , можно задать в следующей симметричной форме: вершина равнобедренного

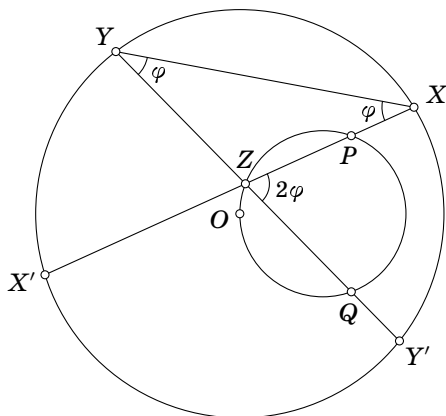


Рис. 4.22

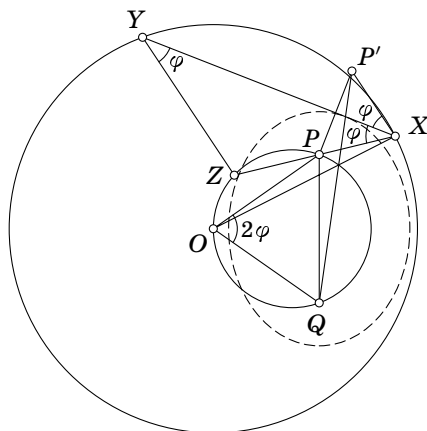


Рис. 4.23

треугольника с основанием  $XU$  и углом при основании  $\varphi$  лежит на окружности  $POQ$ .

Теперь доказать теорему 1 можно с помощью алгебраического рассуждения, аналогичного приведенному в [11] для доказательства теоремы Понселе. Однако сейчас мы покажем, что все прямые  $XU$  касаются некоторого эллипса и, тем самым, эта теорема является частным случаем теоремы Понселе. Действительно, пусть  $P'$  — точка, симметричная  $P$  относительно  $XU$  (рис. 4.23). Тогда треугольники  $PXP'$  и  $POQ$  подобны, а значит, подобны и треугольники  $OPX$  и  $QPP'$ , т. е.

$$QP' = OX \frac{PQ}{OP} = 2R \sin \varphi$$

не зависит от выбора точки  $X$ . Поэтому точка пересечения прямых  $XU$  и  $QP'$  лежит на эллипсе с фокусами  $P, Q$  и большой осью, равной  $2R \sin \varphi$ , а  $XU$  касается этого эллипса.

Можно также показать, что существует проективное преобразование, сохраняющее данную окружность и переводящее построенный эллипс в окружность с тем же центром. Это преобразование устроено следующим образом. Данная окружность и окружность  $OPQ$  определяют пучок окружностей. Если окружности не пересекаются, то этот пучок имеет две предельные точки. Обозначим одну из них, например, лежащую внутри окружности  $OPQ$ , через  $K$  и поставим в соответствие точке  $X$  данной окружности вторую точку пересечения этой окружности с прямой  $XK$ . Это преобразование сохраняет двойные отношения точек окружности и, следовательно, может быть продолжено до проективного преобразования плоскости.

Рассмотрим такие две точки  $X, Y$ , что прямая  $XU$  касается эллипса, и соответствующие им точки  $X', Y'$  (рис. 4.24).

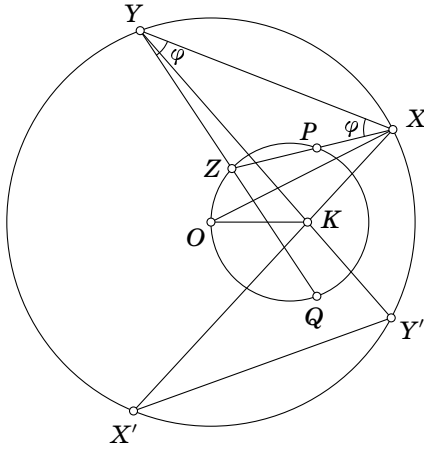


Рис. 4.24

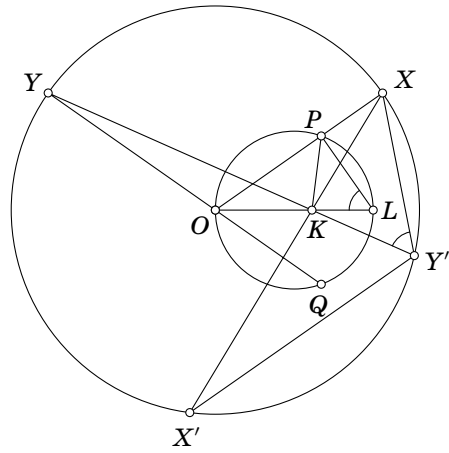


Рис. 4.25

Имеем

$$X'Y' = XY \frac{KY'}{KX} = \frac{XY \cdot (R^2 - OK^2)}{KX \cdot KY}.$$

Так как  $K$  — предельная точка пучка окружностей, отношение  $KX$  к корню из степени точки  $X$  относительно окружности  $POQ$  не зависит от выбора точки  $X$ . Следовательно, отношение  $XY/(KX \cdot KY)$  с точностью до постоянного множителя равно

$$\frac{XY}{\sqrt{XZ \cdot XP \cdot YZ \cdot YQ}} = \frac{XY}{XZ \sqrt{XP \cdot YQ}} = \frac{2 \cos \varphi}{\sqrt{XP \cdot YQ}}.$$

Но  $XP$  и  $YQ$  — это две наклонных, проведенных из фокусов эллипса к его касательной под фиксированным углом, и их произведение постоянно. Следовательно, длина хорд  $X'Y'$  постоянна, и их огибающая — окружность с центром  $O$ .

Если окружность  $POQ$  пересекает исходную окружность, то точка  $K$  и, соответственно, искомое преобразование будут комплексными, но доказанный результат остается в силе: эллипс, огибающий хорды  $XY$ , перейдет в комплексную окружность с центром  $O$ .

Таким образом, условием замыкания на  $n$ -м шаге будет  $\angle X'XY' = \pi/n$ . Этому условию можно придать более простой вид, доказав, что в действительном случае  $\angle X'XY' = \angle KPL$ , где  $L$  — точка окружности  $POQ$ , диаметрально противоположная  $O$ . Для этого рассмотрим случай, когда точка  $Z$  совпадает с  $O$  (рис. 4.25).

Очевидно, что  $\angle PLK = \angle XY'K = \pi/2 - \varphi$ . Докажем, что  $PK/LK = XK/Y'K$ . Так как  $K$  — предельная точка пучка,

$$\frac{PK}{LK} = \frac{\sqrt{R^2 - OP^2}}{R^2 - OL^2}.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \frac{XK}{Y'K} &= \frac{XK \cdot YK}{R^2 - OK^2} = \frac{R^2 + OK^2}{R^2} \frac{\sqrt{XP \cdot XO \cdot YQ \cdot YO}}{R^2 - OK^2} = \\ &= \frac{R^2 + OK^2}{R(R^2 - OK^2)} \sqrt{XP \cdot YQ} = \frac{R^2 + OK^2}{R(R^2 - OK^2)} \sqrt{R^2 - OP^2}. \end{aligned}$$

Таким образом, требуемое соотношение сводится к легко проверяемому равенству

$$\frac{R^2 + OK^2}{R^2 - OK^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - OL^2}}.$$

Из полученных соотношений следует, что  $\sin \angle KXY' = \sin \angle KPL$ . При этом  $\angle KXY' = \angle X'XY' < \pi/2$ , т. к. точки  $X'$ ,  $Y'$  лежат по одну сторону от прямой  $OL$ , а  $X$  по другую. Очевидно, что  $\angle KPL$  тоже острый, так что из равенства синусов следует и искомое равенство углов.

