

# Контактные числа, коды и сферические многочлены

А. В. Акопян\*

Г. А. Кабатянский†

О. Р. Мусин‡

## 1 Введение

В этой статье мы расскажем об одной интересной геометрической задаче с более чем трехсотлетней историей, где первые результаты стали появляться сравнительно недавно. Зададимся следующим вопросом:

*какое максимальное число шаров одинакового радиуса можно расположить в  $n$ -мерном пространстве так, чтобы все они касались («были в контакте») одного (центрального) шара такого же радиуса?*

Соответствующее число шаров называется *контактным числом*  $\tau(n)$   $n$ -мерного евклидова пространства. Из рисунка 1 очевидно, что  $\tau(2) = 6$ .

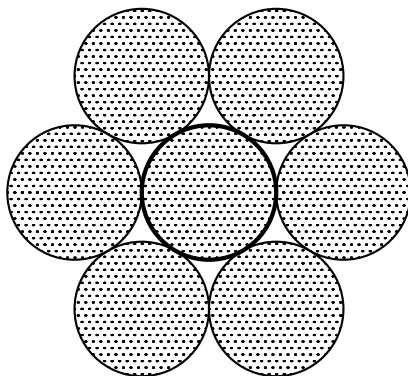


Рис. 1

Поместим для простоты центр центрального шара в точку  $0$ . Обозначим  $A_1, \dots, A_L$  точки (векторы) касания шарами центрального шара. Тогда угол между любыми двумя векторами  $A_i$  и  $A_j$  не меньше  $\pi/3$  и очевидно, что наша задача эквивалентна нахождению максимального числа точек на сфере в  $n$ -мерном пространстве с попарными углами не меньше  $60^\circ$ . Отметим, что такое множество точек называется *сферическим кодом* с угловым расстоянием  $60^\circ$ . Похожий объект под названием «двоичные коды с исправлением ошибок» также будет рассматриваться в нашей статье.

Чему равно  $\tau(3)$ : 12 или 13, было предметом спора в 1694 году между сэром Ньютоном и сэром Грегори (пример расположения 12 шаров привести несложно, в этом случае центры шаров можно поместить в вершины икосаэдра подходящего размера). Ньютон оказался прав, и  $\tau(3) = 12$ , но первое доказательство этого факта появилось лишь в середине XX века [19]. Отметим, что полное

\*Работа выполнена при частичной поддержке фонда «Династия», грантов РФФИ 10-01-00096 и 11-01-00735 и гранта Правительства РФ №11.G34.31.0053.

†Работа выполнена при частичной поддержке гранта 11-01-00735 и гранта Правительства РФ №11.G34.31.0073.

‡Работа выполнена при частичной поддержке гранта 11-01-00735 и гранта Правительства РФ №11.G34.31.0053.

элементарное доказательство этого факта было найдено сравнительно недавно. Его можно найти в статье [7], опубликованной в предыдущем выпуске этого сборника.

Никаких других значений  $\tau(n)$  не было известно до 1979 года, когда с помощью неожиданного для геометрии метода, придуманного незадолго до этого Ф. Дельсартом [3], удалось доказать, что  $\tau(8) = 240$  и  $\tau(24) = 196560$ . Этот замечательный результат был получен В. И. Левенштейном [6] и независимо от него А. Одлыжко и Н. Слоэном [17]. На самом деле, уже было известно, что  $\tau(8) \geq 240$  и  $\tau(24) \geq 196560$  благодаря двум замечательным решеткам:  $E_8$  и  $\Lambda_{24}$ , у которых число «соседей» равнялось в точности этим значениям. Трудность состояла в доказательстве, что большего числа шаров разместить нельзя.

Следующим, и на сегодня последним, известным значением  $\tau(n)$ , стало ожидаемое равенство  $\tau(4) = 24$ , которое удалось доказать одному из авторов этой статьи, см. [16]. Для доказательства этого результата понадобилось модифицировать метод Дельсарта.

Метод Дельсарта позволяет получать верхние оценки (оценки несуществования) для многих других дискретных задач. В частности, сам метод был придуман Дельсартом для получения верхних оценок на мощность кодов, исправляющих ошибки. Эти идеи также нашли применение в других задачах об оптимальных расположениях точек на сфере, в частности, в задаче о конфигурации электронов с минимальной энергией, см. [12] или более простое изложение в [1].

В этой статье мы расскажем об оптимальных расположениях точек на сфере, решетках в евклидовых пространствах и кодах с исправлением ошибок и о том, как эти задачи связаны между собой и как к ним применять метод Дельсарта.

## 2 Коды и решетки

Как мы уже упоминали выше, есть две замечательные решетки:  $E_8$  в 8-мерном пространстве и  $\Lambda_{24}$  в 24-мерном пространстве, число касаний для которых равно 240 и 196560, соответственно. Наиболее простой путь описать эти решетки лежит, на наш взгляд, через *теорию кодирования*. Теория кодирования или теория кодов, исправляющих ошибки, ведет свой отсчет от опубликованной 60 лет назад работы Р. Хэмминга [13], в которой были построены коды, исправляющие одиночные ошибки. С математической точки зрения основная часть теории кодирования может рассматриваться как теория упаковок одного класса дискретных метрических пространств, называемых пространствами Хэмминга, которые мы сейчас и определим.

Зададим на множестве  $\mathcal{B}^n$  всех *двоичных* слов (векторов) длины  $n$  из алфавита  $\{0, 1\}$  расстояние Хэмминга  $d_H$  как число позиций, в которых два слова различаются. Т. е. для двух произвольных двоичных слов  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$  и  $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$  из  $\mathcal{B}^n$  расстояние Хэмминга между ними равно  $d_H(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{i=1}^n |a_i - b_i|$ . Расстояние от нулевого слова  $\mathbf{0}$  до слова  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ , равное числу единиц среди координат  $a_i$ , называется весом Хэмминга слова  $\mathbf{a}$  и обозначается  $wt(\mathbf{a})$ .

Почему  $d_H(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  это метрика, Т. е. почему выполнена аксиома треугольника (две другие аксиомы очевидны)? Определим на  $\mathcal{B}^n$  структуру графа, связав вершины  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  ребром, если они различаются ровно в одной позиции, Т. е. если  $d_H(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 1$ . Легко видеть, что  $d_H(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  — это длина кратчайшего пути в этом графе, а для длины кратчайшего пути в графе аксиома треугольника, очевидно, выполнена.