Соответственно, условие замыкания можно записать в виде

$$\frac{OP^2}{R^2} = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{n}.$$

Перейдем теперь к частным случаям теоремы.

При  $n = 3$  получаем вписанный в данную окружность треугольник  $ABC$ , в котором  $\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA = \angle QBA = \angle QCB = \angle QAC = \varphi$ , т. е. точки  $P$ ,  $Q$  являются *точками Брокара* треугольника. Свойства точек Брокара описаны, например, в [12], но, благодаря сформулированным выше результатам, появляется возможность доказать некоторые новые свойства и найти более простые доказательства известных.

Напомним, что точки Брокара являются фокусами вписанного в треугольник эллипса Брокара. Очевидно, этот эллипс совпадает с построенным при доказательстве теоремы. Следовательно, верны следующие утверждения.

1. Эллипс Брокара треугольника дважды касается его описанной окружности (точки касания комплексные). Действительно, проективным преобразованием можно перевести описанную окружность и эллипс Брокара в концентрические окружности, которые касаются друг друга в двух комплексных бесконечно удаленных точках.

2. Существует бесконечно много треугольников с данными описанной окружностью и эллипсом Брокара.

Рассмотрим теперь прямые, соединяющие вершины треугольника и точки касания противоположных сторон с эллипсом Брокара. При проективном преобразовании эллипс Брокара переходит в концентрическую данной окружность, а треугольник — в правильный. Соответственно, эти три прямые перейдут в оси правильного треугольника и, значит, будут пересекаться в его центре. При обратном преобразовании центр переходит в *точку Лемуана* треугольника  $ABC$ . Таким

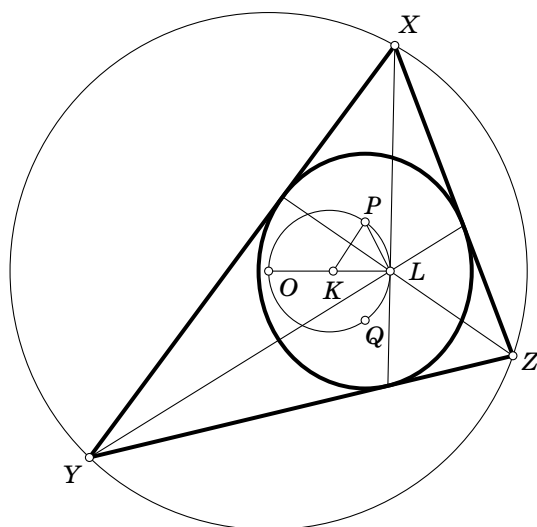


Рис. 4.26

образом, получено новое доказательство свойства 2г точек Брокара, приведенного в § 2.3.

Отметим также, что наше проективное преобразование переводит друг в друга центр окружности  $O$  и диаметрально противоположную ему точку  $L$  окружности  $OPQ$ . Это дает новое доказательство свойства 2в из § 2.3.

Далее, неподвижная точка  $K$  проективного преобразования обладает тем свойством, что вторые точки пересечения прямых  $AK$ ,  $BK$ ,  $CK$  с описанной окружностью треугольника образуют правильный треугольник. Следовательно,  $K$  — одна из двух точек Аполлония треугольника. Второй точкой Аполлония является точка  $K'$ , инверсная  $K$  относительно обеих окружностей  $ABC$  и  $OPQ$ . Очевидно,  $K'$  обладает теми же свойствами, что и  $K$ . Отсюда, в частности, следует сформулированное в § 2.3 свойство 3 точек Аполлония.

Приведенные факты иллюстрирует рис. 4.26.

При  $n = 4$  получаем вписанный четырехугольник  $ABCD$ , который проективным преобразованием можно перевести в квадрат. Так как проективное преобразование сохраняет двойные отношения точек окружности, произведения противоположных сторон четырехугольника должны быть равны. Такой четырехугольник называется *гармоническим*. При этом центру квадрата соответствует точка пересечения диагоналей четырехугольника, которая, следовательно, совпадает с точкой  $L$ . Таким образом, верна

**Теорема 4.21.** *В гармоническом четырехугольнике  $ABCD$  существуют две точки  $P$ ,  $Q$ , такие что  $\angle PAB = \angle PBC = \angle PCD = \angle PDA =$*

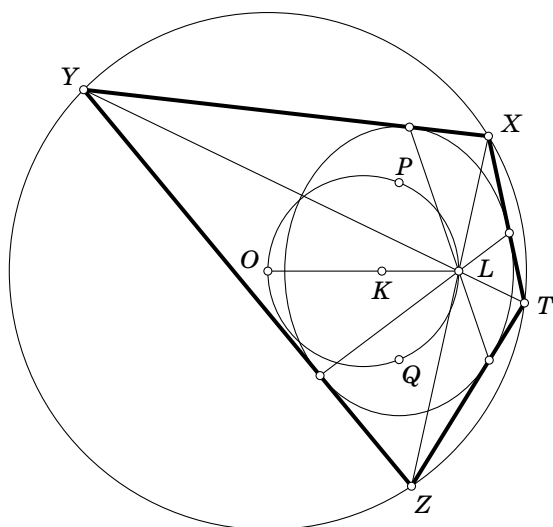


Рис. 4.27

$= \angle QBA = \angle QCB = \angle QDC = \angle QAD = \varphi$ . Эти точки лежат на окружности с диаметром  $OL$ , где  $O$  — центр описанной окружности, а  $L$  — точка пересечения диагоналей четырехугольника, причем  $\angle POL = \angle QOL = \varphi$  (рис. 4.27). Более того, если зафиксировать описанную окружность и точку  $L$ , то для любого вписанного гармонического четырехугольника, диагонали которого пересекаются в  $L$ , точки  $P$ ,  $Q$  обладают указанными свойствами.

Нетрудно убедиться также, что угол  $\varphi$  удовлетворяет соотношению

$$\frac{1}{\sin^2 \varphi} = \frac{1}{\sin^2 A} + \frac{1}{\sin^2 B},$$

и, следовательно, для всех четырехугольников из последней теоремы правая часть принимает одно и то же значение.

Наконец, при  $n \geq 5$  мы получаем вписанный многоугольник  $A_1 \dots A_n$ , проективно эквивалентный правильному. Это означает, что все прямые  $A_i B_i$ , где  $B_i$  — точка пересечения касательных к окружности в точках  $A_{i-1}$  и  $A_{i+1}$ , пересекаются в одной точке  $L$ . Соответственно, точки  $P$ ,  $Q$  лежат на окружности с диаметром  $OL$ , и  $\angle POL = \angle QOL = \angle PA_i A_{i+1} = \angle QA_i A_{i-1}$ .

В заключение укажем, что полученные результаты допускают простую интерпретацию в геометрии Лобачевского. Будем рассматривать данную окружность как абсолют модели Клейна. Тогда точка  $L$  является центром окружности, касающейся всех прямых  $XY$ , а  $\angle XLY = \text{const}$ . Условие замыкания принимает вид  $\angle XLY = \pi/n$ , а комплексное преобразование, переводящее эллипс в концентричную данной

окружность, является просто поворотом плоскости Лобачевского на  $180^\circ$  вокруг точки  $K$ .

### § 4.7. Параболические многоугольники

Пусть две параболы пересекаются в четырех точках. Назовем *параболическим четырехугольником* пересечение внутренностей парабол. Выше было показано, что параболический четырехугольник вписан в окружность тогда и только тогда, когда оси образующих его парабол перпендикулярны. В 2007 г. Ф. Нилов, в то время учащийся 10 класса, доказал критерий описанности параболического четырехугольника.

**Теорема 4.22.** *В параболический четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда его диагонали перпендикулярны.*

*Доказательство.* Докажем сначала следующий имеющий самостоятельную ценность факт.

**Лемма 4.6.** *Пусть дана окружность и ее хорда  $AB$ . Геометрическим местом точек, расстояние от которых до прямой  $AB$  равно длине проведенной к окружности касательной, является парабола, касающаяся окружности в точках  $A$  и  $B$ .*

*Доказательство.* Поскольку расстояние от точки до прямой и длина касательной к окружности являются квадратичными функциями координат, искомое ГМТ является коникой. Очевидно, что эта коника проходит через точки  $A$ ,  $B$  и не содержит точек, лежащих внутри окружности. Следовательно, в точках  $A$ ,  $B$  она касается окружности. Заметим теперь, что если точка  $X$  стремится на бесконечность в направлении, образующим угол  $\varphi$  с прямой  $AB$ , то отношение расстояния от  $X$  до  $AB$  к длине касательной стремится к  $\sin \varphi$ . Поэтому коника имеет с бесконечной прямой единственную общую точку, т. е. является параболой.  $\square$

Докажем теперь теорему Нилова. Пусть одна из парабол касается окружности в точках  $A$  и  $B$ , другая — в точках  $C$  и  $D$ . Тогда по лемме каждая из точек их пересечения равноудалена от прямых  $AB$  и  $CD$ . Значит, эти точки лежат на биссектрисах углов, образованных этими прямыми (по две на каждой), которые, очевидно, взаимно перпендикулярны. То, что условие перпендикулярности не только необходимо, но и достаточно, доказывается стандартным рассуждением от противного.

Предположим теперь, что параболический четырехугольник является и вписанным, и описанным. Тогда хорды, соединяющие точки касания окружности с параболой, перпендикулярны. Зафиксируем точку  $L$  их пересечения и будем вращать обе хорды вокруг  $L$ , сохра-

няя их перпендикулярность. При этом если  $X$  — любая точка пересечения парабол, то касательная из  $X$  к окружности равна расстоянию от  $X$  до любой из хорд и, значит, в  $\sqrt{2}$  раз меньше расстояния  $XL$ . Следовательно, точка  $X$  движется по окружности, принадлежащей пучку, порожденному данной окружностью и точкой  $L$ , т. е. все полученные четырехугольники вписаны в одну и ту же окружность. Таким образом, для вписанно-описанных параболических четырехугольников верен аналог теоремы Понселе. Аналогичные рассуждения позволяют доказать более общий результат.  $\square$

**Теорема 4.23.** Пусть через точку  $L$  внутри окружности проведены  $n$  хорд  $A_iB_i$  так, что  $\angle A_iLA_{i+1} = \pi/n$ . Тогда параболический  $2n$ -угольник, образованный  $n$  параболами, касающимися окружности в точках  $A_i, B_i$ , будет вписанно-описанным, причем при вращении хорд вокруг  $L$  описанная окружность остается неизменной.

Приведенная выше лемма Нилова, очевидно, допускает более общую формулировку.

Пусть даны окружность  $s$  и прямая  $l$ . Геометрическим местом точек, для которых отношение расстояния до  $l$  и касательной к  $s$  постоянно, является коника. Эта коника дваждыкасается окружности  $s$  в точках ее пересечения с  $l$  (возможно, мнимых).

Пользуясь этой леммой, можно получить следующее обобщение конструкции Данделена, также принадлежащее Нилову.

Пусть  $Q$  — поверхность второго порядка, полученная вращением некоторой коники относительно ее оси симметрии, а  $S$  — сфера, касающаяся  $Q$  по окружности (возможно, мнимой). Плоскость  $\pi$  касается  $S$  в точке  $F$  и пересекает  $Q$  по конике  $s$ . Тогда  $F$  является фокусом этой коники, а прямая  $l$  пересечения  $\pi$  с плоскостью  $\alpha$ , содержащей окружность касания  $Q$  и  $S$ , — ее директрисой.

**Доказательство.** Пусть  $X$  — произвольная точка коники  $s$ . Проведем плоскость через  $X$  и ось симметрии поверхности  $Q$ . Она пересечет  $Q$  по конике, вращением которой образована эта поверхность, а  $S$  по окружности, касающейся этой коники в двух точках. При этом  $XF$  равно касательной из точки  $X$  к этой окружности, а отношение расстояний от  $X$  до  $l$  и до прямой, соединяющей эти точки, определяется углом между  $\pi$  и  $\alpha$ , т. е. не зависит от  $X$ . Следовательно, отношение расстояний до  $F$  и  $l$  одно и то же для всех точек сечения, что и требуется.  $\square$

**Следствие.** Пусть в поверхность вращения  $Q$  вписаны две сферы. Тогда их общая касательная плоскость пересекает  $Q$  по конике, фокусами которой являются точки касания сфер с плоскостью.



## Решения задач

1. Это уравнение задает кривую второго порядка, поскольку оно эквивалентно уравнению  $xy = 1$ . Так как

$$xy = \frac{1}{4}((x+y)^2 - (x-y)^2),$$

в координатах  $\xi = x + y$ ,  $\zeta = x - y$  эта гипербола будет иметь уравнение

$$\frac{\xi^2}{4} - \frac{\zeta^2}{4} = 1.$$

Попробуем найти ее фокусы. Пусть точка  $X$  скользит по гиперболе, постепенно уходя в бесконечность. Тогда прямые  $F_1X$  и  $F_2X$  стремятся к параллельным (где  $F_1$  и  $F_2$  — фокусы гиперболы), а значит, величина  $|F_1X - F_2X|$  равна длине проекции отрезка  $F_1F_2$  на ось  $Ox$ . С другой стороны, она равна действительной оси гиперболы, т. е.  $2\sqrt{2}$ . Поскольку угол между прямой  $F_1F_2$  и  $Ox$  равен  $45^\circ$ , величина  $F_1F_2$  равна  $2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 4$ . Следовательно,  $OF_1 = OF_2 = 2$ , а значит, точка  $F_1$  имеет координаты  $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ , а  $F_2$  — координаты  $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ .

2. Соединим точки касания и вершины многоугольника с точкой  $F$ . Покрасим получившиеся углы, содержащие отрезки черных сторон, в красный цвет, а содержащие отрезки белых — в синий. По теореме 1.4 углы, относящиеся к одной вершине многоугольника, равны, а они имеют разные цвета. Значит, сумма красных углов равна сумме синих углов, т. е.  $180^\circ$ .

3. Из условия следует, что прямые, симметричные диагонали  $AC$  относительно биссектрис углов  $A$  и  $C$ , пересекаются в точке  $P$  диагонали  $BD$ . Применяв теорему синусов к треугольникам  $ABP$ ,  $ADP$ ,  $ABL$  и

$ADL$ , где  $L$  — точка пересечения диагоналей, получаем  $\frac{BL}{DL} \frac{BP}{DP} = \frac{AB^2}{AD^2}$ .

Аналогично  $\frac{BL}{DL} \frac{BP}{DP} = \frac{CB^2}{CD^2}$ . А значит,  $\frac{AB}{AD} = \frac{CB}{CD}$ , откуда получаем требуемое утверждение.