Обозначим через

$$S(n, t)(\mathbf{a}) = \{\mathbf{x} \in \mathcal{B}^n : d_H(\mathbf{x}, \mathbf{a}) \leq t\}$$

шар радиуса  $t$  в пространстве Хэмминга  $\mathcal{B}^n$  с центром в точке (слове)  $\mathbf{a}$ . Его мощность очевидно

$$\text{равна } S(n, t) = \sum_{i=0}^t \binom{n}{i}.$$

Подмножество  $C$  пространства Хэмминга  $\mathcal{B}^n$  называется *упаковкой шарами радиуса  $t$* , если шары радиуса  $t$  с центрами в точках  $C$  не пересекаются.

Если точки (слова) упаковки  $C \subset \mathcal{B}^n$  использовать для передачи сообщений по каналу связи, в котором при передаче  $n$  символов происходит не более  $t$  ошибок, то на приемной стороне возможно однозначное восстановление (*декодирование*) переданного сообщения, так как шары радиуса  $t$  с центрами в разных кодовых словах не пересекаются. По этой причине упаковка шарами радиуса  $t$  также называется *двоичным кодом длины  $n$ , исправляющим  $t$  ошибок*. Расстояние  $d(C)$  кода  $C$  определяется как минимальное из попарных расстояний между его словами

$$d(C) = \min_{\mathbf{c} \neq \mathbf{c}' \in C} d(\mathbf{c}, \mathbf{c}'), \quad (1)$$

и код  $C$  является упаковкой шарами радиуса  $t$ , Т. е. исправляет  $t$  ошибок, если и только если  $d(C) \geq 2t + 1$ .

Всюду ниже код — это синоним подмножества пространства Хэмминга. Для кода  $C$  с исправлением  $t$  ошибок, Т. е. для упаковки шарами радиуса  $t$ , определим плотность упаковки  $\mu(C, t)$  как долю всего пространства  $\mathcal{B}^n$ , покрываемую шарами с центрами в  $C$ , Т. е.

$$\mu(C, t) = \frac{|C|S(n, t)}{2^n}.$$

Очевидно, что плотность упаковки (кода) не более 1, Т. е. для мощности произвольного кода  $C$  с исправлением  $t$  ошибок справедливо ограничение

$$|C| \leq \frac{2^n}{S(n, t)},$$

называемое границей Хэмминга.

Коды, достигающие границу Хэмминга, называются *совершенными* — они плотно, «без дыр» заполняют все пространство Хэмминга. Р. Хэмминг построил совершенные коды, исправляющие одиночные ошибки — при длине  $n = 2^r - 1$  они имеют мощность  $2^{n-r}$ , где  $r = 2, 3, \dots$ . Тогда же, на заре теории кодирования (конец 1940-х), были построены два совершенных кода: двоичный код Голея длины 23, исправляющий три ошибки, и троичный (Т. е. над алфавитом  $\{-1, 0, 1\}$ ) код Голея длины 11, исправляющий две ошибки. Одним из самых замечательных результатов теории кодирования является доказанная в начале 70-х годов XX века гипотеза, что других совершенных кодов, исправляющих  $t$  ошибок, при  $t > 1$  не существует, см. [8].

Неудивительно, что для построения оптимальных расположений точек на сфере нам понадобятся именно совершенные двоичные коды. Начнем с кодов Хэмминга. Код Хэмминга длины 7 (самый простой и самый известный из кодов) задается как множество решений системы линейных уравнений

$$\begin{aligned} x_1 \oplus x_3 \oplus x_5 \oplus x_7 &= 0, \\ x_2 \oplus x_3 \oplus x_6 \oplus x_7 &= 0, \\ x_4 \oplus x_5 \oplus x_6 \oplus x_7 &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $x_i \in \mathbb{Z}_2$  и  $\oplus$  означает сложение по модулю 2. Легко увидеть закон, по которому выбраны коэффициенты этой системы. А именно, коэффициент при  $x_j$  в  $i$ -м уравнении равен коэффициенту при  $2^{i-1}$  в двоичном разложении числа  $j$ . Также легко видеть, что у этой системы есть 16 решений. Действительно, перепишем систему в виде

$$\begin{aligned} x_1 &= x_3 \oplus x_5 \oplus x_7, \\ x_2 &= x_3 \oplus x_6 \oplus x_7, \\ x_4 &= x_5 \oplus x_6 \oplus x_7. \end{aligned}$$

Переменные  $x_3, x_5, x_6$  и  $x_7$  можно выбрать произвольно (так называемые информационные символы), и через них однозначно определятся остальные переменные  $x_1, x_2$  и  $x_4$  (так называемые проверочные символы).

Итак, мы описали знаменитый  $(7, 4)$ -код Хэмминга. Здесь 7 означает размерность пространства, называемую длиной кода, а 4 — число информационных символов. Проверим, что множество решений этой системы является кодом с расстоянием 3, Т. е. упаковкой шарами радиуса 1 или, что тоже самое, кодом с исправлением одиночных ошибок. Заметим, что любое ненулевое решение системы должно иметь как минимум три единицы среди своих координат, потому что иначе найдется уравнение из (2), в котором присутствует только одна из этих единиц (столбцы коэффициентов при различных переменных различны и отличны от нулевого столбца). Пусть теперь  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_7)$  и  $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_7)$  — два произвольных различных решения системы. Рассмотрим вектор  $\mathbf{a} \oplus \mathbf{b} = (a_1 \oplus b_1, \dots, a_7 \oplus b_7)$ . Число единиц в нем и есть расстояние Хэмминга между векторами  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , а так как он также является решением системы, то в нем не менее трех единиц, что и требовалось доказать. Отметим, что код  $C$  со свойством, что вместе с двумя любыми векторами  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  из кода их сумма  $\mathbf{a} \oplus \mathbf{b}$  также принадлежит коду, называется *групповым* (или *линейным*) кодом.

Сопоставим произвольному двоичному вектору  $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)$  вектор  $\hat{\mathbf{c}} = (c_1, \dots, c_{n+1})$ , где  $c_{n+1} = c_1 \oplus \dots \oplus c_n$ . Такая операция называется 1-удлинением с помощью общей проверки на четность. Ясно, что применение этой операции к произвольному линейному коду с нечетным расстоянием  $2t + 1$  приводит к линейному коду с той же мощностью, но на единицу большими расстоянием и длиной. И на самом деле нам будет нужен не сам  $(7, 4)$ -код Хэмминга, а его 1-удлинение, Т. е.  $(8, 4)$ -код с расстоянием 4 (также называемый кодом Хэмминга). Кроме того, нам понадобится тот факт, что у нулевого вектора в  $(8, 4)$ -коде имеется ровно 14 «соседей», Т. е. в коде имеется 14 кодовых слов веса 4.