4. Эксцентриситет всех равносторонних гипербол, очевидно, равен  $\sqrt{2}$  (проверьте это!). Поэтому директрисы рассматриваемых гипербол находятся на расстоянии  $FP/\sqrt{2}$  от точки  $P$ . Следовательно, они касаются окружности  $\omega$  с центром  $P$  и радиусом  $FP/\sqrt{2}$ . Легко понять, что они огибают всю окружность (так как с каждой касательной к этой окружности можно связать равностороннюю гиперболу с фокусом в точке  $F$  и касательной как директрисой). С другой стороны, директрисы переходят в асимптоты при поворотной гомотетии с центром в точке  $F$  (поворот на  $\pm 45^\circ$ , а коэффициент гомотетии  $\sqrt{2}$ ). Поэтому все асимптоты таких равносторонних гипербол будут касаться одной из двух окружностей, получающихся из  $\omega$  при вышеописанной гомотетии (рис. 5.1).

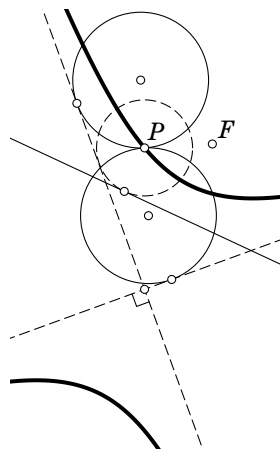


Рис. 5.1

5. Обозначим проекцию точки  $X$  на директрису параболы через  $X'$ . Заметим, что  $FY \parallel XX'$ , а  $XU \parallel X'F$  (обе прямые перпендикулярны касательной к параболе в точке  $X$ ). Таким образом,  $XUFX'$  — параллелограмм, а значит, длина отрезка  $YZ$  равна  $X'F'$ , где  $F'$  — проекция точки  $F$  на  $XX'$ . Но длина отрезка  $X'F'$  постоянна и равна расстоянию от фокуса до директрисы параболы (рис. 5.2).

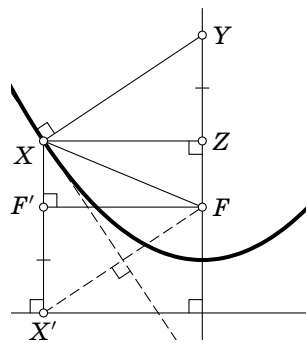


Рис. 5.2

6. Обозначим пешеходов через  $X$  и  $Y$ , а точку пересечения дорог через  $A$ . Точка пересечения серединных перпендикуляров к  $AX$  и  $AU$  движется по некоторой прямой (поскольку ее проекции на дороги движутся с постоянной скоростью). Обозначим эту прямую через  $l$ . Описанная окружность треугольника  $AXU$  все время проходит через точку, симметричную точке  $A$  относительно  $l$ . Обозначим эту точку через  $A'$ . Рассмотрим параболу, касающуюся сторон треугольника  $AXU$ , с фокусом в  $A'$ . Ее директриса — это прямая, проходящая через точки, симметричные точке  $A'$  относительно  $AX$  и  $AU$ . Но эти точки не меняют свое положение с течением времени. Поэтому директриса и фокус параболы не меняются с течением времени, а значит, и параболы остается на месте и все время касается  $XU$ .

7. Пусть прямая, касающаяся параболы, пересекает  $AP$  и  $AQ$  в точках  $X$  и  $Y$ ,  $M$  — середина отрезка  $XY$ . Тогда по теореме 1.10 описанная окружность треугольника  $AXY$  проходит через точку  $F$  — фокус нашей параболы. Заметим, что углы треугольника  $XFY$  не зависят от положения касательной. Следовательно, величина угла  $XMF$  и отношение  $\frac{FX}{FM}$  тоже постоянны. Таким образом, точка  $X$  переходит в точку  $M$  при поворотной гомотетии с центром в точке  $F$ , углом поворота  $XMF$  и коэффициентом  $\frac{FX}{FM}$ . Значит, точка  $M$  движется по прямой, в которую переходит  $AP$  при этой гомотетии.

8. Сделаем проективное преобразование, переводящее точку  $P$  в центр тяжести треугольника  $ABC$ . Тогда точки  $A'$ ,  $B'$  и  $C'$  перейдут в бесконечно удаленные, т. е. лежащие на одной прямой.

Аналогично можно показать, что для любой прямой (не проходящей через вершины треугольника) существует единственный трилинейный полюс, т. е. точка, для которой эта прямая будет трилинейной полярной.

9. Сделаем аффинное преобразование, так чтобы эта прямая стала параллельной одной из осей гиперболы. Тогда это равенство будет следовать из симметрии. Но поскольку рассматриваемые отрезки лежат на одной прямой, их равенство сохранится и после аффинного преобразования.

10. Сделаем аффинное преобразование, переводящее эти прямые в прямые, параллельные директрисе параболы. Тогда прямая, соединяющая середины отрезков  $AB$  и  $CD$ , перейдет, очевидно, в ось параболы. Но при аффинном преобразовании множество прямых, параллельных оси параболы, сохраняется (как множество). Это прямые, проходящие через точку касания этой параболы с бесконечно удаленной прямой.

11. Если точка  $C$  лежит внутри окружности, проективным преобразованием переведем ее в центр. Легко понять, что тогда образы точек  $D$  и  $E$  будут симметричны относительно центра, т. е. точки  $C$ , а значит, они лежат на одной прямой.

Если  $C$  лежит вне окружности, то задачу решает проективное преобразование, переводящее ее в бесконечно удаленную точку.

12. Сделаем аффинное преобразование, переводящее наш эллипс в окружность. Тогда все окружности из условия задачи перейдут в эллипсы. Эти эллипсы будут подобны (т. е. отношение малой и большой полуосей будет одинаковым) и одинаково расположены (соответствующие оси параллельны). Надо доказать, что они будут одинакового «размера». Сопряженные диаметры эллипса перейдут в перпендикулярные диаметры нашей окружности. Ну а теперь осталось воспользоваться результатами § 1.4. Если бы эти эллипсы были разного «раз-

мера», то радиусы окружностей, из точек которых они видны под прямым углом, тоже были бы разными. Но все эти радиусы равны радиусу нашей большой окружности (рис. 5.3).

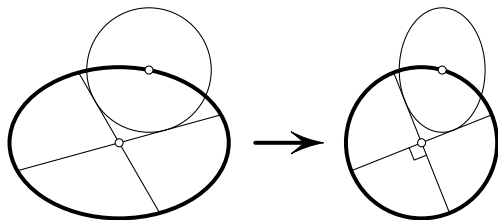


Рис. 5.3

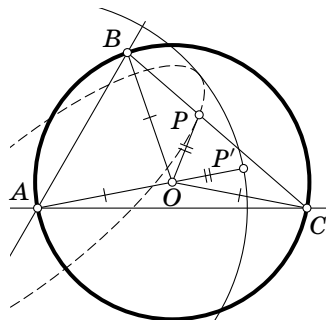


Рис. 5.4

**13.** Пусть  $O$  — центр описанной окружности треугольника  $ABC$ . Тогда по теореме синусов радиус этой окружности  $OA$  и угол  $BOC$  не изменяются. Следовательно, не меняется и длина отрезка  $OP$ . Кроме того, направление биссектрисы внешнего угла  $AOP$  тоже не меняется, так как биссектриса угла  $AOB$  всегда перпендикулярна  $AB$ , а угол  $BOP$  не меняется. Пусть  $P'$  — это точка, симметричная точке  $P$  относительно этой биссектрисы. Тогда точка  $P'$  лежит на прямой  $OA$  и длина отрезка  $AP'$  постоянна. Значит, проекции отрезков  $AP$  и  $AP'$  на прямую, параллельную внешней биссектрисе угла  $AOP$ , равны, а проекция отрезка  $AP$  на прямую, параллельную внутренней биссектрисе угла  $AOP$ , равна проекции отрезка  $AP'$  на эту же прямую, умноженной на  $\frac{AO - OP}{AO + OP}$ . Следовательно, точка  $P$  движется по эллипсу, получающемуся при сжатии окружности с центром  $A$  и радиусом  $AP'$  в  $\frac{AO - OP}{AO + OP}$  раз к прямой, параллельной внешней биссектрисе угла  $AOP$ .