**Упражнение 1.** Докажите это (подсказка — этот код групповой, и в нем есть вектор  $\mathbf{1}$  из всех единиц).

*Решеткой*  $\mathbb{L}$  в  $n$ -мерном евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^n$  называется дискретная подгруппа этого пространства, Т. е. для любых двух векторов решетки их сумма и разность также является векторами решетки. Простейшей решеткой является целочисленная решетка  $\mathbb{Z}^n$ , состоящая из всех точек с целочисленными координатами. Легко показать, что любая решетка имеет базис (и не один), Т. е. набор линейно независимых векторов  $\mathbf{v}^{(1)}, \dots, \mathbf{v}^{(k)}$  таких, что любой вектор решетки  $\mathbf{v}$  представим в виде их целочисленной комбинации, Т. е.  $\mathbf{v} = a_1 \mathbf{v}^{(1)} + \dots + a_k \mathbf{v}^{(k)}$ , где  $a_1, \dots, a_k$  — целые числа, а число  $k$  называется рангом решетки. Определим для решетки  $\mathbb{L}$  ее минимальное расстояние  $d(\mathbb{L})$  (аналогично тому, как это было сделано для кода, см. (1))

$$d(\mathbb{L}) = \min_{\mathbf{v} \neq \mathbf{v}' \in \mathbb{L}} d(\mathbf{v}, \mathbf{v}').$$

С каждой решеткой связано соответствующее число касаний. «Соседями» точки  $\mathbf{v} \in \mathbb{L}$  называются точки решетки  $\mathbb{L}$ , которые находятся на расстоянии  $d(\mathbb{L})$  от  $\mathbf{v}$ . Число соседей не зависит от выбора точки  $\mathbf{v}$  и обозначается  $\tau(\mathbb{L})$ , так как, поместив в точку  $\mathbf{v}$  и ее соседей шары радиуса  $d(\mathbb{L})/2$ , мы получим  $\tau(\mathbb{L})$  шаров, касающихся центрального шара. Например, для решетки  $\mathbb{Z}^n$  ее расстояние равно 1, а число касаний  $2n$ , что меньше  $\tau(n)$  для всех  $n \geq 2$ . Более того, известно, что  $\tau(n)$  при больших  $n$  растет экспоненциально, а именно (см. [4])

$$(1.15470 \dots)^{n(1+o(1))} \leq \tau(n) \leq (1.32042 \dots)^{n(1+o(1))}$$

Сопоставим теперь двоичному линейному коду  $C$  длины  $n$  решетку  $\mathbb{L}_C$  в  $\mathbb{R}^n$

$$\mathbb{L}_C = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n : (x_1 \bmod 2, \dots, x_n \bmod 2) \in C\}.$$

Расстояние этой решетки равно  $\min\{2, \sqrt{d}\}$ , где  $d = d_H(C)$  — это расстояние кода  $C$ . В случае  $d = 4$  соседи нулевого вектора в этой решетке это векторы, у которых все координаты равны 0, кроме одной, равной  $\pm 2$ , и векторы, полученные из векторов кода  $C$  веса 4, в которых «двоичные»

1 заменены на  $\pm 1$ . Итого имеем  $2n + 2^d A_d$  соседей, где  $A_d$  — это число слов минимального веса в коде  $C$ . Наконец, возьмем в качестве  $C$  описанный выше  $(8, 4)$  код Хэмминга с  $d = 4$  и  $A_d = 14$ . Получаемая решетка известна как решетка  $E_8$  и число соседей у нее равно  $2 \times 8 + 2^4 \times 14 = 240$ , что и хотелось получить!

Для построения решетки Лича нам понадобится 1-удлиненный код Голея (обозначается  $\mathbb{G}_{24}$ ). Это двоичный линейный код длины 24 с расстоянием 8, состоящий из  $2^{12}$  слов (среди них есть и вектор  $\mathbf{1}$ ), из которых 759 слов веса 8. Эти слова веса 8 образуют замечательную комбинаторную конфигурацию, называемую системой Штейнера  $S(5, 8, 24)$ . А именно, для любых 5-и позиций из 24-х найдется и ровно одно кодовое слово веса 8, имеющее единицы на этих позициях (заметим, что слова минимального веса в  $(8, 4)$ -коде Хэмминга, образуют  $S(3, 4, 8)$ ). Решетку  $\mathbb{L}_{\mathbb{G}_{24}}$  в  $\mathbb{R}^{24}$ , построенную на коде  $\mathbb{G}_{24}$ , разобьем на две подрешетки  $\mathbb{L}^0 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{L}_{\mathbb{G}_{24}} : x_1 + \dots + x_n = 0 \pmod{4}\}$  и  $\mathbb{L}^1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{L}_{\mathbb{G}_{24}} : x_1 + \dots + x_n = 2 \pmod{4}\}$ . Тогда решетка Лича  $\Lambda_{24} = 2\mathbb{L}^0 \cup \{\mathbf{1} + 2\mathbb{L}^1\}$ .

К сожалению, ни одно из многочисленных описаний кода Голея и решетки Лича не позволяет просто, т. е. в рамках данной статьи, получить их основные свойства, в том числе, подсчитать соответствующее контактное число, равное 196560. Поэтому мы отсылаем заинтересовавшегося читателя к книге [5].

### 3 Рецепт

В этой части, мы покажем как работает метод Дельсарта в наиболее общем случае.

Нам понадобятся *положительно определенные функции*.

**Определение 1.** Пусть  $\mathcal{M}$  — метрическое пространство с функцией расстояния  $\tau(x, y)$ . Функция  $g(\tau)$  (определенная на множестве всех расстояний  $\mathcal{M}$ ), называется *положительно определенной* на  $\mathcal{M}$ , если для любого набора точек  $x_1, x_2, \dots, x_N$  и любых чисел  $u_1, u_2, \dots, u_N$  выполнено:

$$\sum_{i,j=1}^N g(\tau(x_i, x_j)) u_i u_j \geq 0. \quad (3)$$

Иногда удобно рассматривать «непрерывный» вариант этого определения. То есть, потребовать, чтобы для любой непрерывной функции  $u(x)$  и меры  $\mu$  на  $\mathcal{M}$

$$\iint g(\tau(x, y)) u(x) u(y) d\mu_x d\mu_y \geq 0.$$

Легко видеть, что если  $g_1(t)$  и  $g_2(t)$  — положительно определенные функции, то  $c_1 g_1(t) + c_2 g_2(t)$  — положительно определенная функция для любых  $c_1, c_2 \geq 0$ . Из леммы Шура ([9, задача 7.35]) следует, что и произведение двух положительно определенных функций также положительно определенная функция. Но нам это не понадобится в дальнейшем.