**14.** Предположим сначала, что коника, пересекающая стороны треугольника в этих точках, — окружность. Тогда, например,  $BA_1 \times BA_2 = BC_1 \cdot BC_2$ . Поэтому это соотношение равно 1. Отсюда сразу следует, что если коника — эллипс, то эта величина тоже сохранится, поскольку при аффинном преобразовании, переводящем этот эллипс в окружность, данное соотношение не изменится («мы умножаем и делим на два коллинеарных отрезка»). Но для гиперболы это рассуждение не проходит, поскольку не существует аффинного преобразования, переводящего окружность в гиперболу. Зато существует проективное преобразование.

Покажем, что при проективном преобразовании эта величина не изменится.

Каждое проективное преобразование является центральной проекцией. Обозначим центр этой проекции через  $P$ . Тогда

$$\begin{aligned} \frac{BA_1 \cdot BA_2}{CA_1 \cdot CA_2} &= \frac{S_{\triangle PBA_1} \cdot S_{\triangle PBA_2}}{S_{\triangle PCA_1} \cdot S_{\triangle PCA_2}} = \frac{(PB \cdot PA_1 \cdot \sin \angle BPA_1) \cdot (PB \cdot PA_2 \cdot \sin \angle BPA_2)}{(PC \cdot PA_1 \cdot \sin \angle CPA_1) \cdot (PC \cdot PA_2 \cdot \sin \angle CPA_2)} = \\ &= \frac{PB^2}{PC^2} \cdot \frac{\sin \angle BPA_1 \cdot \sin \angle BPA_2}{\sin \angle CPA_1 \cdot \sin \angle CPA_2}. \end{aligned}$$

Выписав аналогичные равенства для других двух сторон и перемножив их, мы получим следующее равенство:

$$\begin{aligned} \frac{BA_1 \cdot BA_2}{CA_1 \cdot CA_2} \cdot \frac{CB_1 \cdot CB_2}{AB_1 \cdot AB_2} \cdot \frac{AC_1 \cdot AC_2}{BC_1 \cdot BC_2} &= \left( \frac{PB^2}{PC^2} \cdot \frac{\sin \angle BPA_1 \cdot \sin \angle BPA_2}{\sin \angle CPA_1 \cdot \sin \angle CPA_2} \right) \times \\ \times \left( \frac{PC^2}{PA^2} \cdot \frac{\sin \angle CPB_1 \cdot \sin \angle CPB_2}{\sin \angle APB_1 \cdot \sin \angle APB_2} \right) \cdot \left( \frac{PA^2}{PB^2} \cdot \frac{\sin \angle APC_1 \cdot \sin \angle APC_2}{\sin \angle BPC_1 \cdot \sin \angle BPC_2} \right) &= \\ = \left( \frac{\sin \angle BPA_1 \cdot \sin \angle BPA_2}{\sin \angle CPA_1 \cdot \sin \angle CPA_2} \right) \cdot \left( \frac{\sin \angle CPB_1 \cdot \sin \angle CPB_2}{\sin \angle APB_1 \cdot \sin \angle APB_2} \right) \cdot \left( \frac{\sin \angle APC_1 \cdot \sin \angle APC_2}{\sin \angle BPC_1 \cdot \sin \angle BPC_2} \right). \end{aligned}$$

Ну а эта величина, как нетрудно видеть, не зависит от плоскости, на которую мы делаем проекцию. Для гиперболы равенство тоже выполняется.

Осталось показать, что если точки удовлетворяют этому отношению, то они лежат на одной конике. Проведем конику через пять точек из наших шести, скажем, через все, кроме  $C_2$ . Эта коника должна пересекать  $AB$  еще в какой-то точке кроме  $C_1$ . Обозначим эту точку через  $C'_2$ . Для выбранных нами пяти точек и точки  $C'_2$  выполнено требуемое соотношение. Но, как легко понять, точка  $C'_2$  из него восстанавливается однозначно, следовательно, она должна совпадать с  $C_2$ .

**15.** Переведем проективным преобразованием точки пересечения эллипсов в вершины квадрата. Тогда центр  $O$  квадрата будет общим центром эллипсов и, значит, их общие касательные тоже будут попарно центрально симметричны относительно  $O$ .

**16.** Обозначим точки пересечения диагоналей  $AC$  и  $FB$  через  $A_1$ . Аналогично определим точки  $B_1, \dots, F_1$  (рис. 5.5).

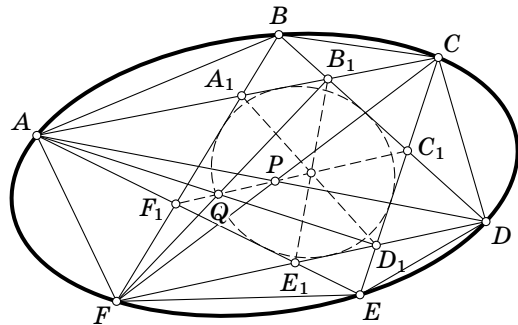


Рис. 5.5

По теореме Паскаля точка пересечения прямых  $AD$  и  $FC$  лежит на прямой  $F_1C_1$ . Обозначим эту точку через  $P$ , а точку пересечения прямых  $AD_1$  и  $B_1F$  через  $Q$ . Тогда по теореме Паппа точки  $C_1$ ,  $P$  и  $Q$  лежат на одной прямой. Опять же воспользовавшись теоремой Паппа для точек  $A$ ,  $A_1$ ,  $B_1$  и  $F$ ,  $E_1$ ,  $D_1$ , мы получаем, что на этой же прямой лежит точка пересечения прямых  $A_1D_1$  и  $B_1E_1$ . Таким образом, прямые  $A_1D_1$ ,  $B_1E_1$  и  $C_1F_1$  пересекаются в одной точке, но по обратной теореме Брианшона из этого следует, что шестиугольник  $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$  описан вокруг коники. Стоит также заметить, что мы в доказательстве нигде не использовали, что точки идут именно в таком порядке.

Выведем из этого теорему Понселе для треугольника. Пусть треугольник  $ABC$  вписан в конику  $\alpha_1$  и описан вокруг коники  $\alpha_2$ . Возьмем произвольную точку  $D$  на  $\alpha_1$ , которая лежит вне  $\alpha_2$ , и проведем касательные к  $\alpha_2$ . Пусть они повторно пересекают  $\alpha_1$  в точках  $E$  и  $F$ . Нам надо доказать, что  $EF$  касается  $\alpha_2$ . Как мы показали, существует коника, касающаяся прямых  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$ ,  $DE$ ,  $EF$  и  $FD$ . С другой стороны, существует единственная коника, касающаяся пяти прямых  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$ ,  $DE$ ,  $DF$ , и это коника  $\alpha_2$ . Следовательно, и  $EF$  касается  $\alpha_2$ , что и требовалось доказать.

**17. Указание.** Четырехугольник, образованный данными прямыми и асимптотами, описан вокруг гиперболы.

**18.** По обратной теореме Брианшона существует коника, касающаяся сторон обоих треугольников. Пусть произвольная прямая, касающаяся этой коники, пересекает  $AC$  в точке  $P$  и  $BC$  в точке  $Q$ . Для решения задачи достаточно показать, что прямые  $PB'$  и  $QA'$  параллельны. А это следует из теоремы Брианшона, примененной к описанному вокруг той же коники шестиугольнику  $A'B'XQPY$ , где  $X$ ,  $Y$  — бесконечные точки прямых  $BC$  и  $AC$ .

**19.** Пусть  $X$ ,  $Y$  — две точки бесконечно удаленной прямой, направления на которые перпендикулярны. Проведем через точки  $A$  и  $B$  прямые, параллельные направлению на  $X$ , а через  $C$  и  $H$  — прямые, параллельные направлению на  $Y$ . Пусть  $UV$  — диагональ образованного этими прямыми прямоугольника, а  $B'$  — основание высоты треугольника, опущенной из точки  $B$  (рис. 5.6).

Так как четырехугольники  $BB'CV$  и  $AUB'H$  вписаны в окружности с диаметрами  $BC$  и  $AH$ ,  $\angle AB'U = \angle ANU$ ,  $\angle VB'C = \angle VBC$ . Но  $\angle ANU = \angle VBC$  как углы с перпендикулярными сторонами, значит, точки  $U$ ,  $B'$ ,  $V$  лежат на одной прямой, и по обратной теореме Паскаля шестиугольник  $AХВНУС$  вписан в конику, т. е. равносторонняя гипербола  $ABCXY$  проходит через точку  $H$ .

Обратно, пусть коника проходит через точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $H$ . Так как  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $H$  не являются вершинами выпуклого четырехугольника, ко-

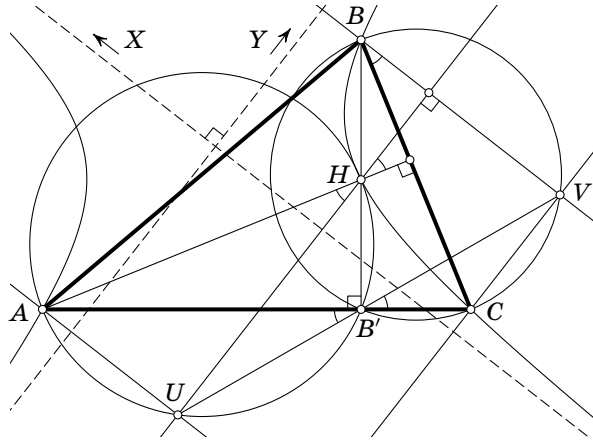


Рис. 5.6

ника может быть только гиперболой. Если  $X$  — одна из точек ее пересечения с бесконечно удаленной прямой, а  $Y$  — бесконечно удаленная точка, соответствующая перпендикулярному направлению, то  $Y$  тоже принадлежит конике. Следовательно, коника является равнобедренной гиперболой.

**20. Указание.** Можно воспользоваться *теоремой Сонда* (см. с. 122). Отметим также, что если коника является окружностью и ее внутренние точки рассматриваются как точки модели Клейна геометрии Лобачевского, то утверждение задачи становится аналогом теоремы о пересечении высот треугольника в одной точке.

Утверждение этой задачи можно сформулировать по-другому: два треугольника перспективны тогда и только тогда, когда они полярны (т. е. существует коника, при полярном соответствии относительно которой вершины одного треугольника переходят в стороны другого и наоборот; эта коника может быть мнимой). Для доказательства этого критерия достаточно перевести ось перспективы треугольников в бесконечную прямую, так что они станут гомотетичными, а затем аффинным преобразованием (возможно, мнимым) перевести центр гомотетии в общий ортоцентр.

**21.** Центр коники является полярной относительно этой коники бесконечно удаленной прямой. Значит, их прообразы относительно  $\omega$  являются полярной и полюсом относительно  $\alpha$ . Но прообраз бесконечно удаленной прямой — это центр коники  $\omega$ .

**22. 1.** Рассмотрим прямую, пересекающую гиперболу в точках  $A$ ,  $B$ , а ее асимптоты в точках  $X$ ,  $Y$ . Так как  $AX = BY$ , середины отрезков  $AB$  и  $XY$  совпадают, и прямая, соединяющая середину отрезка  $AB$  с центром гиперболы  $O$ , является медианой прямоугольного треуголь-

ника  $OXY$ . Значит, она образует с асимптотами гиперболы такие же углы, что и прямая  $AB$ .

2. Пусть  $P$  — точка пересечения двух равносторонних гипербол с центром  $O$ . Так как касательные к гиперболам, проведенные в этой точке, симметричны  $OP$  относительно прямых, параллельных асимптотам, угол между ними вдвое больше угла между асимптотами.

23. Сделаем полярное преобразование относительно окружности с центром в точке  $O$ , где  $O$  — центр эллипса. Тогда стороны ромба перейдут в точки, из которых образ эллипса (а это опять будет эллипс) виден под прямым углом. По теореме 1.5 это будет окружность, причем с центром тоже в точке  $O$ . Ну а значит, ее образом, т. е. огибающей всех этих ромбов, будет окружность с центром  $O$ .

24. Окружность и гипербола образуют дважды касающийся пучок. При полярном соответствии относительно окружности гипербола переходит в конику из этого пучка. Бесконечно удаленными точками этой коники будут образы асимптот гиперболы, которые, очевидно, совпадают с бесконечно удаленными точками самой гиперболы. Следовательно, гипербола перейдет в себя.

Покажем, что и окружность автополярна относительно гиперболы. Возьмем в пространстве две перпендикулярные прямые и рассмотрим два конуса, образующиеся при вращении этих прямых вокруг биссектрис углов между ними. Данные прямые будут общими образующими обоих конусов, по которым конусы касаются друг друга. Если провести плоскость, перпендикулярную оси одного из конусов, то сечением этого конуса будет окружность, а другого — равносторонняя гипербола, касающаяся окружности в своих вершинах (рис. 5.7). Следовательно, существует проективное преобразование,

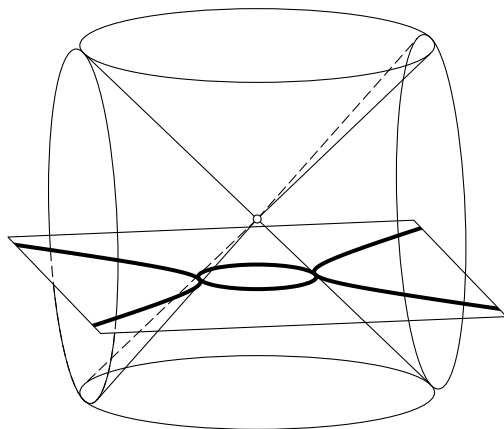


Рис. 5.7



меняющее такие окружность и гиперболу местами. При этом автополярность сохраняется.