**Пример 1.** Если в качестве метрического пространства взять единичную окружность  $\mathcal{S}^1$  с угловым расстоянием, то примерами положительно определенной функции могут служить функции  $\cos kt$ , где  $k \in \mathbb{N}$ . В разделе 5 мы дадим ясное объяснение этому факту. Оказывается, что любая положительно определенная функция на окружности является линейной комбинацией с неотрицательными коэффициентами этих функций, а также функции, тождественно равной единице на всей окружности.

Теперь перейдем к самому трюку. Пусть нам удалось найти такие положительно определенную функцию  $g(t)$  на пространстве  $\mathcal{M}$  и число  $c > 0$ , что для функции  $f(t) = g(t) + c$ , выполнено следующее

$$\begin{aligned} f(0) &= 1, \\ f(t) &\leq 0, \text{ при всех } t \geq d. \end{aligned}$$

Рассмотрим набор точек  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  в  $\mathcal{M}$  таких, что расстояния между любыми двумя точками не меньше  $d$ . Давайте оценим сверху максимально возможное количество точек  $N$ . Для этого оценим сумму  $\sum_{i,j=1}^N f(\tau(x_i, x_j))$  двумя способами.

С одной стороны

$$\sum_{i,j=1}^N f(\tau(x_i, x_j)) = \sum_{i,j=1}^N g(\tau(x_i, x_j)) + cN^2 \geq cN^2, \quad (4)$$

поскольку функция  $g(t)$  положительно определена.

С другой стороны

$$\sum_{i,j=1}^N f(\tau(x_i, x_j)) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N f(\tau(x_i, x_j)) + \sum_{i=1}^N f(0) \leq N, \quad (5)$$

поскольку расстояние между любыми двумя точками  $x_i$  и  $x_j$  больше  $d$ , а значит  $f(\tau(x_i, x_j)) \leq 0$ .

Объединяя эти два неравенства, мы получаем, что  $N \leq c^{-1}$ . Таким образом, нам удалось оценить возможное количество точек в  $\mathcal{M}$  на расстоянии  $d$  друг от друга. Несмотря на то, что данный план выглядит чересчур абстрактным, он действительно работает, что мы и продемонстрируем в последующих разделах.

## 4 Многочлены Гегенбауэра

И. Шонберг в [18] нашел все положительно определенные функции на сфере. Оказывается, что любая п. о. ф. является линейной комбинацией с неотрицательными коэффициентами многочленов Гегенбауэра (от косинусов углов между точками). Многочлены Гегенбауэра можно определить разными способами. Например, рекуррентно

$$\begin{aligned} G_0^{(n)}(x) &= 1, \quad G_1^{(n)}(x) = x, \quad G_2^{(n)}(x) = \frac{nx^2 - 1}{n-1}, \quad \dots, \\ G_k^{(n)}(x) &= \frac{(2k+n-4)xG_{k-1}^{(n)}(x) - (k-1)G_{k-2}^{(n)}(x)}{k+n-3}. \end{aligned} \quad (6)$$

Данные формулы выглядят достаточно непонятными. Геометрический смысл многочленов Гегенбауэра мы объясним в разделе 5. Отметим лишь, что верхний индекс обозначает размерность, которой соответствует данный многочлен. В частности,  $G_k^{(2)}(\cos t) = \cos kt$ . Так, утверждение из примера 1 обобщается следующим образом.

**Теорема 1** (И. Я. Шонберг [18]). *Функции имеющие вид*

$$g(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i G_i^{(n)}(\cos t), \quad a_i \geq 0,$$

*являются положительно определенными функциями на сфере.*

*Обратное тоже верно, любая положительно определенная функция на сфере представляется в таком виде.*

К сожалению, все доказательства данной теоремы либо слишком длинные, для того чтобы приводить их здесь полностью, либо используют дополнительные идеи и понятия, которые тоже выходят за пределы освещаемой в статье темы. Хотя в следующем разделе мы попытаемся несколько осветить происходящее с точки зрения гармонического анализа.

Сейчас же приведем здесь доказательство первой (нужной нам) части теоремы 1, использующее так называемую *теорему о сложении*. Доказательство этой теоремы достаточно длинно, но поскольку в дальнейшем нам понадобится положительная определенность не всех многочленов Гегенбауэра, а только некоторых из них, то корректность соответствующих формул можно (теоретически) проверить вручную или на компьютере (практически). Почти все современные математические пакеты, предоставляющие возможность работать с символьными выражениями (MATLAB, Mathematica, Maxima), имеют встроенные библиотеки позволяющие манипулировать стандартными многочленами, в частности с многочленами Гегенбауэра. Итак, сформулируем теорему о сложении.

**Теорема 2** (теорема о сложении).

$$\begin{aligned} G_k^{(n)}(\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \varphi) &= \\ &= \sum_{s=0}^k m_{n,k,s} G_{k-s}^{(n+2s)}(\cos \theta_1) G_{k-s}^{(n+2s)}(\cos \theta_2) (\sin \theta_1)^s (\sin \theta_2)^s G_s^{(n-1)}(\cos \varphi), \end{aligned} \quad (7)$$

где  $m_{n,k,s}$  — некоторые положительные коэффициенты.

*Доказательство первой части теоремы 1.* Доказательство будем проводить индукцией по размерности многочленов Гегенбауэра. Как мы уже упоминали в начале этого раздела,  $G_k^{(2)}(\cos t) = \cos kt$ , что есть положительно определенная функция. Поэтому базу индукции можно считать доказанной.