Отметим также, что если провести секущую плоскость перпендикулярно общей образующей конусов, то сечениями будут две равные параболы, касающиеся друг друга в вершинах. Значит, *такие параболы также автополярны относительно друг друга.*

**25.** Так как точка  $T$  лежит на прямой Гаусса, она является центром вписанной в четырехугольник коники. Пусть четырехугольник не описанный, тогда эта коника не окружность, т. е. расстояние от ее центра до касательной принимает любое значение не более четырех раз. Противоположные стороны четырехугольника по условию находятся на равном расстоянии от центра. Значит, либо хотя бы в одной из пар противоположные стороны параллельны и четырехугольник является трапецией, либо в каждой паре стороны симметричны относительно одной из осей коники. Эти оси не совпадают, так как иначе в четырехугольник можно вписать окружность, следовательно, биссектрисы углов между противоположными сторонами четырехугольника перпендикулярны, что равносильно его вписанности. Обратное утверждение для вписанного четырехугольника доказывается аналогично, а для описанного четырехугольника и трапеции оно очевидно.

**26.** Фактически это переформулировка предыдущей задачи. Действительно, точка  $O$  равноудалена от противоположных сторон четырехугольника, образованного прямыми  $AX$ ,  $A'Y$ ,  $BX$ ,  $B'Y$  (именно в таком порядке). Условие, что точки  $C$ ,  $Z$  и  $O$  лежат на одной прямой, равносильно тому, что точка  $O$  лежит на его прямой Гаусса. Этот четырехугольник не трапеция, следовательно, он либо вписанный, и тогда угол  $O$  прямой, либо описанный, и тогда длины ломаных равны. Проверка обратных утверждений не представляет сложностей.

**27.** Поскольку для любых двух окружностей две из четырех точек пересечения бесконечно удаленные (и мнимые), утверждение задачи сразу следует из теоремы о трех кониках.

**28. Указание.** Данные точки принадлежат множеству центров коник пучка, порожденного вершинами четырехугольника.

**29. Указание.** Оси описанных около четырехугольника парабол перпендикулярны тогда и только тогда, когда четырехугольник вписанный.

**30. Указание.** Воспользуйтесь двойственной теоремой о четырех кониках.

**31.** В силу теоремы 3.21 один из эксцентриситетов будет больше 1, и соответствующая коника будет эллипсом, а другой меньше, и, значит, коника будет гиперболой. Далее мы будем их называть эллипсом и гиперболой. Пусть  $F'$  — это проекция точки  $F$  на  $l$ , а  $S$  — середина отрезка  $FF'$ . Точки пересечения прямой  $FF'$  с эллипсом обозначим

через  $E_1$  и  $E_2$ , а точки пересечения с гиперболой — через  $H_1$  и  $H_2$ . Поскольку эксцентриситеты у эллипса и гиперболы взаимно обратны, точки  $E_1$  и  $E_2$  будут симметричны точкам  $H_1$  и  $H_2$  относительно  $S$ . Следовательно, относительно точки  $S$  симметричны центры эллипса и гиперболы, которые являются серединами отрезков  $E_1E_2$  и  $H_1H_2$  соответственно. А значит, если точку  $F$  отразить относительно середин отрезков  $E_1E_2$  и  $H_1H_2$  (т. е. точек, симметричных относительно  $S$ ), то получатся точки, симметричные относительно  $F'$ . Но эти две точки, очевидно, будут вторыми фокусами наших коник.

**32.** Допустим, искомое множество непусто. Тогда  $\angle BAP = \angle BCP$ ,  $\angle DAP = \angle DCP$  и, значит,  $\angle A = \angle C$ . Аналогично  $\angle B = \angle D$ , т. е.  $ABCD$  — параллелограмм. С другой стороны, если  $ABCD$  — параллелограмм и радиусы описанных окружностей треугольников  $ABP$  и  $BCP$  равны, то из равенства  $\angle BAP = \angle BCP$  следует, что точка  $P$  лежит на равнобедренной гиперболы с центром в середине отрезка  $AC$ , проходящей через точки  $A, B, C$ . Так как точка  $D$  лежит на этой же гиперболы, точка  $P$  удовлетворяет условию.

**33.** Поскольку точка  $Q$  лежит на описанной окружности треугольника  $ABC$ , точка, симметричная ей относительно центра равнобедренной гиперболы, описанной около четырехугольника  $QABC$ , попадает в ортоцентр этого треугольника. Следовательно, точка  $P$  является ортоцентром треугольника  $ABC$ . Но по построению она же является центром описанной окружности, а ортоцентр и центр описанной окружности могут совпадать только в правильном треугольнике.

**34.** Пусть  $K, L, M$  и  $N$  — середины отрезков  $AB, BC, CD$  и  $AD$  соответственно. Через  $O$  обозначим центр описанной окружности, а через  $H_d$  — ортоцентр треугольника  $ABC$ . Из доказательства теоремы 4.1 следует, что  $P$  — это середина отрезка  $DH_d$ . Легко понять, что прямая  $OK$  параллельна прямой  $AH_d$ , которая в свою очередь параллельна  $PM$ . Аналогично прямая  $OL$  параллельна  $PN$ . А это означает, что точки  $P$  и  $O$  симметричны относительно центра параллелограмма  $KLMN$ . Но центр этого параллелограмма и есть центр тяжести четырехугольника  $ABCD$ .

**35.** Пусть точки лежат на конике. Сделаем проективное преобразование, переводящее прямую  $A'B'$  в бесконечно удаленную прямую, а затем аффинным преобразованием добьемся, чтобы точка  $C'$  была ортоцентром треугольника  $ABC$ . Тогда коника, проходящая через данные точки, будет равнобедренной гиперболой, т. е. направления на  $A'$  и  $B'$  будут перпендикулярны. Так как  $C'$  — ортоцентр треугольника  $ABC$ , существует окружность (возможно, мнимая), относительно которой треугольник  $ABC$  автополярен. В силу перпендикулярности прямых  $A'C'$  и  $B'C'$  треугольник  $A'B'C'$  также будет автополярен относительно этой окружности.

Обратно, пусть треугольники  $ABC$  и  $A'B'C'$  автополярны относительно некоторой коники. Переведем эту конику в окружность, а  $C'$  — в ее центр. Тогда точка  $C'$  будет ортоцентром треугольника  $ABC$ , а  $A'$ ,  $B'$  — бесконечно удаленными точками, направления на которые перпендикулярны. Следовательно, равносторонняя гипербола, проходящая через  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $C'$ , с асимптотами, параллельными этим направлениям, будет искомой коникой.

**36.** Пусть некоторая коника, проходящая через точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $O$ , пересекает бесконечно удаленную прямую в точках  $P$ ,  $Q$ . Аналогично предыдущей задаче доказывается, что треугольник  $POQ$  автополярен относительно той же коники  $\alpha$ , что и треугольник  $ABC$ . Значит, неподвижными точками инволюции, порождаемой на бесконечно удаленной прямой пучком  $ABCO$ , будут точки пересечения с  $\alpha$ . Но это и означает, что проходящая через эти точки срединная коника гомотетична  $\alpha$ .

**37. Указание.** Из теоремы Брианшона следует, что диагонали описанного около коники четырехугольника и прямые, соединяющие точки касания коники с его противоположными сторонами, пересекаются в одной точке. Применив это следствие к четырехугольнику, образованному сторонами треугольника  $ABC$  и бесконечно удаленной прямой, получим утверждение задачи.

**38. Ответ.** Центром гомотетии является центр тяжести треугольника, а ее коэффициент равен 2.

**39.** Из предыдущей задачи следует, что середины отрезков, соединяющих центр тяжести с вершинами, лежат на эллипсе Штейнера. Следовательно, этот эллипс имеет с коникой центров (то, что это коника, следует из теоремы 3.17) шесть общих точек — середины сторон и указанных отрезков.