Пусть точки  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , располагаются на сфере  $\mathcal{S}^n$ , а  $z$  — это отмеченная точка на этой сфере, которую мы будем называть *северным полюсом*. Обозначим через  $\theta_i$  величину большой дуги, соединяющей  $x_i$  и  $z$  (то есть расстояние между этими двумя точками). Если  $\varphi_{ij}$  — угол при вершине  $z$  в сферическом треугольнике  $zx_i x_j$ , а  $x_{ij}$  — величина дуги  $x_i x_j$ , то сферическая теорема косинусов говорит нам следующее:

$$\cos x_{ij} = \cos \theta_i \cos \theta_j + \sin \theta_i \sin \theta_j \cos \varphi_{ij}. \quad (8)$$

Объединим выражения (7) и (8) и получим:

$$\begin{aligned} G_k^{(n)}(\cos x_{ij}) u_i u_j &= G_k^{(n)}(\cos \theta_i \cos \theta_j + \sin \theta_i \sin \theta_j \cos \varphi_{ij}) u_i u_j = \\ &= \sum_{s=0}^k m_{n,k,s} G_{k-s}^{(n+2s)}(\cos \theta_i) G_{k-s}^{(n+2s)}(\cos \theta_j) (\sin \theta_i)^s (\sin \theta_j)^s u_i u_j \cdot \\ &\quad \cdot G_s^{(n-1)}(\cos \varphi_{ij}) = \\ &= \sum_{s=0}^k m_{n,k,s} w_i^{(s)} w_j^{(s)} G_s^{(n-1)}(\cos \varphi_{ij}), \end{aligned}$$

где  $w_i^{(s)} = u_i G_{k-s}^{(n+2s)}(\cos \theta_i) (\sin \theta_i)^s$ . Теперь просуммируем данное выражение по всем парам точек

$$\sum_{i,j=0}^N G_k^{(n)}(\cos x_{ij}) u_i u_j = \sum_{s=0}^k m_{n,k,s} \sum_{i,j=0}^N w_i^{(s)} w_j^{(s)} G_s^{(n-1)}(\cos \varphi_{ij}). \quad (9)$$

Отметим, что  $\varphi_{ij}$  можно интерпретировать как расстояние между проекциями точек  $x_i$  и  $x_j$  на экватор, соответствующий точке  $z$ . Поэтому, в силу положительной определенности многочленов Гегенбауэра размерности  $n-1$ ,

$$\sum_{i,j=0}^N w_i^{(s)} w_j^{(s)} G_s^{(n-1)}(\cos \varphi_{ij}) \geq 0.$$

Пользуясь этим и тем, что коэффициенты  $m_{m,k,s} > 0$ , получаем из (9)

$$\sum_{i,j=0}^N G_k^{(n)}(\cos x_{ij}) u_i u_j = \sum_{s=0}^k m_{n,k,s} \sum_{i,j=0}^N w_i^{(s)} w_j^{(s)} G_s^{(n-1)}(\cos \varphi_{ij}) \geq 0.$$

□

## 5 Сферические функции

В этой части мы попытаемся коротко объяснить «природу» многочленов Гегенбауэра. Все утверждения этого раздела мы оставим без доказательств. Заинтересовавшийся читатель, не знакомый с этой областью, может обратиться к [2, 10] или другим книгам за более подробными объяснениями.

Физикам хорошо известны *гармонические функции*, то есть функции, оператор Лапласа от которых тождественно равен нулю. Нас будут интересовать однородные гармонические многочлены  $S(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Размерность пространства однородных гармонических многочленов степени  $k$  от  $n$  переменных равна  $c_{k,n} = \binom{n+k-2}{k} + \binom{n+k-3}{k-1}$ .

Рассмотрим гильбертово пространство измеримых функций  $L^2(\mathcal{S}^{n-1})$  со стандартным скалярным произведением:

$$\langle f, g \rangle = \int f(x)g(x) d\omega_x.$$

Оказывается, любые два однородных гармонических многочлена разной степени ортогональны. Однородные многочлены одинаковой степени, конечно, ортогональными быть не обязаны.

Выберем ортонормированный базис  $S_{k,l}$ ,  $l = 1, \dots, c_{k,n}$ , в пространстве гармонических многочленов степени  $k$ . Можно показать, что объединение этих базисов по всем  $k$  будет полным базисом в  $L^2(\mathcal{S}^{n-1})$ . Именно на этом основано доказательство второй части теоремы 1.

Рассмотрим отображение  $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{c_{k,n}}$ , определенное следующим образом:

$$\phi_k^{(n)}(x) = (S_{k,1}(x), S_{k,2}(x), \dots, S_{k,c_{k,n}}(x)).$$

Отображение  $\phi$  переводит единичную сферу в  $\mathcal{S}^{n-1}$  в некоторое множество, лежащее на сфере (не единичной) в пространстве  $\mathbb{R}^{c_{k,n}}$ .

Ключевым свойством данного отображения является то, что расстояние между образами любых двух точек  $x, y \in \mathcal{S}^{n-1}$  зависит только от самого расстояния между ними. Таким образом, мы можем выразить скалярное произведение от векторов из образа  $\phi_k^{(n)}(x)(\mathcal{S}^{n-1})$  через скалярное произведение в самом пространстве  $\mathbb{R}^n$ .

Многочлены Гегенбауэра — это и есть (нормированное) скалярное произведение в пространстве  $\mathbb{R}^{c_{k,n}}$ :

$$G_k^n(\langle x, y \rangle) = \frac{\text{area}(\mathcal{S}^{n-1})}{c_{k,n}} \sum_{l=1}^{c_{k,n}} S_{k,l}(x) S_{k,l}(y).$$

Из последней формулы положительная определенность функций  $G_k^n(\cos t)$  следует автоматически. Действительно, значение суммы из левой части неравенства (3) будет равно квадрату длины вектора  $\sum x_i \phi(x_i)$ , умноженной на соответствующий нормирующий коэффициент.

*Доказательство.* Пример 2 (продолжение примера 1) Однородные гармонические многочлены от двух переменных степени  $k$  являются линейной комбинацией двух следующих многочленов

$$\begin{aligned} S_{k,1}(x, y) &= \Re(x + iy)^k, \\ S_{k,2}(x, y) &= \Im(x + iy)^k. \end{aligned}$$



Таким образом, отображение  $\phi_k^{(2)}(x)$  переводит точку из  $\mathcal{S}^1$  с координатами  $(\cos \alpha, \sin \alpha)$  в точку с координатами  $(\cos k\alpha, \sin k\alpha)$ . Поэтому, для любых двух точек  $x, y \in \mathcal{S}^1$ , величина дуги между которыми равна  $\gamma$ , мы получаем

$$\langle \phi_k^{(2)}(x), \phi_k^{(2)}(y) \rangle = \cos k\gamma.$$

Получаем ровно то, что и обещали,  $G_k^{(2)}(\cos x) = \cos kx$ . □

## 6 От теории к практике

В этом разделе мы покажем как работает метод Дельсарта на конкретных примерах. Мы докажем, что  $\tau(8) = 240$  и  $\tau(24) = 196560$ . Кроме того, покажем, что среди  $2n + 1$  векторов в  $\mathbb{R}^n$  найдутся два, угол между которыми острый.

Для начала сформулируем результат раздела 3 (соотношения (4) и (5)) в виде следующей леммы (где  $x = \cos t$ ).

**Лемма 3.** Пусть,

$$f(x) = c_0 + c_1 G_1^n(x) + \dots + c_k G_k^n(x),$$

где  $c_0 > 0$  и  $c_i \geq 0$ , при  $i \geq 1$ . Если  $f(1) = 1$  и  $f(x) \leq 0$  при  $x < \cos \varphi$ , то на единичной сфере  $\mathcal{S}^{n-1}$  нельзя расположить более чем  $c_0^{-1}$  точек, расстояния между которыми не меньше  $\varphi$ .

Начнем с последней задачи, обозначенной в начале этого раздела. Сопоставим каждому вектору точку на единичной сфере, соответствующую направлению этого вектора. Рассмотрим многочлен  $P(x) = \frac{1}{2}(x^2 + x)$ . Данный многочлен неположительный на отрезке  $[-1, 0]$  и обнуляется только в точках  $x = 0$  и  $x = -1$ . Если его представить как сумму многочленов Гегенбауэра  $G_k^{(n)}(x)$  (см. формулы (6)), получим:

$$P(x) = \frac{1}{2}(x^2 + x) = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2} G_1^{(1)}(x) + \frac{n-1}{2n} G_2^{(n)}(x),$$

$c_0 = \frac{1}{2n}$ . Таким образом, на единичной сфере в  $\mathbb{R}^n$  нельзя расположить более  $2n$  точек с попарными расстояниями не меньшими чем  $90^\circ$ . Кроме того, если посмотреть внимательнее на рассуждения в разделе 3, то можно заключить, что  $2n$  точек могут располагаться на сфере тогда и только тогда, когда косинус расстояния между ними равен либо 0, либо  $-1$ . Поэтому эти точки суть вершины правильного октаэдра<sup>1</sup>.

На самом деле, данная задача несложно решается и обычными геометрическими соображениями. Более того, если в пространстве  $\mathbb{R}^n$  выбрано  $k$  векторов, где  $n + 2 \leq k \leq 2n$ , то угол между какими-то двумя всегда будет не больше чем  $90^\circ$ . Причем конфигурации, когда между ними нет острых углов, несложно классифицировать, см. [14]. (Подумайте над тем, как расположить пять точек на двумерной сфере «оптимальным» образом).

Для других же двух задач геометрическое доказательство неизвестно, но они запросто решаются с помощью леммы 3.

Итак, если рассмотреть (предположительное) оптимальное расположение точек на семимерной сфере, то можно заметить, что расстояния между ними принимают следующие значения  $\{60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 180^\circ\}$ . Косинусы соответствующих углов равны  $1/2, 0, -1/2, -1$ . Поэтому многочлен для леммы 3 разумно выбрать таким, чтобы он обнулялся в этих значениях и только в них:

$$f(x) = \frac{4}{9} \left(x - \frac{1}{2}\right) x^2 \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 (x + 1).$$

<sup>1</sup>В больших размерностях это тело называют кроссполитопом.

Если разложить данный многочлен по многочленам Гегенбауэра, мы получим:

$$f(x) = \frac{1}{240} + \frac{1}{30}G_1^8(x) + \frac{5}{48}G_2^8(x) + \frac{13}{60}G_3^8(x) + \frac{133}{480}G_4^8(x) + \frac{1}{4}G_5^8(x) + \frac{11}{96}G_6^8(x).$$

Таким образом,  $f(x)$  удовлетворяет всем требованиям леммы 3: коэффициенты при разложении многочлена по многочленам Гегенбауэра положительные, а  $f(1) = 1$ . Получаем, что количество точек на сфере с попарными расстояниями не меньшими чем  $60^\circ$ , не превосходит  $c_0^{-1} = 240$ . Более того, если уж 240 точек как-то расположились, то набор расстояний между ними обязан принимать одно из следующих значений  $\{60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 180^\circ\}$ . Благодаря этому можно показать, что такое расположение 240 точек единственно с точностью до вращения.

Для  $\tau(24)$  аналогичный многочлен будет следующим

$$f(x) = \frac{128}{405}(x - \frac{1}{2})(x - \frac{1}{4})^2x^2(x + \frac{1}{4})^2(x + \frac{1}{2})^2(x + 1).$$

Вот его разложение по многочленам Гегенбауэра:

$$\begin{aligned} f(x) = & \frac{1}{196560} + \frac{1}{8190}G_1^{24}(x) + \frac{1219}{1028160}G_2^{24}(x) + \\ & + \frac{11569}{1909440}G_3^{24}(x) + \frac{249205}{10692864}G_4^{24}(x) + \frac{3289}{51408}G_5^{24}(x) + \\ & + \frac{376487}{2757888}G_6^{24}(x) + \frac{4439}{20672}G_7^{24}(x) + \frac{23345}{88128}G_8^{24}(x) + \\ & + \frac{3335}{15504}G_9^{24}(x) + \frac{20677}{279072}G_{10}^{24}(x). \end{aligned}$$

Как видим, все коэффициенты положительны,  $f(1) = 1$ , а  $c_0^{-1} = 196560$ .

## 7 Проблема 13 шаров

По всей видимости, с помощью метода Дельсарта можно решить проблему контактных чисел только в размерностях  $n = 2, 8, 24$ . Используя компьютер, Д. Штром [11] проверил этот метод для  $\tau(n)$  аж до размерности 161, и нигде не обнаружил таких замечательных равенств, как при  $n = 2, 8, 24$ .

В этом параграфе мы вкратце остановимся на геометрическом обобщении метода Дельсарта, которое позволяет решить проблемы 13 и 25 шаров, т. е. доказать, что  $\tau(3) = 12$  и  $\tau(4) = 24$ . Доказательства обоих равенств очень похожи, однако технически случай  $n = 4$  намного сложнее случая  $n = 3$ . Поэтому здесь мы разберем только план доказательства случая  $n = 3$ , опуская технические детали. Подробные доказательства для  $n = 3$  и  $n = 4$  можно найти в работах [15] и [16] соответственно.

При  $n = 3$  многочлены Гегенбауэра  $G_k^{(3)}$  являются *многочленами Лежандра*  $P_k$ , т. е.  $P_k = G_k^{(3)}$ . Эти многочлены можно определить как рекуррентно (см. (6)), так и по формуле Родригеса:

$$P_k(t) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dt^k} (t^2 - 1)^k.$$

Рассмотрим следующий многочлен:

$$f(t) = \frac{2431}{80}t^9 - \frac{1287}{20}t^7 + \frac{18333}{400}t^5 + \frac{343}{40}t^4 - \frac{83}{10}t^3 - \frac{213}{100}t^2 + \frac{t}{10} - \frac{1}{200}.$$

**Лемма 4.** Пусть  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\} \subset \mathcal{S}^2$ . Тогда

$$S(X) := \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N f(\cos(\phi_{i,j})) \geq N^2.$$

Здесь  $\phi_{i,j} = \text{dist}(x_i, x_j)$  обозначает сферическое (угловое) расстояние между  $x_i$  и  $x_j$ .