**40.** Пусть  $I_a$ ,  $I_b$ ,  $I_c$  — центры вневписанных окружностей треугольника  $ABC$ . Так как  $ABC$  — ортотреугольник треугольника  $I_aI_bI_c$ , поляры точки  $P$  относительно равносторонних гипербол, проходящих через точки  $I_a$ ,  $I_b$ ,  $I_c$ , проходят через  $P'$ . По теореме 3.9 прямые  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  пересекаются в точке, являющейся полюсом прямой  $PI$ , где  $I$  — центр окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , относительно коники  $I_aI_bI_cIP$ . Но эта коника является равносторонней гиперболой, так что полученная точка лежит на  $PP'$ .

**41.** Любая точка плоскости может быть перспектором вписанной в данный треугольник коники, причем соответствующая коника единственна. Ясно, что при перемещении перспектора коника меняется непрерывно. Следовательно, перспекторы эллипсов лежат внутри описанного эллипса Штейнера, а перспекторы гипербол — вне. Применим теперь теорему 4.7. При изотомическом сопряжении внутренность треугольника перейдет в себя, а точки сегмента, огра-

ниченного, например, стороной  $AB$  треугольника и стягиваемой ей дугой эллипса, не содержащей третьей вершины  $C$ , — в точки угла, вертикального к углу  $C$ . Соответственно множеством центров вписанных эллипсов будет внутренность серединного треугольника и три угла, вертикальных к его углам.

**42.** Пусть  $X, Y$  — точки касания эллипса с параллельными касательными,  $T$  — точка касания эллипса и окружности,  $U, V$  — точки пересечения касательной к эллипсу в точке  $T$  с параллельными касательными,  $U', V'$  — точки пересечения параллельных касательных с какой-то другой касательной к эллипсу. Тогда, рассуждая так же, как при доказательстве последней теоремы, получаем, что  $XU + UV + VY < XU' + U'V' + V'Y$ , т. е. точки  $U, V$  лежат на эллипсе, софокусном с данным. При этом  $OU$  и  $OV$ , где  $O$  — центр окружности, — касательные к этому эллипсу, а  $\angle UOV = 90^\circ$ . Следовательно, точка  $O$  лежит на окружности с центром в центре эллипса, радиус которой, очевидно, равен сумме его полуосей.

**43. Указание.** Сведите задачу к случаю треугольников с общей вершиной и примените лемму Соллертинского.

**44–45. Указание.** Докажите, что каждая из трех точек  $P, Q, Q'$  является центром перспективы для какой-то пары треугольников, а две другие — центрами ортологичности той же пары.

# Предметный указатель

- асимптоты гиперболы 8
- гипербола 8
  - Аполлония 118
  - Кипера 107, 125
  - равносторонняя 8, 101
  - Фейербаха 105
- двойное отношение 35, 36
- директриса 23
- изогональное сопряжение 16, 44, 90
- изотомическое сопряжение 58, 91
- инверсия 31
- инволюция 96
- коника 8, 22
- коническое сечение 22
- кривая второго порядка 8, 10
- лемма Симсона 27
- нормаль 117
- окружность Аполлония 43
  - девяяти точек 31
  - Иоахимстала 119
  - педальная 41
  - Ферма–Аполлония 18
  - чевианная 42
  - Эйлера 31
- ось гиперболы действительная 8
  - мнимая 8
- параболы 9
  - радикальная 59
  - эллипса большая 7
    - малая 7
- парабола 8, 24

- перспектор 108  
 полный четырехсторонник 111  
 полюс 38  
     трилинейный 40  
 поляра 38  
     трилинейная 40  
 полярное соответствие 38  
 полярный образ 72  
 принцип двойственности 39  
 прямая Гаусса 91, 112  
     Обера 112  
     Симсона 27  
 пучок 79  
     окружностей 60  
         гиперболический 60  
         параболический 60  
         эллиптический 61  
 радикальный центр 60  
 симедиана 49  
 соосные окружности 60  
 степень точки 58  
 сферы Данделена 22  
 теорема о пучке коник 80  
     о трех кониках 89  
         двойственная 90  
     о четырех кониках 89  
         двойственная 90  
     Дроз-Фарни 115  
 теорема Емельяновых 105  
     Монжа 93  
     Ньютона 39  
     Понселе 63, 69, 119, 142  
     Сонда 122  
     Фейербаха 31  
     Фрежье 78, 100  
 точка Аполлония 55  
     Брокара 50  
     Жергонна 57  
     изогонально сопряженная 44  
     Лемуана 49  
     Микеля 111  
     Нагеля 58  
     предельная пучка окружностей 61  
     Торричелли 56  
     Фейербаха 33  
 треугольник автополярный 75  
     окружностно-чевианный 42  
     педальный 41  
     подерный 41  
     чевианный 42  
 угол Брокара 51  
 эксцентриситет 23  
 эллипс 7  
     Брокара 50  
     Штейнера вписанный 54  
     описанный 55, 110

## Список литературы

1. Александров П. С.  
*Лекции по аналитической геометрии.*  
М.: Наука, 1968.
2. Яглом И. М.  
*Геометрические преобразования*, Т. 1, 2.  
М.: Гостехиздат, 1955–1956.
3. Заславский А. А.  
*Геометрические преобразования.*  
М.: МЦНМО, 2003.
4. Коксетер Г. С. М., Грейтцер С. Л.  
*Новые встречи с геометрией.*  
М.: Наука, 1978.
5. Берже М.  
*Геометрия*, Т. 1, 2.  
М.: Мир, 1984.
6. Кокстер Х. С. М.  
*Действительная проективная плоскость.*  
М.: Физматгиз, 1959.
7. Гильберт Д., Кон-Фоссен С.  
*Наглядная геометрия.*  
М.: Наука, 1981.
8. Емельянов Л. А., Емельянова Т. Л.  
*Семейство Фейербаха.*  
// Математическое просвещение. 3 сер. Вып. 6. 2002. С. 78–92.
9. Lemaire J.  
*L'hyperbole équilatère.*  
Paris: Vuibert, 1927.
10. Ehrmann J.-P., van Lamoen F.  
*A projective generalization of the Droz-Farny line theorem.*  
// Forum Geom. 2004. № 4. P. 225–227.
11. Заславский А. А., Челноков Г. Р.  
*Теорема Понселе в евклидовой и алгебраической геометрии.*  
// Математическое образование №4 (19), 2001.
12. Прасолов В. В.  
*Точки Брокара.*  
// Рассказы о числах, многочленах и фигурах. М.: Фазис, 1997.

В книге использованы шрифты гарнитуры Школьная фирмы ParaType.

Эскизы иллюстраций выполнены А. В. Акопяном в свободно распространяемой программе Kig (KDE Interactive Geometry). При подготовке издания они были перерисованы в программе MetaPost.

*А. В. Акопян*  
*А. А. Заславский*

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА  
КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Технический редактор *В. Ю. Радионов*  
Редактор *Е. Ю. Бунькова*  
Корректор *О. А. Васильева*

Подписано в печать 27.06.2011. Тираж 1000 экз.

Издательство Московского центра  
непрерывного математического образования  
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11  
Тел. (499) 241-74-83

Отпечатано с готовых диапозитивов  
в ППП «Типография „Наука“»  
121099, Москва, Шубинский пер., 6