*Доказательство.* Разложим  $f$  по  $P_k$ :

$$f = \sum_{k=0}^9 c_k P_k = P_0 + \frac{8}{5}P_1 + \frac{87}{25}P_2 + \frac{33}{20}P_3 + \frac{49}{25}P_4 + \frac{1}{10}P_5 + \frac{8}{25}P_9.$$

Здесь  $c_0 = 1$ ,  $c_k \geq 0$ ,  $k = 1, 2, \dots, 9$ . По соотношению (4) получаем

$$S(X) = \sum_{k=0}^9 c_k \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N P_k(\cos(\phi_{i,j})) \geq \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_0 P_0 = N^2.$$

□

**Лемма 5.** Пусть  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$  — точки на  $\mathcal{S}^2$ , угловое расстояние  $\phi_{i,j}$  между различными  $x_i, x_j$  не меньше  $60^\circ$ . Тогда

$$S(X) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N f(\cos(\phi_{i,j})) < 13N.$$

Сначала покажем как доказывать главную теорему.

**Теорема 6.**  $\tau(3) = 12$ .

*Доказательство.* Предположим, что  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$  — такое расположение точек на  $\mathcal{S}^2$ , при котором  $N = \tau(3)$ . Тогда  $X$  удовлетворяет предположениям в леммах. Стало быть,  $N^2 \leq S(X) < 13N$ . Отсюда  $N < 13$ , т. е.  $N \leq 12$ . С другой стороны, мы знаем, что  $\tau(3) \geq 12$ , т. е.  $N = \tau(3) = 12$ . □

*Доказательство.* План доказательства леммы 5 **1**. Многочлен  $f(t)$  для  $t_0 \approx 0.5907$  удовлетворяет следующим свойствам (см. рис. 2):

- (i)  $f(t)$  — монотонно убывающая функция на отрезке  $[-1, -t_0]$ .
- (ii)  $f(t) < 0$  при  $t \in (-t_0, 1/2]$  и  $f(-t_0) = 0$ .

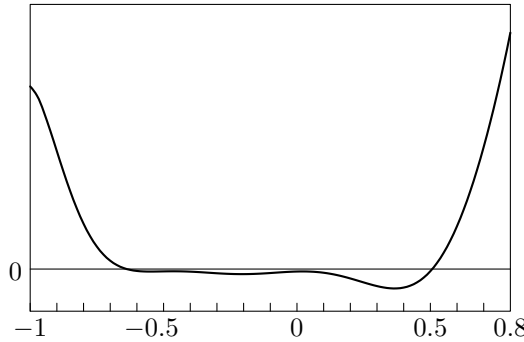


Рис. 2 График функции  $f(t)$ .

Пусть  $S_i(X) := \sum_{j=1}^N f(\cos(\phi_{i,j}))$ , тогда  $S(X) = \sum_{i=1}^N S_i(X)$ . Покажем, что  $S_i(X) < 13$  при  $i = 1, 2, \dots, N$ , отсюда будет следовать, что  $S(X) < 13N$ .

Поскольку  $\phi_{i,i} = 0$ , то  $f(\cos \phi_{i,i}) = f(1)$ . По условию  $\phi_{i,j} \geq 60^\circ$ ,  $i \neq j$ , и получаем, что  $\cos \phi_{i,j} \leq 1/2$  и  $\cos \phi_{i,j}$  лежит на отрезке  $[-1, 1/2]$ . Из (ii) следует, что  $f(\cos \phi_{i,j}) \leq 0$  при  $\cos \phi_{i,j} \in [-t_0, 1/2]$ . Обозначим  $J(i) := \{j : \cos \phi_{i,j} \in [-1, -t_0]\}$ . Мы получили неравенство

$$S_i(X) \leq T_i(X) := f(1) + \sum_{j \in J(i)} f(\cos \phi_{i,j}).$$

Пусть  $\theta_0 = \arccos t_0 \approx 53.794^\circ$ . Тогда  $j \in J(i)$ , если и только если  $\phi_{i,j} > 180^\circ - \theta_0$ , т. е.  $\theta_j < \theta_0$ , где  $\theta_j = 180^\circ - \phi_{i,j}$ . Другими словами, все  $x_{i,j}$ ,  $j \in J(i)$ , лежат внутри сферической шапочки с центром  $e_0$  радиуса  $\theta_0$ , где  $e_0 = -x_i$  является антиподом точки  $x_i$ .

**2.** Рассмотрим теперь на  $\mathcal{S}^2$  такие точки  $e_0, y_1, \dots, y_m$ , что

$$\phi_{i,j} := \text{dist}(y_i, y_j) \geq 60^\circ, \quad \forall i \neq j, \quad \theta_i := \text{dist}(e_0, y_i) < \theta_0. \quad (10)$$

Обозначим через  $\mu$  наибольшую величину  $m$  такую, что неравенства в (10) определяют непустое множество точек  $y_1, \dots, y_m$ .

Предположим, что  $0 \leq m \leq \mu$  и  $Y = \{y_1, \dots, y_m\}$  удовлетворяют (10). Введем обозначения:

$$H(Y) = H(y_1, \dots, y_m) := f(1) + f(-\cos \theta_1) + \dots + f(-\cos \theta_m),$$

$$h_m := \sup_{Y: |Y|=m} \{H(Y)\}, \quad h_{max} := \max \{h_0, h_1, \dots, h_\mu\}.$$

По определению,  $T_i(X) \leq h_m$ , где  $m = |J(i)|$ , и, следовательно,  $S_i(X) \leq h_m$ . Таким образом, если мы докажем неравенство  $h_{max} < 13$ , то мы докажем и лемму.

**3.** Теперь покажем, что  $\mu \leq 4$ .

Предположим, что  $Y = \{y_1, \dots, y_m\} \subset \mathcal{S}^2$  удовлетворяет (10). Можно считать, что  $e_0$  — северный полюс на сфере и у  $y_j$  сферические координаты  $(\theta_j, \varphi_j)$ . Заметим, что  $\theta_i > 0$  при  $m \geq 2$ . В противном случае расстояние от  $y_j$  до всех точек шапочки будет меньше  $60^\circ$ , а значит в ней не могут находиться точки из  $J(j)$ . Тогда, используя методы элементарной сферической геометрии (сферическую теорему косинусов или неравенство «напротив большего угла лежит большая сторона треугольника»), можно показать, что расстояние между точками с координатами  $(\theta_j, \varphi_j)$  и  $(\theta_k, \varphi_k)$  будет не больше расстояния между точками  $(\theta_0, \varphi_j)$  и  $(\theta_0, \varphi_k)$ . Поэтому без ограничения общности можно считать, что все точки  $y_j$  лежат на «краю шапочки», то есть окружности с центром  $e_0$  и радиусом  $\theta_0$ .

Но на такой окружности можно расположить не более четырех точек с попарным расстоянием не меньшим  $60^\circ$ . Мы пропустим требуемые в этом месте вычисления, впрочем, любой может провести их самостоятельно.

**4.** Итак, мы должны доказать неравенство

$$h_{max} = \max \{h_0, h_1, h_2, h_3, h_4\} < 13.$$

Несложно видеть, что

$$h_0 = f(1) = 10.11 < 13.$$

Из (i) вытекает что  $f(-\cos \theta)$  является монотонно убывающей функцией от  $\theta \in [0, \theta_0]$ . Тогда при  $m = 1$  функция  $H(\theta_1) = f(1) + f(-\cos \theta_1)$  достигает максимума при  $\theta_1 = 0$ . Отсюда

$$h_1 = f(1) + f(-1) = 12.88 < 13.$$

**5.** Пусть  $m = 2, 3, 4$ . Рассмотрим оптимальные расположения точек  $\{e_0, y_1, \dots, y_m\}$  на  $\mathcal{S}^2$ , которые задают равенства  $H(Y) = h_m$ .

Заметим, что  $y_k$  не могут быть сдвинуты по направлению к  $e_0$ , так как иначе  $H(Y)$  увеличится. Используя это наблюдение и еще некоторые несложные геометрические рассуждения, можно показать, что:

при  $m = 2$ ,  $e_0 \in y_1y_2$  и  $\text{dist}(y_1, y_2) = 60^\circ$ ,

при  $m = 3$ , треугольник  $\Delta_3 := y_1y_2y_3$  — равносторонний с длиной стороны  $60^\circ$  (как и выше,  $e_0 \in \Delta_3$ ),

при  $m = 4$ ,  $\Delta_4 := y_1y_2y_3y_4$  — ромб со стороной  $60^\circ$  и  $e_0 \in \Delta_4$ .

**6.** Пункт **5** показывает, что для нахождения  $h_m$ ,  $m = 2, 3, 4$ , мы должны найти максимум функции  $H(Y)$  на отрезке  $[0, 60^\circ]$  ( $m = 2$ ), равностороннем треугольнике  $\Delta_3$  ( $m = 3$ ) и ромбе  $\Delta_4$  ( $m = 4$ ). Для этого можно использовать стандартные численные методы. Вычисления показывают, что  $h_2 \approx 12.8749$ ,  $h_3 \approx 12.8721$ ,  $h_4 \approx 12.4849$ , т. е. во всех трех случаях  $h_m < h_1 = 12.88 < 13$ . В статье [15] эти вычисления были упрощены и, в худшем случае, сводятся к вычислению максимумов функций от одной переменной. Итак,  $h_m < 13$  для всех  $m$ , как и требовалось.  $\square$

## Список литературы

- [1] Н. Н. Андреев, В. А. Юдин. *Экстремальные расположения точек на сфере* // Математическое просвещение. Сер. 3, вып. 1. 1997. С. 115–125.
- [2] Н. Я. Виленкин. *Специальные функции и теория представлений групп*. М.: Наука, 1965.
- [3] Ф. Дельсарт. *Алгебраический подход к схемам отношений теории кодирования*. М.: Мир, 1976.
- [4] Г. А. Кабатянский, В. И. Левенштейн. *О границах для упаковок на сфере и в пространстве* // Проблемы передачи информации. Т. 14, вып. 1. 1978. С. 3–25.
- [5] Д. Конвей, Н. Д. А. Слоэн. *Упаковки шаров, решетки и группы*. М.: Мир, 1990.
- [6] В. И. Левенштейн. *О границах для упаковок в  $n$ -мерном евклидовом пространстве* // Докл. АН СССР. Т. 245. 1979. С. 1299–1303.
- [7] Х. Маехара. *Проблема тринадцати шаров (элементарный подход)* // Математическое просвещение. Сер. 3, вып. 15. 2011. С. 76–88.
- [8] Ф. Д. Мак-Вильямс, Н. Д. А. Слоэн. *Теория кодов, исправляющих ошибки*. М.: Связь, 1979.
- [9] Г. Полия, Г. Сеге. *Задачи и теоремы из анализа*. Часть II. М.: Наука, 1978.
- [10] Г. Сеге. *Ортогональные многочлены*. М.: ГИФМЛ, 1962.
- [11] Д. В. Штром. *Метод Дельсарта в задаче об антиподальных контактных числах в евклидовых пространствах больших размерностей* // Известия Уральского государственного университета. Т. 30, вып. 6. 2004. С. 154–182.
- [12] В. А. Юдин. *Минимум потенциальной энергии точечной системы зарядов* // Дискретная математика. Т. 4, вып. 2. 1992. С. 115–121.
- [13] R. W. Hamming. *Error detecting and error correcting codes* // Bell System Technical Journal. Vol. 29, no 2. 1950. P. 147–160.
- [14] W. Kuperberg. *Optimal arrangements in packing congruent balls in a spherical container* // Discrete & Computational Geometry. Vol. 37, no 2. 2007. P. 205–212.

- [15] O. R. Musin. *The kissing problem in three dimensions* // Discrete & Computational Geometry. Vol. 35, no 3. 2006. P. 375–384.
- [16] O. R. Musin. *The kissing number in four dimensions* // Annals of Mathematics. Vol. 168, no 1. 2008. P. 1–32.
- [17] A. M. Odlyzko, N. J. A. Sloane. *New bounds on the number of unit spheres that can touch a unit sphere in  $n$  dimensions* // Journal of Combinatorial Theory. Ser. A. Vol. 26, no 2. 1979. P. 210–214.
- [18] I. J. Schoenberg. *Positive definite functions on spheres* // Duke Mathematical Journal. Vol. 9, no 1. 1942. P. 96–108.
- [19] K. Schütte, B. L. Van der Waerden. *Das problem der dreizehn kugeln* // Mathematische Annalen. Bd. 125, Nu 1. 1952. S. 325–334.